

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.com

ИСТОРИЯ ОТЕЧЕСТВЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

ОТЕЧЕСТВЕННОЙ



АКАДЕМИЯ НАУК
СССР

АКАДЕМИЯ НАУК
УССР

КИЕВ—1967



АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВО-
ЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ

АКАДЕМИЯ НАУК УССР
СЕКТОР ИСТОРИИ ТЕХНИКИ И ЕСТЕ-
СТВОЗНАНИЯ ИНСТИТУТА ИСТОРИИ

История

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ:

И. З. Штокало (*ответственный редактор*), А. П. Юшкевич (*заместитель ответственного редактора*), А. Н. Боголюбов (*заместитель ответственного редактора*), И. Г. Башмакова, Н. Н. Боголюбов, А. О. Гельфонд, Б. Н. Делоне, Н. П. Еругин, А. Ю. Ишлинский, И. П. Кубилюс, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, С. Н. Мергелян, Ю. А. Митропольский, Н. И. Мухелишвили, О. С. Парасюк, И. Б. Погребынский, Е. Я. Ремез, Б. А. Розенфельд, К. А. Рыбников, В. И. Смирнов, Ю. Д. Соколов, Г. С. Чогошвили, А. Б. Паплаускас (*ответственный секретарь*), В. С. Сологуб (*ответственный секретарь*).

В ЧЕТЫРЕХ ТОМАХ

РЕДАКЦИЯ 2-го ТОМА:

И. З. Штокало (*ответственный редактор*), А. Н. Боголюбов (*заместитель ответственного редактора*), Ю. А. Митропольский, И. Б. Погребынский, Е. Я. Ремез, К. А. Рыбников, Ю. Д. Соколов, В. С. Сологуб (*ответственный секретарь*).

ОТЕЧЕСТВЕННОЙ МАТЕМАТИКИ

ТОМ

2

1801—1917

51(09C)
И90

2-2-1
4-66M

ПРЕДИСЛОВИЕ

Второй том «Истории отечественной математики» охватывает период XIX — начало XX в. (до 1917 г.).

План книги и ее содержание неоднократно обсуждались на заседаниях Семинара по истории математических наук при Институте математики АН УССР (ныне при Секторе истории техники и естествознания Института истории АН УССР), ученом совете Института истории АН УССР, заседании Научно-исследовательского семинара по истории математики и механики при Московском университете, всесоюзных конференциях по истории физико-математических наук (Москва, 1960 и 1963 гг.) и Международном конгрессе математиков (Москва, 1966 г.).

Том подготовлен коллективом отдела истории естествознания Сектора истории техники и естествознания Института истории АН УССР в составе акад. АН УССР И. З. Штокало, старших научных сотрудников докт. техн. наук А. Н. Боголюбова и канд. физ.-мат. наук В. С. Сологуба, сотрудников Э. Г. Цыганковой, О. А. Сичкар, Г. Н. Романенко и М. Б. Стороженко (ими выполнена научно-вспомогательная работа) под общим руководством акад. АН УССР И. З. Штокало.

Главы второго тома написали следующие авторы:

Глава I — С. Н. Киро, И. Я. Депман, Н. А. Чайковский, В. А. Добровольский, Н. Д. Беспамятных.

Глава II — С. Н. Киро.

Глава III — С. Н. Киро, И. З. Штокало, И. Я. Депман, Н. А. Чайковский, В. А. Добровольский, Ю. Г. Лумисте, З. Р. Вельянинова.

Глава IV — С. Н. Киро.

Глава V — С. Н. Киро.

Глава VI — В. А. Зморевич, В. С. Сологуб, А. И. Кропотов, В. А. Добровольский, Т. В. Путята, Б. Н. Фрадлин, Б. Л. Лаптев, С. В. Великая, С. Н. Киро, А. Н. Боголюбов, Г. Н. Романенко.

Глава VII — Б. Л. Лаптев, Н. И. Кованцов, С. Н. Киро, Э. Я. Бахмутская, Ю. Г. Лумисте, В. А. Добровольский, Б. В. Пясковский, Г. Н. Романенко, О. А. Сичкар.

Глава VIII — В. И. Смирнов, В. С. Сологуб, И. Б. Погребысский, А. И. Кропотов, Т. В. Путята, Б. Н. Фрадлин.

Глава IX — А. И. Кропотов, В. А. Добровольский, И. З. Штокало, А. Н. Боголюбов, З. Р. Вельянинова.

Глава X — Н. И. Кованцов, В. С. Сологуб, Т. В. Путята, Б. Н. Фрадлин, Л. Е. Майстров, В. А. Добровольский.

Глава XI — В. А. Добровольский, Э. Я. Бахмутская, С. Н. Киро, Н. А. Чайковский, И. З. Штокало, А. Н. Боголюбов, Т. В. Путята, Б. Н. Фрадлин, Е. А. Кушнир, З. Р. Вельянинова.

Глава XII — И. З. Штокало, И. Б. Погребысский, Б. Л. Лаптев, Ю. Г. Лумисте, Н. Д. Беспмятных, Н. Н. Круликовский, С. Н. Киро, В. А. Добровольский, Б. В. Пяковский.

В оглавлении указаны фамилии авторов каждого параграфа.

Библиографию составила сотрудница отдела истории естествознания Сектора Э. Г. Цыганкова. При составлении были использованы каталоги крупнейших библиотек СССР, основные библиографические источники, а также материалы, представленные авторами.

Авторский коллектив и редакционная коллегия выражают глубокую благодарность чл.-корр. АН УССР докт. физ.-мат. наук проф. П. Ф. Фильчакову, чл.-корр. АН УССР докт. ист. наук проф. И. А. Гуржию, докт. физ.-мат. наук проф. В. А. Зморовичу, докт. физ.-мат. наук проф. В. П. Вельмину, проф. Т. В. Путята за рецензирование рукописи книги и весьма ценные замечания, а также всем товарищам, принимавшим участие в ее обсуждении и подготовке к печати.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

МАТЕМАТИКА В РОССИИ ПЕРВЫХ ТРЕХ ДЕСЯТИЛЕТИЙ XIX в.

1

Социально-экономическое положение России. Реформа системы просвещения и организация физико-математического образования

С конца XVIII — начала XIX в. в социально-экономическом развитии России возникают новые явления, связанные с формированием капиталистических отношений. Вызревание новых производственных отношений в недрах феодального государства неуклонно вело к разложению феодально-крепостнического хозяйства. Помещичье-крепостнический строй шел к глубокому кризису как в социальном отношении, что проявлялось в дифференциации крестьянства, деградации дворянства, формировании промышленной буржуазии, так и в экономическом отношении — в выходе на рынок сельского хозяйства, в развитии торговли, промышленности, транспорта, городов. Заметные изменения происходили в структуре развивавшейся промышленности: в первой четверти XIX в. наряду с дворянской вотчинной и посессионной мануфактурой главное место в ряде отраслей начала занимать капиталистическая мануфактура. Росло количество наемных рабочих. Все шире вводилось машинное производство, создавались необходимые условия для промышленного переворота.

Рост промышленности, сельского хозяйства и торговли способствовал дальнейшему росту производительных сил России, однако феодально-крепостнические отношения задерживали ее экономическое развитие. После дворцового переворота 1801 г. представители либеральных кругов, поддерживавших Александра I, подготовили и начали проводить в жизнь меры, направленные на смягчение наиболее острых противоречий между прогрессирующим развитием капиталистических отношений в стране и продолжавшим существовать в ней феодально-крепостническим строем. Для усиления централизации бюрократического государственного аппарата вместо коллегий, созданных еще Петром I, в 1802 г. были учреждены министерства (военное, морское, иностранных дел, юстиции, внутренних дел, финансов, коммерции и народного просвещения), централизованному управлению которых подлежали важнейшие стороны внутренней и внешней деятельности самодержавного государства.

Отечественная война 1812 г., во время которой столь ярко проявились патриотизм, мужество и героизм русского народа, показала всю

мощь единения народных масс и способствовала росту самосознания прогрессивных сил общества. Восстание декабристов 1825 г. показало, что большие сдвиги произошли в настроениях различных слоев населения. В связи с развитием городов, промышленности и торговли стране требовалось все большее количество образованных людей. Поэтому царское правительство вынуждено было обратить внимание на вопросы образования. Была проведена реформа системы образования и расширена сеть учебных заведений. Создано шесть учебных округов и установлено четыре типа училищ: приходские, уездные, губернские (гимназии) и университеты. Прежние четырехклассные главные народные училища преобразовывались в гимназии, двухклассные малые народные училища — в уездные училища. «Для преподавания наук в высшей степени» учреждались университеты. В их ведение входили все учебные заведения данного округа. Были открыты университеты в Дерпте (1802 г.), Вильно (1803 г.), Харькове и Казани (1805 г.), Петербурге (1819 г.). Учебные заведения в России носили ярко выраженный сословный характер. Царское правительство все делало для того, чтобы образование получали главным образом дети дворян и чиновников. В 1803 г. был установлен образовательный ценз для государственных чиновников, исполнение обязанностей которых требовало специальных знаний, а в 1809 г. введены экзамены на чин. Для детей привилегированных классов были открыты специальные учебные заведения — лицеи в Ярославле (1803 г.), Царском Селе (1811 г.), Одессе (1817 г.), Кременце (1818 г.) и Нежине. Однако в России начала XIX в. в среде интеллигенции неуклонно росло и число разночинцев. С течением времени все более значительным становилось их участие в развитии русской науки и культуры, решающая роль в котором длительное время принадлежала передовым кругам дворянской интеллигенции. О росте образования в России в известной степени свидетельствуют следующие данные: в конце 1796 г. в стране было около 250 общеобразовательных учебных заведений, более 500 преподавателей и около 12 000 учащихся, в конце же первой четверти XIX в. — соответственно около 1200, около 3500, около 60 000.

С открытием университетов, к которым переходит ведущая научно-педагогическая роль в округах, расширяется и математическая деятельность в стране. Университетскому образованию Министерство просвещения уделяло особое внимание. Университеты готовили преподавателей для расширявшейся сети учебных заведений, а также чиновников государственного аппарата. По уставу им предоставлялись формально довольно широкие права самоуправления, в том числе автономия, выборность ректоров и деканов, свобода в преподавании. На них возлагалась цензура печатных произведений. Однако с усилением реакции эти права урезывались и ограничивались.

Университеты учреждались в составе четырех отделений (факультетов): нравственных и политических, физических и математических, врачебных, или медицинских, и словесных наук. В Виленском университете, кроме того, был открыт римско-католический богословский факультет. Дерптский университет был организован по образцу германских,

в составе четырех факультетов: богословского (протестантского), юридического, философского и медицинского. В других университетах России богословских факультетов не было. Богословское образование сосредоточивалось в духовных семинариях и академиях. Это предопределяло более благоприятные, чем за границей, условия для развития учебной и научной деятельности в университетах.

Организация в университетах самостоятельных отделений физических и математических наук (физико-математических факультетов) была обусловлена возросшим значением для развития производительных сил страны физико-математических и естественнонаучных знаний. В течение значительного времени математическая деятельность в университетах сводилась в основном к преподаванию и подготовке учебных пособий. Она тесно переплеталась с подобной деятельностью в области астрономии, механики, физики, где математические методы находили все большее применение.

В 1811 г. при Московском университете было организовано первое в России математическое общество (существовало до 1816 г.), что также свидетельствует о возросшем значении математики. На формирование взглядов членов общества непосредственное влияние оказало участие многих из них в Отечественной войне 1812 г. и в последовавших за ней военных походах. Борясь за переустройство России, они ратовали за развитие просвещения и науки, многие из них придерживались материалистических и атеистических взглядов, некоторые приняли участие впоследствии в восстании декабристов.

Обучение в университетах было многопредметным. По уставу 1804 г. отделение физических и математических наук Московского университета объединяло восемь кафедр: чистой математики, прикладной математики, астрономии, теоретической и опытной физики, химии, минералогии и сельского хозяйства, ботаники, технологии и наук, относящихся к торговле и фабрикам. Удельный вес прикладных наук был весьма значительным. В основном такие же кафедры, в том числе чистой и прикладной математики, были и в других университетах. В Харьковском была учреждена также кафедра военных наук. В Виленском университете отделение физико-математических наук состояло из десяти кафедр, в основном охватывавших названные выше науки. В Дерптском университете кафедра чистой математики и кафедра смешанной математики и военной науки входили в состав философского факультета. По новому уставу этого университета, утвержденному в 1820 г., факультет делился на четыре класса, включая класс философских и математических наук, в который входили кроме названных выше двух кафедр кафедры теоретической и практической философии, а также учрежденная новая кафедра астрономии.

Несмотря на немногочисленность университетских выпусков, в стране росло число математически образованных людей, среди которых было немало видных деятелей математического просвещения. После 1814 г. в университетах отмечается преобладание русских ученых, в основном университетских воспитанников. Русский язык постепенно становится основным языком преподавания. Это, естественно,

способствовало развертыванию научной деятельности и в области математики.

В течение трех лет университетского курса студентам читали так называемую чистую математику, включавшую арифметику, алгебру, геометрию и тригонометрию (повторительный курс), аналитическую геометрию и высшую алгебру, дифференциальное и интегральное исчисления, а со временем и другие собственно математические предметы, и прикладную математику, включавшую механику, оптику, астрономию и др. Первые два года обучения отводились для чистой математики, третий год — для прикладной математики; в неделю читалось от трех до шести часов лекций. Содержание курсов постепенно обогащалось. Появились, прежде всего в Казанском университете, первые специальные математические курсы. В качестве учебных пособий широко использовались руководства Эйлера и его учеников и последователей в России, а также пособия зарубежных авторов. Со временем появились и руководства по математическим наукам для высших, а также для средних учебных заведений, написанные профессорами и преподавателями университетов. Большой известностью пользовались «Курс математики» Т. Ф. Осиповского и «Ручная математическая энциклопедия» Д. М. Пешовского.

В последние годы XVIII и первые годы XIX в. царское правительство уделяло большое внимание военным, морским и другим специальным учебным заведениям. В этих учебных заведениях было расширено и углублено преподавание математики. В Институте корпуса инженеров путей сообщения, открытом в 1810 г., программа по математике не уступала университетской. Значительное место математическим вопросам уделяли военные журналы, в том числе «Артиллерийский журнал».

Заигрывание Александра I с либерализмом продолжалось недолго. После окончания войн с Наполеоном I и образования в 1815 г. Священного союза, деятельность которого была направлена на подавление народных движений, в стране усилилась реакция и гонение на передовых деятелей русского общества. Под вопрос было поставлено само существование университетов, проводилось изолирование их от «тлетворного» влияния Запада. В. И. Ленин писал: «...Монархи то заигрывали с либерализмом, то являлись палачами Радищевых и „спускали“ на верноподданных Аракчеевых»¹.

В 1816 г. Министерство просвещения возглавил обер-прокурор Синода мистически настроенный князь Голицын, по меткой характеристике Пушкина, «просвещения губитель». В это время царское правительство еще более усилило реакционный курс политики, пытаясь предупредить распространение передовых социально-политических идей. Используя религию как свое испытанное оружие, реакция, в соответствии с волей самодержца Александра I, принялась за «христианизацию» просвещения, подавляя все живое и прогрессивное. В 1819 г. в университетах были учреждены кафедры богословия. Основой всех наук, в том числе математических, объявлялось священное писание.

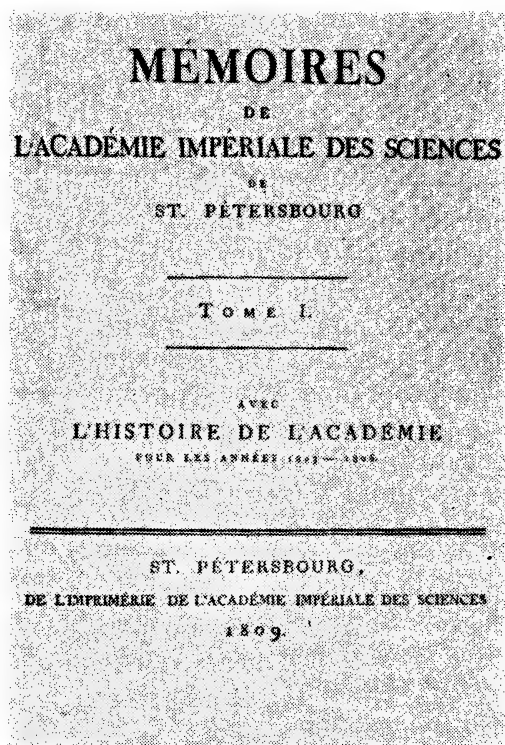
¹ В. И. Ленин. Полн. собр. соч. Т. 5, стр. 30.

После замены в 1824 г. Голицына на посту министра адмиралом Шишковым из ведения министерства были изъяты духовные дела, однако министерство, усиливая утилитарную направленность образования, особенно после подавления восстания декабристов, по-прежнему продолжало держать деятельность университетов в соответствующих царскому режиму рамках и вело наступление на «университетские вольности».

Несмотря на такие тяжелые условия, русская университетская наука развивалась, главным образом благодаря самоотверженной деятельности ее лучших представителей. В частности, в конце 20-х годов она смогла обогатить математику великим открытием Н. И. Лобачевского, составившим целую эпоху в развитии этой отрасли знания.

С течением времени научная деятельность университетов и других учебных заведений все более дополняла деятельность Петербургской академии наук, продолжавшей играть главенствующую роль в развитии науки в России. Состав Академии наук был расширен до 18 ординарных академиков и 20 адъюнктов (число экстраординарных академиков не регламентировалось). Бюджет увеличен с 53 000 до 120 000 руб. Работы ученых академии составляли основную научную продукцию в России начала XIX в. Они печатались в изданиях академии. Вместо выходившего до 1806 г. на латинском языке журнала «*Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*», продолжавшего традиции первых академических журналов XVIII в., основным научным периодическим изданием Академии наук по новому уставу был журнал «*Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St-Petersbourg*». В нем печатались статьи не только на латинском языке, но и на русском, а также на наиболее распространенных в то время европейских языках. Основным языком журнала являлся французский. Первым научным журналом по физико-математическим и естественным наукам на русском языке были «Умозрительные исследования Императорской Академии Наук», издававшиеся в 1808—1819 гг.

Академические журналы и в первые десятилетия XIX в. оставались чуть ли не единственными периодическими изданиями в России, в которых печатались работы по математике. В них непрерывно до 1830 г. печатались многочисленные работы Эйлера, идеи которого продолжали оказывать большое влияние на развитие математики в Рос-



Титульный лист журнала «Мемуары Петербургской академии наук».

сии, статьи его учеников и последователей. Математические науки и основные научные результаты по математике в Академии наук в это время были представлены трудами академиков Н. И. Фусса, Ф. И. Шуберта, С. Е. Гурьева, В. И. Висковатова, Э. Д. Коллинса и П. Н. Фусса.

Связь развития математики в университетах и других высших и специальных учебных заведениях с исследованиями по математике, проводившимися в Академии наук, стала более тесной лишь после прихода в конце 20-х годов в Академию наук академиков М. В. Остроградского и В. Я. Буняковского, внесших в русскую математику новые идеи, перекликавшиеся с идеями ученых Парижской политехнической школы. С именами Остроградского и Буняковского связан новый, не прекращавшийся впоследствии подъем отечественной математики. Это же время ознаменовано открытием неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевским. Подготовка этих знаменательных явлений в истории отечественной математики и составляла основное содержание рассматриваемого периода.

2

Математическая деятельность ученых Петербургской академии наук

Подъем русской математической культуры в начале XIX в. связан прежде всего с деятельностью академика С. Е. Гурьева (1764—1813). С. Е. Гурьеву Академия наук обязана появлением новых идей в области математического анализа и его приложений к геометрии, идей, которые были связаны с идеями французских математиков, ученых-энциклопедистов и педагогов и которые остались чуждыми его старшим коллегам по академии, ученикам Эйлера.

Семен Емельянович Гурьев учился в 1779—1784 гг. в Артиллерийском и инженерном кадетском корпусе, одном из лучших учебных заведений того времени. По рекомендации преподавателя математики Н. В. Верещагина, отражавшего в своих лекциях достижения математических наук, Гурьев после окончания корпуса был оставлен репетитором по математике. Преподавая в корпусе, он продолжал совершенствовать свои математические знания. Наиболее плодотворный период деятельности Гурьева связан с Академией наук, адъюнктом которой он был избран в мае 1796 г., после того, как представил в академию рукопись «Начала трансцендентной геометрии и дифференциального исчисления, извлеченные из истинной природы их предметов», а академиком — в начале 1798 г., после представления сочинения «Опыт о постановлении математики на твердых основаниях».

В 1798 г. Гурьев опубликовал важнейшую свою работу «Опыт о усовершенствовании элементов геометрии», посвященную методологии геометрии и анализа. Это был первый на русском языке труд по вопросам философии математики и методики ее преподавания. В нем отчетливо выступает стремление автора к более точному обоснованию математики. Гурьев уделил внимание как критике Евклида и Лежандра по вопросам

построения геометрии, так и критике различных подходов к построению анализа. Основным содержанием книги является изложение теории пределов и теории пропорций. Подробно развивая теорию пределов Даламбера, Гурьев внес в нее некоторые уточнения и дополнения. Во второй главе «Опыта» изложена разработанная им теория пропорциональных величин; несоизмеримость трактуется с помощью приближения снизу и сверху несоизмеримых величин соизмеримыми с любой степенью точности. Теория пропорций Гурьева по существу незначительно отличается от теории Евклида. Однако она была более доступной для начинающих.

В одном из дополнений к «Опыту» Гурьев изложил свой план построения геометрии, отличный от плана Даламбера. Он разделял взгляды Даламбера по вопросам о трех началах геометрии (принцип наложения, теория пропорций, метод пределов), об аксиомах, но вместе с тем возвратился во многом к Евклиду, следуя которому исключал из начальной геометрии измерение углов, площадей и объемов. Этот план осуществлен Гурьевым в книге «Основания геометрии» (1804—1807 гг.; 2-е изд. — 1811 г.), первой части морского учебного курса. Во второй части этого курса — «Науки исчисления книга первая, содержащая основания арифметики» (1805 г.) — Гурьев рассматривает четыре действия над целыми и дробными числами, используя теорию пропорций, построенную им на чисто геометрической основе. В книге заметно влияние старых русских учебников по арифметике С. К. Котельникова и С. Я. Румовского.

С «Опытом» связан также обширный трактат Гурьева «Основания дифференциального исчисления с приложением его к аналитике» (1811 г.). В нем использованы в основном сочинения Эйлера и Лагранжа, а также Кузена и Лакруа. В 1790 г. Гурьев издал для своих слушателей перевод части мореходного курса Э. Безу, дополнив его кратким изложением дифференциального и интегрального исчислений в духе Лейбница, использовав для этого (актуальные) бесконечно малые величины. Став в дальнейшем сторонником построения дифференциального и интегрального исчислений на основе теории пределов, он перевел с французского и издал книгу последователя Даламбера Кузена², дополнив ее обширными примечаниями. На основе теории пределов построено изложение и в трактате самого Гурьева.

В основном по Эйлеру написана книга Гурьева «Основания трансцендентной геометрии кривых поверхностей» (1806 г.) — первое изложение на русском языке дифференциальной геометрии. В ней рассмотрены вопросы проведения касательной плоскости и нормали к поверхности, определения кривизны поверхностей, вычисления площадей поверхностей и объемов с помощью двойных интегралов, о кривых двоякой кривизны. Материал изложен в несколько устаревшей форме и не охватывает тогда уже достаточно известных работ Монжа.

Сочинения Гурьева наряду с математическими частями руководства П. Ф. Гамалеи «Высшая теория морского искусства» (1801 г.),

² Куз е н. Дифференциальное и интегральное изчисление. СПб, 1801.

написанного для Морского кадетского корпуса, были первыми книгами на русском языке, в которых довольно подробно освещались новые для того времени вопросы математики.

Гурьев написал также около 25 научных статей. Они относятся к аналитической, дифференциальной, а также элементарной геометрии, к анализу и механике. По значимости первое место среди них занимает «Мемуар о решении основных задач, предложенных для кривых, ординаты которых исходят из неподвижной точки»³. В нем Гурьев, исходя из формул для прямолинейных координат, легко и единообразно получил в полярных координатах формулы для вычисления угла касательной с радиусом-вектором, полярной подкасательной, радиуса кривизны, длины дуги, площади и центра тяжести фигуры, поверхности и объема тела вращения. Используя в качестве полярных координат радиус-вектор и полярный угол, а не дугу окружности произвольного радиуса, как поступали обычно, он впервые придал этим формулам тот простой вид, в котором они применяются и в настоящее время.

Работа «О разделении поверхностей второго порядка на роды и виды»⁴ представляет собой попытку дать критерий для определения вида поверхности по общему ее уравнению. Как и классификация Монжа—Ашетта⁵, этот критерий не привился в математике из-за недостаточной общности и ограниченности в отношении получения новых результатов.

В статье по элементарной геометрии «О некоторых достопримечательных теоремах...»⁶ выведены формулы для вычисления объема пирамиды по ее ребрам и площади боковых граней, а также некоторые другие. Остальные геометрические статьи Гурьева являются заметками учебного характера с выводом известных формул и рассмотрением примеров.

С теорией пределов и попытками более строгого доказательства на ее основе известных теорем связаны статьи Гурьева по анализу. Среди работ Гурьева по механике обращает на себя внимание статья⁷, в которой сформулировано и доказано общее правило равновесия. Посмертно издан его учебник по механике «Основания механики», ч. 1 (1815 г.). В нем изложена статика. Это был второй курс механики на русском языке.

Разносторонней была и преподавательская деятельность Гурьева. Он преподавал в Артиллерийском и инженерном корпусе, Училище

³ S. G o u r i e v. Mémoire sur la résolution des principaux problèmes qu'on peut proposer dans les courbes, dont les ordonnées partent d'un point fixe. — Nova Acta Acad. sci. Petropol., 1801, t. 12, p. 176—191.

⁴ С. Г у р ь е в. О разделении поверхностей второго порядка на роды и виды. — Умозрительные исследования, 1808, т. 1, стр. 14—44.

⁵ G. M o n g e. Application de l'algèbre a la géométrie. Paris, 1805.

⁶ С. Г у р ь е в. О некоторых достопримечательных теоремах, до трехсторонней пирамиды относящихся. — Умозрительные исследования, 1808, т. 1, стр. 3—13.

⁷ С. Г у р ь е в. Общее правило равновесия. С приложением оного к машинам. — Умозрительные исследования, 1810, т. 2, стр. 39—132.

корабельной архитектуры, с 1810 г. вел математические курсы в Институте корпуса инженеров путей сообщения. Принимал участие Гурьев также в работе по развитию русской математической терминологии.

С. Е. Гурьев оказал большое влияние на современников. Поднятые в его работах вопросы нашли отклик в математических сочинениях ряда ученых России. Одним из наиболее выдающихся его учеников и последователей был Василий Иванович Висковатов (1779—1812), также воспитанник Артиллерийского и инженерного корпуса. Еще в бытность Висковатова учителем алгебры и механики в Артиллерийском и инженерном корпусе Гурьев привлек его к переводческой работе в Академии наук. В переводе Висковатова вышли на русском языке «Основания механики» Боссю (1806 г.) и с французского издания Лагранжа «Оснований алгебры Леонарда Эйлера части первой первые три отделения... со многими присовокуплениями» (1812 г.). Он издал также свои «Первые основания алгебры» (1803 г.). По предложению Гурьева в 1803 г. Висковатов был избран адъюнктом академии по математике. Через четыре года он был уже экстраординарным академиком, и с 1810 г. — профессором чистой и прикладной математики в Институте инженеров путей сообщения.

В избрании Висковатова адъюнктом академии немалую роль сыграли его работы о непрерывных дробях ⁸. Он нашел способ непосредственного формального преобразования рядов в соответствующие непрерывные дроби. Интерес к такого рода вопросам был обусловлен творчеством Эйлера, давшего полное решение задачи преобразования непрерывной дроби в ряд, а также решение обратной задачи для частных случаев. Висковатов предложил в качестве общего приема для решения обратной задачи использовать способ преобразования обычной дроби в непрерывную. Если P — какой-нибудь ряд, то, по Висковатову, следует записать его в виде $P = 1 : \frac{1}{P}$ и обычным способом выполнить деление единицы на P , затем прием повторяется. В качестве примеров рассмотрено преобразование в непрерывные дроби степенных рядов, в том числе биномиального, логарифмического, ряда для e^x , $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg} x$. В следующей работе Висковатов усовершенствовал и упростил свой прием, предположив, что P есть частное от деления двух каких-нибудь рядов. При этом непосредственно выделяется частное первых слагаемых числителя и знаменателя, а затем прием повторяется. Способ Висковатова позволяет непосредственно получать одно за другим выражения для членов звеньев непрерывных дробей.

В случае степенных рядов способ Висковатова можно записать так: если

$$f(x) = \frac{a_{10} + a_{11}x + a_{12}x^2 + \dots}{a_{00} + a_{01}x + a_{02}x^2 + \dots},$$

⁸ V. V i s c o v a t o v. Essai d'une méthode générale pour réduire toutes sortes de séries en fractions continues. — Nova Acta Acad. sci. Petropol., 1806, t. 15, p. 181—192; De la méthode générale pour réduire toutes sortes des quantités en fractions continues. — Mém. de l'Acad. des Sci., 1809, t. 1, p. 226—247.

то

$$f(x) = \frac{1}{\frac{a_{00}}{a_{10}} + \frac{1}{f(x)} - \frac{a_{00}}{a_{10}}} = \frac{a_{10}}{a_{00} + x \frac{(a_{10}a_{01} - a_{00}a_{11}) + (a_{10}a_{02} - a_{00}a_{12})x + \dots}{a_{10} + a_{11}x + a_{12}x^2 + \dots}}$$

и т. д.

В сочинении «О способе находить наибольшие или наименьшие величины неопределенных интегральных формул»⁹ Висковатов, основываясь на формуле Тейлора, без употребления бесконечно малых вывел необходимые условия существования решения основных вариационных задач, уже полученные Эйлером и Лагранжем по способу вариаций. В другой статье¹⁰ он рассматривает подход Лагранжа к вопросам обоснования анализа. В этой статье освещено основное содержание книг Лагранжа «Теория аналитических функций» (1797 г.) и «Лекции об исчислении функций» (1801 г.), в которых предлагается формально-алгебраическое обоснование дифференциального исчисления.

В статьях по механике Висковатов стремился дать строгие доказательства правила параллелограмма сил (1805 г.) и принципа возможных скоростей (1809 г.). В первой из них использована теория пропорциональных величин, предложенная Гурьевым. Особо Висковатов останавливается на случае несоизмеримости сил, который до него не рассматривался.

С появлением работ Гурьева и Висковатова все основные подходы к обоснованию математического анализа стали доступными русскому читателю. Обсуждение этих назревших в мировой науке вопросов привлекало внимание многих русских ученых. Кроме университетских преподавателей ими занимались также учителя математики Кузмин и Веркмейстер (Москва), Блаше (Ревель), профессиональные военные П. А. Рахманов и П. А. Сулима. П. А. Сулима (1779—1812) начал заниматься физико-математическими науками по настоянию отца. В 1802—1804 гг. он учился в Геттингенском университете, где получил степень доктора философии. По возвращении в Россию в конце 1804 г. поступил на военную службу, но продолжал интересоваться математикой. В работе «Мемуар о сближении теории аналитических функций или исчисления производных с теорией дифференциального исчисления, развитой по методу пределов...», написанной и опубликованной в 1804 г. в Геттингене на французском языке, на примере ряда Тейлора он показал взаимосвязь теории аналитических функций и теории дифференциального исчисления на основе метода пределов по Гурьеву.

⁹ В. Висковатов. О способе находить наибольшие или наименьшие величины неопределенных интегральных формул. — Умозрительные исследования, 1810, т. 2, стр. 133—182; 1812, т. 3, стр. 125—158. В предшествующей этому сочинению статье «О простейшем доказательстве тейлоровой теоремы» (1808 г.) Висковатов вывел формулу Тейлора, опираясь на геометрические рассуждения и n -кратное дифференцирование равенства $Y - y = P(X - x)$, где P — функция x и $X - x$.

¹⁰ В. Висковатов. Краткое изложение способа знаменитого Лагранжа изъяснять исчисление дифференциальное и приложение оного к геометрии кривых линий. — Умозрительные исследования, 1810, т. 2, стр. 183—314.

Весьма плодотворной была научная деятельность П. А. Рахманова, участника Отечественной войны, павшего в бою под Лейпцигом в 1813 г. Будучи на военной службе, он занимался музыкой и, особенно, математикой. В первых его работах по математике нашли отражение идеи Гурьева. В 1803—1805 гг. Рахманов совершенствовал свои математические знания в Париже. По возвращении в Россию он весьма успешно рецензировал новые математические книги в «Московских ученых ведомостях», а также помещал свои статьи и задачи в «Артиллерийском журнале». В 1810 г. издавал «Военный журнал».

В 1806—1807 гг. Рахманов написал ряд работ по математике («Собрание сочинений», 1807 г.). В «Отрывках аналитики» на основе формулы Тейлора рассмотрены вопросы теории рядов, в «Опыте о поверхностях вращения» и «Опыте о цилиндрических и конических поверхностях» изложены результаты Монжа по дифференциальной геометрии. В «Опыте о теории наибольших и наименьших величин функций многих переменных количеств» (1810 г.) использованы дифференциалы высших порядков, в «Опыте о различных теориях дифференциального исчисления и о сравнении оных» (1812 г.) критически изложены вопросы трактовки дифференциального исчисления учеными от Ферма до Лагранжа. Работы Рахманова не содержали существенно новых результатов, однако были весьма полезными, так как в них приводилось много новых для русского читателя сведений. По своему уровню они вполне сопоставимы с аналогичными работами Висковатова.

Ученики и последователи Гурьева, улучшая изложение некоторых его методов, продолжали в более доступной форме распространение идей своего учителя. Преподаватель Горного корпуса А. И. Ильинский издал «Основания геометрии, составленные по системе академика С. Е. Гурьева» (1825 г.). При одинаковом охвате материала эта книга оказалась по объему в три раза меньше книги Гурьева. С. И. Райковский опубликовал «Начальные основания геометрии» (1827 г.), В. С. Себржинский издал под своим именем остававшееся в рукописи пособие Гурьева по алгебре¹¹. Совершенствовавшийся в математических науках под руководством Гурьева магистр Харьковского университета Н. М. Архангельский опубликовал работу «Рассмотрение примечаний на основания геометрии Гурьева» (1813 г.).

К началу XIX в. первые ученики Эйлера академики С. К. Котельников и С. Я. Румовский почти полностью отошли от математической деятельности. В 1810 г. Румовский опубликовал небольшую статью¹² о нахождении интегралов

$$\int \frac{(1-z^2) dz}{(1+z^2) \sqrt[4]{(1+6z^2+z^4)^3}} \text{ и } \int \frac{(1+z^2) dz}{(1-z^2) \sqrt[4]{(1-6z^2+z^4)^3}}$$

¹¹ В. С. Себржинский. Основания алгебры. СПб, 1820.

¹² Перед этим была напечатана в академическом журнале заметка Румовского «Integratio formulae $p^3 v dv = n v dp + n p dv$ ($1-p$) ($2-p$)» (Nova Acta Acad. sci. Petropol., 1801, t. 12, p. 192—195), в которой заменой переменной найден интеграл указанного в заглавии уравнения в виде $\frac{p p v - n (1-p)^2}{[n(p-1) - p v]^2} = c$, чем несколько отличается от полученного Эйлером.

в конечном виде. Основное внимание Котельникова поглощали обязанности цензора, а Румовского — обязанности вице-президента Академии наук (1800—1803 гг.) и попечителя Казанского учебного округа (1803—1812 гг.). Некоторый интерес к математике проявлял академик-физик В.-Л. Краффт. В одной из работ¹³ он получил достаточные условия для того, чтобы целые числа вида $6m + 1$ и $6m - 1$ были простыми. В другой работе изложено основанное на алгебраических преобразованиях степенного ряда для синуса элементарное доказательство двух формул, выражающих при целых m $\sin m\varphi$ через степени $\sin \varphi$.

Среди академиков старшего поколения особенно выделялся научной деятельностью Николай Иванович Фусс (1755—1825). Важнейшей его заслугой является сохранение и опубликование значительной части научного наследия Л. Эйлера. Только в 1801—1830 гг. Академией наук было издано около 90 работ Эйлера, большей частью подготовленных к печати Фуссом. С творчеством Эйлера тесно связаны и самостоятельные исследования Фусса, опубликованные в журналах Петербургской академии наук. Большая часть их является либо дополнением, либо комментариями к трудам Эйлера. Фуссу принадлежит свыше 100 печатных работ, не считая учебных пособий. Две трети из них были опубликованы в XIX в., причем 18 — на русском языке. Работы, изданные в XVIII в., относятся к анализу, геометрии, а также к механике. Некоторые вопросы этих наук Фусс разрабатывал и в последующих своих трудах.

К области анализа относятся работы Фусса о разложении в ряды, особенно тригонометрические и степенные, об их суммировании. Он связывал его с некоторыми вопросами, относящимися к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений. Фуссу принадлежат исследования, относящиеся к разложению в бесконечные произведения, по некоторым вопросам интегрирования функций и интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, в том числе с помощью интегрирующего множителя. Вслед за И. Ламбертом он пополнил сведения о гиперболических функциях.

По всем названным вопросам Фуссом были получены интересные результаты, однако наиболее многочисленными и значительными являются его исследования в области геометрии. Наибольший отклик имели его работы в области полигонометрии, привлекавшей внимание петербургских математиков своей тесной связью с геодезией и картографией, математические вопросы которой намного успешнее, чем в других странах, разрабатывались в XVIII в. в России Эйлером, Шубертом и самим Фуссом. Фусс занимался изучением вписанных в круг и описанных многоугольников. Для случая четырехугольника он дал зависимость между радиусами r , R вписанного и описанного кругов и расстоянием между их центрами $D = R^2 + r^2 \pm r \sqrt{4R^2 + r^2}$ (минус при $r < R$, плюс при $r > R$)¹⁴. В дальнейшем обобщил задачу на слу-

¹³ W. L. K r a f f t. Essai sur les nombres premiers. — Nova Acta Acad. sci. Petropol., 1801, t. 12, p. 217—245.

¹⁴ Н. Ф у с с. О четырехугольниках, около которых круг описать и в которых круг вписать можно. — Умозрительные исследования, 1815, т. 4, стр. 33—55.

чай $n > 4$ и решил ее для пяти-, шести-, семи- и восьмиугольников с иррегулярной симметрией¹⁵. В работе о правильных многоугольниках¹⁶ Фусс на основе установленных им тригонометрических тождеств дал отличные от ранее известных аналитические доказательства теорем о соотношениях между радиусом окружности, описанной вокруг правильного многоугольника, и его сторонами, диагоналями, а также секущими, проведенными к вершинам многоугольника из некоторой точки окружности. В другой его статье¹⁷ решается задача о разбиении параллелограмма двумя взаимно перпендикулярными прямыми на четыре равновеликие части.

Фусс и Шуберт во многом способствовали развитию сферической геометрии. Фусс изучал эллипс (1788 г.) и другие кривые на сфере¹⁸, работы Шуберта относятся к сферической тригонометрии. Под влиянием соответствующих результатов Эйлера Фусс и Шуберт изучали свойства кривых, заданных определенными соотношениями между радиусом кривизны, радиусом-вектором кривой и длиной ее дуги. Основные результаты Фусса были опубликованы в 1809 г.¹⁹ Непосредственно к эйлеровским примыкают его работы по аналитической и дифференциальной геометрии, в том числе статьи, посвященные изучению различных кривых, плоских и пространственных, в частности кривой $y = \pm \sqrt{\frac{x(b-x)(c-x)}{f-x}}$, которую впоследствии изучал Ж. Серре под названием лемнискаты Фусса. Соответствующие результаты Эйлера развивает Н. И. Фусс и в статьях по теории чисел.

Фусс является автором ряда пособий по математике. Его учебники «Начальные основания алгебры» (1798 г., на французском языке — 1791 г.), «Начальные основания геометрии» (1811 г., на французском языке — 1798 г.), «Начальные основания плоской тригонометрии» (1804 г.), «Начальные основания высшей геометрии» (1804 г.) широко использовались в преподавании математики в военных училищах, а учебник «Начальные основания чистой математики» в трех частях (1810—1812 гг., переиздан в 1823 г.) в 1814 г. был введен как основной в гимназиях.

Высокий авторитет в Академии наук имел Федор Иванович (Фридрих Теодор) Шуберт (1758—1825), родом из Гельмштедта (Германия). Учился он в Грейсвальде и Геттингене. В математике совершенствовался самостоятельно. В Россию приехал в 1783 г. В 1786 г. был избран адъюнктом Академии наук, в 1789 г. — академиком по математике.

¹⁵ Н. Ф у с с. О симметрических неправильных многоугольниках, вписанных в круге и около круга описанных. — Умозрительные исследования, 1815, т. 4, стр. 56—81.

¹⁶ N. F u s s. Demonstratio theorematum quorundam polygonometricorum. — Mém. de l'Acad. des. Sci., 1830, t. 11, p. 209—219.

¹⁷ N. F u s s. De la division d'un rhomboïde en quatre parties égales par deux lignes droites qui se coupent à angles droits. — Mém. de l'Acad. des Sci., 1811, t. 3, p. 63—74.

¹⁸ Н. И. Ф у с с. О кривизне линий на поверхности шара описанных. — Умозрительные исследования, 1810, т. 2, стр. 3—14; О циклоидах на поверхности шара описанных. — Труды Академии наук, 1821, ч. 1, стр. 32—50.

¹⁹ N. F u s s. Decas problematum geometricorum, ex methodo tangentium inversa, radium osculi spectantium. — Mém. de l'Acad. des Sci., 1809, t. 1, p. 88—137.

а в 1803 г. — по астрономии. Руководство по теоретической астрономии ²⁰ Шуберта, первое систематическое изложение этой науки, было признано его современниками классическим, причем использовалось не только в России, но и во многих германских университетах.

Шуберту не были чужды некоторые идеи французской математической школы, особенно идеи Лагранжа по вопросам обоснования анализа. Из старшего поколения академиков лишь он заинтересовался этими вопросами. Следуя в основном Лагранжу, Шуберт попытался, не используя идею бесконечного, доказать теорему Тейлора ²¹. Отвергая и бесконечно малые, и теорию флюксий, и теорию пределов, он в рассуждениях по обоснованию дифференциального исчисления, сопровождаемых геометрическими иллюстрациями, опирался на возможность разложения функции в ряд и на идеи Лагранжа ²². В другой работе ²³, пользуясь методом Лагранжа, но, в отличие от него, не привлекая мнимые величины, он путем исследования знака дифференциала второго порядка выводит и применяет к конкретным примерам достаточные условия экстремумов для функции четырех переменных. К анализу относится также его заметка о преобразовании рядов в непрерывные дроби ²⁴. Вместе с тем основным в математической деятельности Шуберта, являлась разработка идей Эйлера. Это предопределило значительную общность тематики математических исследований Шуберта и Фусса.

Шуберту принадлежит подробное изучение, оставшееся почти забытым, локсодромической линии на любых поверхностях вращения (1808 г.), а не только на сфере. Он впервые указал ²⁵ дифференциальный признак для выяснения строения плоской кривой $u(x, y) = 0$ вблизи двойных особых точек, основанный на исследовании выражения

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2,$$

что принято и в современных учебниках. Достаточно полно рассмотрел случай равенства нулю указанного выражения, когда возможны точки возврата первого или второго рода. Дал доказательство формулы для вычисления площади поверхности с помощью двойного интеграла ²⁶, изучал развертку плоского сечения цилиндра на плоскость ²⁷, рассмо-

²⁰ F. T. Schubert. Lehrbuch der theoretischen Astronomie. Teile 1—3. St-P., 1798.

²¹ F. T. Schubert. Démonstration du théorème de Taylor. — Mém. de l'Acad. des Sci., 1820, t. 7, p. 71—79.

²² F. T. Schubert. Réflexions sur la théorie du calcul différentiel. — Mém. de l'Acad. des Sci., 1818, t. 6, p. 153—234.

²³ F. T. Schubert. Des maxima et minima d'une fonction de plusieurs variables. — Ibidem, p. 267—295.

²⁴ F. T. Schubert. De transformatione seriei in fractionem continuam. — Mém. de l'Acad. des Sci., 1820, t. 7, p. 139—158.

²⁵ F. T. Schubert. Réflexions sur les points de rebroussement. — Mém. de l'Acad. des Sci., 1822, t. 8, p. 176—197.

²⁶ F. T. Schubert. De quadratura superficierum curvarum. — Mém. de l'Acad. des Sci., 1824, t. 9, p. 277—282.

²⁷ Ф. Шуберт. О разверзании цилиндрических сечений. — Умозрительные исследования, 1815, т. 4, стр. 97—112.

трел геометрическое решение алгебраических уравнений до шестой степени с помощью конхоиды, дал решение одной малоизвестной задачи Паппа о круге и прямой. Кроме названных Шуберту принадлежат исследования по астрономии, а также по механике. Осталась неопубликованной его работа «Курс высших частей чистой математики», написанная и предназначенная для топографов Главного штаба.

Зарубежные математики высоко ценили Фусса и Шуберта как крупных ученых своего времени. С большим уважением относился к ним К. Ф. Гаусс, считавший Петербургскую академию наук выдающейся. Известно, что в 1802 г. Гаусс был избран членом-корреспондентом академии, а в 1824 г. — ее почетным иностранным членом.

С геометрией связана научная деятельность учеников Н. И. Фусса —

его сына П. Н. Фусса (1798—1855) и Э. Д. Коллинса (1791—1840).

Математические способности П. Н. Фусса (правнука Л. Эйлера по матери) проявились в раннем детстве. В семь лет он настолько преуспел в арифметике, что отец начал преподавать ему алгебру и геометрию. По окончании гимназии, в 1814 г., в возрасте 16 лет он стал воспитанником Академии наук, где под руководством отца продолжал совершенствоваться в математике. С 1816 г. П. Фусс начал преподавать (в качестве старшего учителя) математику в первом кадетском корпусе. С этого времени появляются его работы, в которых он стремится изложить более понятно для своих учеников некоторые особенно трудные вопросы высшей геометрии. Из шести собственно математических работ П. Фусса пять относятся к геометрии²⁸. В них изучаются некоторые трансцендентные кривые, в том числе квадратриса гиперболы, а также параболы высших порядков, выражаемые уравнением $y^{m+n} = a^m x^m$.

В 1818 г. П. Фусса избирают адъюнктом Академии наук, а в 1823 г. — экстраординарным академиком. В начале 1826 г. он занял место отца, как ординарный академик и неперменный секретарь Академии наук, и с этого времени занялся научно-организационной и издательской деятельностью академии, в том числе составлением ежегод-



П. Н. Фусс.

²⁸ Первой из математических работ была статья «Примечания и дополнения к XII главе 2-го тома Алгебры Эйлера касательно решения уравнений третьей степени» (Труды Академии наук, 1821, ч. 1, стр. 51—63). В 1823 г., также в «Трудах Академии наук» (ч. 2, стр. 40—55), была напечатана работа «О параболах высших порядков», содержащая его наиболее важные геометрические результаты.



Э. Д. Коллинс.

ных отчетов о ее работе. Знакомясь с архивом академии, П. Фусс обнаружил неопубликованные работы Эйлера, его переписку и другие материалы. В 1843 г. он издал ценнейший источник по истории физико-математических наук XVIII в. — переписку между Л. Эйлером и Х. Гольдбахом, а также письма И. Бернулли, Д. Бернулли, Н. Бернулли и Н. Фусса²⁹. Многие письма, вошедшие в эту книгу, являются по существу небольшими научными работами, содержащими важные результаты текущих исследований авторов. В значительной мере эти результаты впервые становились широко доступными. В первом томе переписки дан составленный П. Фуссом список работ Эйлера — 756 наименований (в дальнейшем он довел его до 809). В список включены также сведения о неопубликованных еще тогда работах Эйлера.

В 1849 г. П. Фуссу и его брату Н. Фуссу, преподавателю математики одной из петербургских гимназий, удалось издать на средства Академии наук двухтомное собрание арифметических работ Эйлера. Уже после смерти П. Фусса, в 1862 г. его брат Н. Фусс опубликовал подготовленные ими два тома неизданных работ Эйлера по математике и физике. Эти четыре тома Эйлерового научного наследия намного расширили представление о творчестве великого ученого. Заслугой братьев Фусс, особенно П. Фусса, перед русской и мировой наукой является введение в научный оборот математиков XIX в. значительной части собранных и сохраненных ими многих работ Эйлера. К этим работам проявили большой интерес М. В. Остроградский, В. Я. Буняковский, П. Л. Чебышев, К. Якоби, К. Ф. Гаусс и другие видные математики того времени. В России тем самым сохранилась в значительной степени преемственность эйлеровских традиций в ходе становления математической школы П. Л. Чебышева, создание которой во многом было подготовлено М. В. Остроградским и В. Я. Буняковским.

Другой ученик Н. И. Фусса — Э. Д. Коллинс родился в Петербурге, в семье пастора реформистской церкви, эмигрировавшего из Пруссии. Как и П. Н. Фусс, он был правнуком Л. Эйлера по матери. Образование получил под руководством отца. С 1804 г. учился в Главной немецкой школе в Петербурге, а в 1809 г. стал воспитанником Акаде-

²⁹ Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII-eme siècle. T. 1, 2. St-P., 1843.

мии наук. Математику изучал самостоятельно по классическим трактатам своего прадеда. Руководил математическими занятиями Коллинса Н. И. Фусс. В начале 1814 г. был избран адъюнктом, в 1820 г. — экстраординарным и в 1826 г. ординарным академиком. К этому времени Коллинс был автором 11 небольших работ. Почти все они посвящены изучению свойств различных кривых.

В 1824 г. Коллинс начал преподавать математику в Главной немецкой школе, а в дальнейшем стал ее директором. Со временем научные интересы Коллинса изменились. Занятия геометрией на основе старых классических идей без восприятия новых направлений оказались бесперспективными. Он написал две работы по теории чисел, в которых изложил по Гауссу некоторые свойства делимости чисел и применил их к рассмотрению отдельных частных случаев большой теоремы Ферма и ее обобщения на большее число слагаемых ³⁰.

Еще в 1819 г. Коллинс заинтересовался математическими работами М. Ома и его брата — известного физика Г. Ома. Восприняв установки указанных работ, он занялся их углублением и использовал для перестройки своего преподавания. Затем появилось его небольшое сочинение об основных чертах типового исчисления («Grundlinien des typischen Kalkuls», 1823), в котором он попытался обобщить анализ с точки зрения его операционных знаков (Operationszeichen). В дальнейшем, следуя немецкой комбинаторной школе, Коллинс в своих исследованиях использовал в немалой степени аппарат комбинаторного исчисления. Это направление его научных интересов вполне оценимо с современной точки зрения.

С середины 20-х годов внимание Коллинса привлекли некоторые вопросы анализа. В первых относящихся к этой области его работах рассмотрены различные задачи теории функций. Они появились в 1831 г. в «Мемуарах» Академии наук. Еще в 1826 г. Коллинс докладывал в академии теорему о дифференцировании произведений $P[f(x, n)] = f(x, 1)f(x, 2)f(x, 3)\dots f(x, n)$, сомножителями которых являются последовательные члены некоторого ряда. В этом же году он сообщил выведенную им по индукции формулу для производной любого порядка функции $X = \psi(\varphi x)$, записав ее в виде

$$\frac{d^m [\psi(\varphi x)]}{m! dx^m} =$$

$$= S \left[\frac{\frac{1}{a} + \frac{2}{a} + \dots + \frac{m}{a}}{a! a! \dots a!} \left(\frac{\varphi' x}{1!} \right)^1 \left(\frac{\varphi'' x}{2!} \right)^2 \dots \left(\frac{\varphi^{(m)} x}{m!} \right)^m \psi^{\frac{1}{a} + \frac{2}{a} + \dots + \frac{m}{a}}(\varphi x) \right],$$

$$\frac{1}{a} + 2\frac{2}{a} + 3\frac{3}{a} + \dots + m\frac{m}{a} = m,$$

³⁰ Э. Коллинс. Исследования, относящиеся до двух трансцендентных кривых линий. — Умозрительные исследования, 1815, т. 4, стр. 143—158; О некоторых свойствах логарифмической спирали. — Умозрительные исследования, 1819, т. 5, стр. 72—83; Theorematis arithmetici demonstratio. — Mém. de l'Acad. des Sci., 1822, t. 8, p. 242—246; Исследования, касающиеся до теории чисел. — Труды Академии наук, 1823, ч. 2, стр. 31—39.

где S означает суммирование выражения, стоящего в квадратной скобке, по переменным $a_1, a_2, \dots, a_m$. Это так называемые переменные комбинаторного исчисления, т. е. нули или целые положительные числа, удовлетворяющие здесь уравнению $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + ma_m = m$. Приведенную формулу Коллинс неоднократно использовал в работах по анализу, в частности при нахождении значений производных в определенной точке функциональной степени порядка n функции $\varphi(x)$, т. е. n -й итерации этой функции. В 1827 г. он решил следующую задачу теории аналитических функций: по данным функциям $F(u)$ и $f(t)$ найти функцию $y = \varphi(x)$, такую, что $\varphi(fx) = F(\varphi x)$, указав способ последовательного определения производных функции $\varphi(x)$ в некоторой точке и тем самым получения этой функции на основе теоремы Тейлора.

К 1830 г. относится работа Коллинса о разложении функций в ряды специального вида. Этим вопросам он посвящает и другие статьи (1833 г.). Дальнейшему изучению функциональных степеней, которые Коллинс начал рассматривать в первых работах по анализу, посвящена его статья о новых исследованиях в этой области ³¹, в ней улучшены полученные им ранее результаты.

Типичной работой, написанной в духе комбинаториков, является заметка Коллинса о числовых факториалах второй степени, т. е. о произведениях членов последовательности, вторые разности которых постоянны ³². До Коллинса подобными вопросами занимались Эйлер и Вандермонд. Крамп применял числовые факториалы в исследованиях по астрономической рефракции. Коллинс, введя понятия числовых факториалов 2-й степени, установил их основные свойства и вывел формулу разложения для факториального бинома. Частным случаем этой формулы является формула бинома Ньютона. Коллинс обобщил (1839 г.) вандермондову формулу разложения факториального бинома $(a + b)^{n/d}$ на случай $(a' + a'' + a''' + \dots + a^{(m)})^{n/d}$ с некоторыми вытекающими следствиями о числе различного рода сочетаний.

С середины 30-х годов Коллинс переключается на занятия алгеброй. Некоторые его работы о многочленах и алгебраических уравнениях известны лишь в виде небольших заметок и кратких извлечений, опубликованных в научном бюллетене академии. Как и раньше, он использует в них аппарат комбинаторного анализа.

В двух работах по теории чисел (1839 г.) речь идет о разложении целых чисел на множители. Поводом к их написанию послужила заметка Эйлера о том, является ли число 1 000 009 простым. Коллинс получает: $3413 \times 293 = 1\,000\,009$. Тем самым он приходит к результату, о котором Эйлер доложил еще в 1778 г.

³¹ E. Collins. Nouvelles recherches sur la théorie des puissances fonctionnelles.— Mém. de l'Acad. des Sci., 1838, t. 1 (III), p. 313—331.

³² E. Collins. Sur les facultés numériques du second ordre.— Ibidem, p. 225—232.

Незадолго перед смертью Коллинс занялся исследованием вопроса о разложении $\sqrt[n]{a}$ в непрерывную дробь. Предложенный им способ для этого во многих случаях оказывается удобнее других ³³.

3

Математика в петербургских высших и специальных учебных заведениях

В учебных заведениях Петербурга в первые десятилетия XIX в. математическая деятельность, хотя и медленно, ширилась и развивалась. Успешно решались вопросы организации математического образования, создания учебных пособий, подготовки специалистов. Во всем этом постепенно повышалась роль Петербургского педагогического института и основанного на базе его в 1819 г. Петербургского университета.

В учительской семинарии, открытой в 1786 г. с целью подготовки учителей для главных народных училищ, было хорошо поставлено преподавание математики. Этим она была обязана своему профессору, адъюнкту Академии наук ученику Л. Эйлера М. Е. Головину (1756—1790). Под его руководством математическую подготовку получили видные деятели физико-математического образования в России конца XVIII — начала XIX в. П. И. Гиляровский и Т. Ф. Осиповский. Гиляровский преподавал математические науки в учительской семинарии, написал книгу «Сокращение вышней математики» (1796 г.), в которой кратко изложил начала дифференциального и интегрального исчисления и их приложение к кривым линиям. Осиповский в 1800—1803 гг., до переезда в Харьков, был профессором семинарии.

В 1803 гг. взамен учительской семинарии была открыта учительская гимназия, с 1804 г. называвшаяся педагогическим институтом. Институт рассматривался как отделение будущего университета. Становление Петербургского университета проходило в крайне неблагоприятных условиях засилия реакции. В 1821 г. были уволены лучшие профессора. Из-за слабой подготовки поступающих в университете в первые два года читались лишь начала математики, включавшие алгебру, геометрию, прямолинейную и сферическую тригонометрию. Преподавал этот предмет первый профессор чистой и прикладной математики университета и первый декан физико-математического отделения Д. С. Чижев (1785—1853).

Как один из лучших выпускников педагогического института, Чижев в 1808 г. был направлен для «приготовления к профессорскому званию» за границу. По возвращении в Россию он в 1812 г. начал преподавать математику в педагогическом институте, сначала как экстраординарный, а с 1816 г. как ординарный профессор. В 1823 г. вышла

³³ E. Collins. Ueber die aus Wurzelgrößen entspringenden Kettenbrüche. — Bull. sci. publ. par l'Acad. des Sci. de St-P., 1840, t. 7, col. 357—361.

работа Чиждва «Записки о приложении начала механики к ищислению действия машин наиболее употребительных». А в 1826 г. Академия наук избрала его своим членом-корреспондентом. С 1821 г. он читал слушателям второго и третьего годов обучения высшую математику и механику, а с 1824 г. оставил за собой только прикладную математику (механику, оптику и др.), курсы же математики передал своему ученику В. А. Анкудовичу (1792—1856). С 1824 г. помощником Анкудовича был воспитанник университета кандидат П. В. Тихомиров (1803—1831), в дальнейшем — адъюнкт астрономии. Наряду с астрономией он читал плоскую и сферическую тригонометрию, аналитическую геометрию и высшую алгебру.

В преподавании Чиждов и Анкудович использовали пособия по алгебре, геометрии, тригонометрии, дифференциальному и интегральному ищислениям С. Ф. Лакруа. Эти пособия были изданы на русском языке в переводе П. Смирнова³⁴. Пользуясь в основном указанными руководствами Лакруа, Чиждов и Анкудович при изложении дифференциального и интегрального ищислений несколько отходили от них в направлении упрощения курса, что обусловливалось уровнем подготовки слушателей и отводимым для его прохождения временем. При этом они обычно опускали дифференциальные уравнения и вариационное ищисление.

Старейшим высшим техническим учебным заведением России являлся Петербургский горный институт. Он ведет свое начало от Горного училища, основанного в 1773 г. и переименованного в 1804 г. в Горный кадетский корпус. В 1806 г. корпус был уравнен в правах с университетом. Высшую математику в институте до 1823 г. читал ученик Эйлера А. М. Вильдбрехт, известный своими трудами по картографии. До 1804 г. он, по-видимому, ограничивался в преподавании приложениями алгебры к геометрии, а с 1804 г. включал также дифференциальное и интегральное ищисления с применением их к механике. Последнюю часть курса с 1823 г. начал читать В. А. Анкудович, остальную часть, включая приложения алгебры к геометрии, — К. А. Шелейковский (он читал также начертательную геометрию и геодезию). Курс механики до 1812 г. преподавал академик В. И. Висковатов.

Математика была положена в основу всего преподавания в Институте корпуса инженеров путей сообщения, открытого в Петербурге в 1810 г. Длительное время преподавание в институте велось на французском языке. Элементарная математика (арифметика, алгебра, геометрия, плоская и сферическая тригонометрия) читалась на первом году обучения, высшая математика (приложение алгебры к геометрии, дифференциальное и интегральное ищисления, начертательная геометрия) — на втором. Следующие два года отводились для изучения

³⁴ С. Ф. Л а к р у а. Начальные основания прямолинейной и сферической тригонометрии и приложений алгебры к геометрии. СПб, 1822; Дополнения к начальным основаниям алгебры. СПб, 1823; Начальные основания дифференциального ищисления. СПб, 1822; Начальные основания интегрального ищисления. СПб, 1823.

специальных наук. Первыми профессорами математики в институте были академик В. И. Висковатов и И. С. Резимон (1768—1844). В 1812 г. Висковатова заменил Д. С. Чижов. Курс механики в институте непродолжительное время читал академик С. Е. Гурьев.

В 1812—1813 гг. кроме Резимона и Чижова математику временно преподавал в институте инженер-подполковник А. И. Маюров (1780—1848), получивший образование в Парижской политехнической школе. Он читал приложения алгебры к геометрии, приложение анализа к геометрии, дифференциальное и интегральное исчисления и механику³⁵. Часть своих лекций Маюров издал под названием «Вышняя геометрия с изложением теории дифилирования крепостных строений» (1817 г.). В книге Маюрова достаточно полно изложена аналитическая геометрия в пространстве. Некоторое время математику в институте преподавал П. П. Базен, впоследствии — директор института. В 1817 г. (на русском языке — в 1819 г.) он издал пособие по дифференциальному исчислению³⁶.

Начертательную геометрию в институте читал до 1818 г. ученик Монжа по Парижской политехнической школе К. И. Потье. Первый в России курс начертательной геометрии Потье был издан в 1816 г. на французском и русском языках³⁷. По существу это был сборник задач с решениями, а не теоретический курс. Русский перевод принадлежит воспитаннику института Я. А. Севастьянову (1796—1849), преемнику Потье. В 1819 г. вышла книга Севастьянова «Начальные основания аналитической геометрии», первое руководство по этому предмету на русском языке. С 1818 г. Севастьянов первым в институте начал читать лекции на русском языке. Его курс «Основания начертательной геометрии» (1821 г.) получил широкую известность. Профессор (с 1824 г.) Института корпуса инженеров путей сообщения Я. А. Севастьянов является основателем русской школы начертательной геометрии.

С 1820 г. немногим более десяти лет в институте преподавали воспитанники Парижской политехнической школы Г. Ламе (1795—1870) и Б. Клапейрон (1799—1864). Ламе читал математику, механику, физику и чисто инженерные курсы, Клапейрон — прикладную математику. Вместе с Базеном Ламе издал в 1825 г. учебник по интегральному исчислению, который через два года был переведен на русский язык³⁸. За время пребывания в Петербурге Ламе и Клапейрон стали известными учеными, были избраны членами-корреспондентами Петербургской академии наук.

³⁵ В 1815 г. Маюров был избран членом-корреспондентом Петербургской академии наук по математическому разряду.

³⁶ P. B a z a i n e. Traité élémentaire du calcul différentiel. St-P., 1817.

П. Б а з е н. Начальные основания дифференциального исчисления, СПб, 1819.

³⁷ P o t i e r. Traité de géométrie descriptive. St-P., 1816 (Paris — 1817).

П о т ь е. Основания начертательной геометрии. СПб, 1816.

³⁸ P. B a z a i n e, G. L a m é. Traité élémentaire du calcul intégral. St-P., 1825.

П. Б а з е н и Г. Л а м е. Начальные основания интегрального исчисления. СПб., 1827.

Вскоре после открытия Горный корпус и Институт корпуса инженеров путей сообщения были перестроены на военный лад. В этих учебных заведениях обучались дети потомственных дворян. Для них же были предназначены и кадетские корпуса, готовившие офицеров для армии, артиллерии и флота. В связи с повышением требований к подготовке военных и инженерных специалистов, особенно морских офицеров и артиллеристов, в кадетских корпусах и специальных училищах расширялся курс математики, прежде всего за счет дифференциального и интегрального исчисления. Так, в Морском корпусе П. Ф. Гамалея читал обширный курс математики с приложениями. Этот курс был издан и получил широкую известность. В 1816 г. комиссия, состоявшая из учителей корпуса, подготовила для кадетских корпусов новые пособия по арифметике, геометрии и обоим тригонометриям. В 1827 г. при Морском корпусе был учрежден двухгодичный, в дальнейшем трехгодичный, офицерский класс, в котором основное внимание уделялось высшей математике и ее приложениям, что было характерно для высшего учебного заведения.

В 1798 г. при непосредственном участии С. Е. Гурьева было организовано Училище корабельной архитектуры. Преподавание математики в училище при Гурьеве (с 1799 г. — профессор математики) было поставлено весьма хорошо. Читалась она в соответствии с системой математического образования, разработанной С. Е. Гурьевым, и по руководствам Гурьева, включала геометрию кривых линий и кривых поверхностей, дифференциальное и интегральное исчисления, дифференциальные уравнения, трансцендентную геометрию кривых линий и кривых поверхностей (дифференциальную геометрию) и вариационное исчисление. В частности, по дифференциальным уравнениям излагались не только приемы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, а и понятие об уравнениях в частных производных.

В начале XIX в. были открыты также специальные военные учебные заведения повышенного типа: Инженерное училище, с 1804 по 1810 г. называвшееся Инженерной школой, а с 1819 г. — Главным инженерным училищем, и Артиллерийское училище (1820 г.). В младших классах этих училищ преподавали начальный курс математики и приложения алгебры к геометрии, в старших (офицерских) — дифференциальное и интегральное исчисления. В Инженерном училище последние читал Балашов, в Артиллерийском — В. А. Анкудович.

Преподавание математики в высших технических и специальных учебных заведениях способствовало общему подъему математической культуры в стране и расширению области практического применения математических знаний. В начавших выходить с середины 20-х годов периодических технических изданиях («Горный журнал», «Журнал Главного управления путей сообщения», «Инженерные записки») появлялись математические работы прикладного характера.

Математика в Московском университете

В первые годы XIX в., до принятия нового устава, в Московском университете математика продолжала оставаться вспомогательным предметом для изучения других дисциплин. Согласно новому уставу, принятому в 1804 г., все математические предметы читались на отделении физических и математических наук. Их продолжали преподавать профессора В. К. Аршеневский (1758—1807) и М. И. Панкевич (1757—1812). Оба они родились на Украине, учились в Киевской академии и Московском университете, где получили степень магистра, а затем преподавали: Аршеневский — чистую математику (с 1788 г.), Панкевич — прикладную (с 1791 г.).

Аршеневскому принадлежит заслуга введения в университетский курс вопросов высшей математики. Ближайшим его помощником был адъюнкт В. А. Загорский (1770—1848), читавший в университете в 1805—1810 гг. начала математики, а затем высшую геометрию (конические сечения), дифференциальное и интегральное исчисления. Полный курс прикладной математики профессора Панкевича состоял из механики, гидравлики, аэрометрии с объяснением устройства машин, оптики, сферической тригонометрии, астрономии, математической географии и навигации.

Опытным математиком и педагогом в Московском университете был также И. А. Иде (1755—1806). До приезда в Россию он опубликовал в Германии диссертацию об интерполировании рядов (1802 г.) и руководство по началам чистой математики (1803 г.). С 1804 г. Иде — экстраординарный профессор Московского университета. В течение двух лет он читал на латинском языке некоторые математические курсы, в том числе дифференциальное и интегральное исчисления с приложениями. В Московском университете Иде был единственным иностранным ученым, приглашенным для преподавания математики.

В связи с обновлением преподавания математики в университете в начале XIX в. возникла необходимость в замене устаревшей учебной литературы новой. Начали использовать руководства Эйлера, Бюржа, Безу. «Курс математики» Безу в переводе на русский язык В. А. Загорского был издан в Москве в 1798—1803 и 1804—1806 гг.

Однако оживление математической деятельности в Московском университете в первые годы после введения нового устава продолжалось недолго. После ухода в 1810 г. из университета Загорского на кафедру чистой математики был приглашен П. И. Суворов, в прошлом преподававший в Морском кадетском корпусе. Он ограничился преподаванием лишь начал математики с начальными сведениями о конических сечениях. На кафедру прикладной математики после смерти Панкевича был приглашен воспитанник университета Ф. И. Чумаков (1782—1837). В 1812 г. ему была присвоена степень доктора математических наук. С 1813 г. он вел в университете курс механики. На кафедру чистой математики в 1813 г. перешел Т. И. Перелогов, до этого читав-

ший в университете иностранные языки. Помощниками Перелогова были воспитанники университета магистр П. А. Афанасьев (в 1815—1816 гг.) и адъюнкт Д. П. Тростин (с 1816 г.), преподававшие начала математики. Афанасьев написал пособия по арифметике (1814 г.) и алгебре (1816 г.), а также составил пятизначные «Таблицы логарифмов простых чисел и тригонометрических линий» (1818 г.). Афанасьев в 1817 г. заменил магистр П. С. Щепкин, а Тростина в 1819 г. — магистр Д. М. Перовошиков. С приходом Щепкина и Перовошикова преподавание математики в университете значительно улучшилось.

П. С. Щепкин (1793—1836) окончил Московский университет со степенью кандидата в 1811 г. В 1815 г. сдал магистерские экзамены, а в 1818 г. был избран адъюнктом. Начал преподавание в университете в 1817 г. чтением начальной геометрии, начальной алгебры и тригонометрии. С 1820 г. преподавал высшую алгебру, с 1824 г. — аналитическую геометрию, а после ухода из университета Перелогова, с 1826 г., — также дифференциальное и интегральное исчисления. Получив звание профессора, Щепкин занимал несколько лет ведущее положение в преподавании математики в университете. Щепкин и Перовошиков читали математику по курсу Франкера. Вместе с И. И. Давыдовым они перевели на русский язык и издали в Москве в 1819—1825 гг. все части курса Франкера.

Наиболее видным из московских математиков в рассматриваемые годы был Д. М. Перовошиков (1790—1880). Он учился в Казанской гимназии и Казанском университете, который окончил в 1808 г. С 1809 по 1816 г. преподавал математику и физику в Симбирской гимназии. На основании представленных работ в 1813 г. был удостоен Казанским университетом степени магистра. В конце 1818 г. начал педагогическую деятельность в Московском университете, в 1819 г. был утвержден в звании адъюнкта и в течение последующих пяти лет читал алгебру и аналитическую геометрию, а затем перешел на преподавание курсов астрономии. В 1826 г. стал профессором астрономии и посвятил всю последующую свою деятельность в основном этой науке.

Математические курсы Перовошиков читал непродолжительное время, но «преподавал математику вдохновенно, как поэт, как бы создавая ее во время изложения, с страстною любовью к ней, которую сообщал своим слушателям»³⁹. Он очень много занимался пополнением учебной литературы по математическим наукам на русском языке, а также написал большое количество научных и научно-популярных статей по астрономии, математике, физике. Кроме перевода курса Франкера, а также перевода в дальнейшем курса начал математики Лакруа большое значение для распространения математических знаний в России имели написанные Перовошиковым пособия по математике, в том числе руководство «Главные основания аналитической геометрии трех измерений» (1822 г.) и получившая широкую известность «Ручная математическая энциклопедия» в 13 небольших томах карманного формата. «Энциклопедия» является основным математическим сочинением

³⁹ С. Ш е в ы р е в. История Московского университета. М., 1855, стр. 451.

Перовошикова. Первые семь книг ее (1826—1828 гг.) содержат основные разделы математики, а остальные книги, вышедшие позже, посвящены механике, оптике, физике и астрономии.

В первых четырех книгах «Энциклопедии» («Арифметика», 1826 г.; «Основания геометрии», 1826 г.; «Алгебра», 1827 г., и «Приложение алгебры к геометрии», 1827 г.) помещен материал, относящийся к начальному курсу математики. В пятой книге («Теория дифференциального и интегрального исчисления», 1827 г.) изложены дифференциальное и интегральное исчисления примерно в таком же объеме, как у Франкера. Шестая книга — «Высшая геометрия» (1828 г.) — охватывает аналитическую и дифференциальную геометрию, в ней отражены некоторые идеи Монжа. В одной из глав кратко изложены основы вариационного исчисления, в другой — вычисление объемов тел и площадей поверхностей с применением двойных интегралов. Дополнением к «Высшей геометрии» является седьмая книга — «Начертательная геометрия» (1829 г.), представляющая собой сокращенный и обработанный перевод соответствующей работы Монжа.

При написании «Энциклопедии» Перовошиков использовал различные источники. Во второй книге особенно заметно влияние Гурьева. В изложении анализа Перовошиков пошел дальше Бушарла и Франкера, хотя и допускает некритическое объединение различных точек зрения, небрежные формулировки. Он пользуется разными приемами, следуя теории аналитических функций Лагранжа, теории пределов по Гурьеву, воззрениям Карно.

Благодаря П. С. Щепкину и Д. М. Перовошикову уровень преподавания математики в Московском университете приблизился к уровню преподавания в Харьковском и Казанском университетах, где математическое образование с самого начала существования этих учебных заведений было поставлено на должную высоту.



Д. М. Перовошиков.

Математика в Харьковском университете

К вопросу учреждения университета общественность Харькова проявила большой интерес. Деятельное участие в организации его принял В. Н. Каразин. Университет был открыт в самом начале 1805 г. почти в полном соответствии с уставом. Положительную роль в этом сыграла культурно-просветительная деятельность Харьковского коллегиума, в котором постоянно значительное внимание уделялось преподаванию светских, в частности физико-математических, наук.

Еще до официального открытия университета профессором математики в нем был назначен известный русский ученый Т. Ф. Осиповский (1765—1832). Тимофей Федорович Осиповский родился в с. Осипово Ковровского уезда Владимирской губернии, в семье сельского священника. Учился во Владимирской духовной семинарии, а с 1783 г. — в Петербургском главном народном училище, преобразованном затем в учительскую семинарию, по окончании которой начал преподавать физико-математические науки и русскую словесность в Московском главном народном училище. Как лучший учитель, Осиповский в 1800 г. был переведен профессором математики в Петербургскую учительскую семинарию. Здесь он занялся подготовкой к изданию руководства по математике, работу над которым продолжил уже в Харькове. С Харьковом связан наиболее важный и плодотворный период деятельности Осиповского как видного ученого, прогрессивного философа-материалиста, передового деятеля просвещения, последовательного борца с реакцией и мистицизмом в России аракчеевского времени.

В основу преподавания математики в университете был положен получивший широкую известность «Курс математики» Осиповского. Трижды издававшиеся первая часть — «Общая и частная арифметика» (1802, 1813, 1820 гг.) и вторая — «Геометрия, прямолинейная и сферическая тригонометрия и введение в криволинейную геометрию» (1801, 1814, 1820 гг.) представляют собой изложение курса математики, читанного Осиповским в Москве и Петербурге. Написанную в Петербурге для учительской семинарии и доработанную в Харькове с учетом нужд университета третью часть Осиповский подготовил к изданию в 1809 г., но печатание ее затянулось. Лишь в 1823 г. Академия наук издала третью часть «Курса математики» Осиповского, охватывавшую «теорию аналитических функций» — сводное изложение учения о функциях, включая введение в анализ, дифференциальное и интегральное исчисления, интегрирование дифференциальных уравнений, в том числе в частных дифференциалах, вариационное исчисление. По содержанию «Курс математики» Осиповского был в России самым полным для своего времени, во многих разделах выходившим за пределы университетской программы по математике. В нем давалось систематическое и ясное, доступное для понимания учащихся изложение обширного материала от первых арифметических сведений до начал вариацион-

ного исчисления. По книге Осиповского училось не одно поколение молодежи России.

Основное место в первой части «Курса математики» занимает изложение алгебры. Осиповский один из первых в русской математической литературе изложил общую теорию алгебраических уравнений высших степеней. В книге рассмотрено также приближенное решение уравнений. Подробно изложены теория неопределенных уравнений первой, второй и высших степеней, вопросы разложения функций в ряды и их применение для приближенного вычисления значений функций, в частности логарифмов, бином Ньютона для произвольного показателя, а также разложения алгебраических дробей на простейшие и затем в ряды, превращение непрерывной дроби в бесконечный ряд и другие вопросы, используемые в дифференциальном и интегральном исчислениях.

При изложении геометрии (вторая часть курса) Осиповский, как и другие авторы, в частности Безу, Лакруа, в меньшей степени Лежандр, использует принципы Даламбера, направленные на отход от традиционного изложения по Евклиду и приближение изложения к жизни. Основные понятия он связывает с опытом, практикой, много места уделяет их применениям. Вычисления длины окружности, площади круга, площади поверхностей и объема тел проводит с помощью простейших инфинитезимальных приемов.

В тригонометрию включены формулы Муавра, разложение $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$ и $\arcsin z$ в степенные ряды, дифференциальные соотношения в прямолинейных и сферических треугольниках, конические сечения и их свойства, циклоида, эволюты, а также циссоида Диоклеса, спираль Архимеда и квадратриса Динострата с указанием их применения к решению задач об удвоении куба и делении углов на равные части. Рассмотрение площади гиперболы связывается с логарифмами, при этом с помощью рядов для основания натуральных логарифмов вычислено приближенное значение $e = 2,718281828459045$, все знаки которого верны.

Большой интерес представляет третья часть курса, в изложении материала которой, как часто и раньше, Осиповский в значительной степени следует Эйлеру. В ней рассматриваются различные преобразования функций и в связи с этим бесконечные произведения, в частности для $\sin z$, а также формула Валлиса для π , формулы Эйлера, связывающие показательные и тригонометрические функции, вычисляются суммы некоторых рядов. Много внимания уделяется теории конечных разностей, в частности, рассматриваются интерполяционные формулы Ньютона и Лагранжа. В трактовке производной объединены точки зрения Эйлера и Даламбера. Достаточно полно изложены сведения о функциях нескольких переменных, подробно рассмотрены различные приемы интегрирования, а также интегрирование с помощью рядов как некоторых функций, так и дифференциальных уравнений, в частности уравнения Риккати. Интегрирование дифференциальных уравнений занимает весьма значительное место, охватывая обыкновенные уравнения первого порядка, в том числе их особые реше-



Т. Ф. Осиповский.

ния, уравнения в полных дифференциалах с теорией интегрирующего множителя, уравнения высших порядков, особенно линейные, системы дифференциальных уравнений, отдельные случаи уравнений в частных производных первого и второго порядков. Основы вариационного исчисления изложены по Лагранжу. В третьей части, как и в предыдущих, много дополнений и уточнений, принадлежащих самому Осиповскому.

Первые годы Т. Ф. Осиповский преподавал в университете весь курс математики. Начиная с 1810 г. он постепенно передает чтение математики своему ученику А. Ф. Павловскому и в дальнейшем оставляет за собой курс для студентов второго года обучения. Этот курс включал интегральное и вариационное исчисления и приложение аналитических функций к высшей геометрии. На лекциях по математике излагались все основные вопросы «Курса математики» Осипов-

ского. Знание более специальных вопросов этого руководства требовалось на кандидатских экзаменах.

После 1810 г. Осиповский начал читать также механику (по руководству Франкера), астрономию (по руководству Био) и оптику. Эти науки все больше привлекают его внимание, их вопросам он посвящает свои статьи. В его статье «Теория движения тел, брошенных на поверхности земной» рассмотрено плоское движение шарообразного тела под действием силы метания, силы тяжести и сопротивления воздуха, которое, в частности, принимается пропорциональным квадрату скорости, составлены и проинтегрированы уравнения движения, даны числовые примеры. Статья была напечатана в 1817 г. в первом (и единственном) томе «Трудов Общества наук, состоящего при Харьковском университете». В деятельности этого общества Осиповский принимал активное участие (он был одним из его организаторов и руководителей).

В речах Осиповского «О пространстве и времени» (1807 г.) и «О динамической системе Канта» (1813 г.) ярко выражены его материалистические воззрения. Он выступил с резкой критикой идеалистических взглядов Канта на природу пространства и времени, его различных априорных построений. Анализируя основное утверждение Канта о том, что пространство и время являются априорными, доопытными, только внутри нас, а не во внешнем мире существующими категориями, Осиповский приходит к его опровержению и вместо него устанавливает

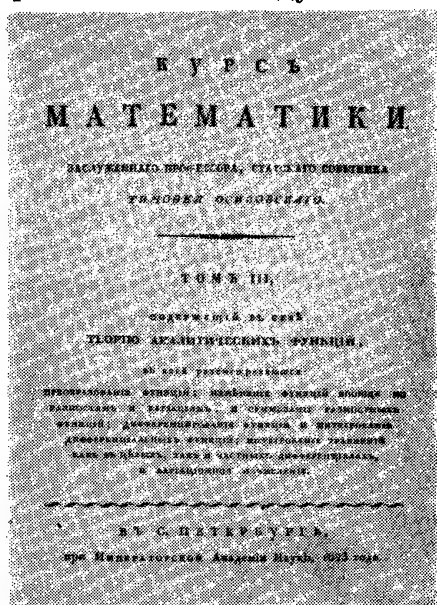
материалистическое положение о том, что «пространство и время суть условия бытия вещей, в самой природе и в них самих, а не в нашем образе чувствования существующие». Известны также выступления Осиповского против идеалистической системы Шеллинга и его последователей, против числового мистицизма, распространявшегося в России в это время. Как один из наиболее передовых представителей естественнонаучного материализма своего времени, Осиповский, борясь с идеализмом в различных его проявлениях, укреплял восходящую к Ломоносову материалистическую линию в русском естествознании.

Плодотворная деятельность Осиповского как ученого, преподавателя, воспитателя молодежи, его неутомимое трудолюбие нашли в университете признание. В 1807 г. ему была присвоена почетная степень доктора философии. С 1813 г. на протяжении семи лет подряд он избирался ректором университета. В эти годы влияние Осиповского в Харьковском университете было особенно сильным. Оно распространялось и на иностранных профессоров университета. Не исключено, что отмеченные выше философские воззрения Осиповского имели влияние на Ф. Швейкарта, профессора права Харьковского университета в 1812—1817 гг. До приезда в Харьков из Германии Швейкарт пытался доказать пятый постулат Евклида, в Харьковском же университете он пришел к мысли о возможности построения неевклидовой, «астральной» геометрии ⁴⁰.

Среди первых выпускников Харьковского университета были Н. М. Архангельский (1787—1857) и А. Ф. Павловский (1788—1857), впоследствии профессора математики.

Н. М. Архангельский окончил университет со степенью кандидата в 1808 г. В 1811 г. получил степень магистра. В этом же году в связи с переходом профессора И. С. Гута, читавшего с 1808 г. в Харьковском университете прикладную математику, в Дерптский университет Архангельский начал готовиться к занятию кафедры прикладной математики. Он был направлен в Петербург, где в течение двух лет успешно проходил подготовку у академика С. Е. Гурьева. В Харьковском университете Архангельский читал механику более 20 лет. Он перевел (1816 г.) «Основания механики» Франкера, которыми и руководствовался в преподавании. В одной из работ изложил ос-

⁴⁰ Об этом сообщалось в записке Швейкарта, переданной Гауссу в 1818 г. и ставшей широко известной после опубликования литературного наследия Гаусса и его переписки. См., в частности, С. F. G a u s s. Werke. Bd 8. Göttingen, 1900, S. 180—181, 238.



Титульный лист «Курса математики» Т. Ф. Осиповского.



А. Ф. Павловский

новные положения гидродинамики⁴¹, используя теорию пределов по Гурьеву.

Сорок лет преподавал математику в Харьковском университете Андрей Федорович Павловский. В 1806 г. он окончил Харьковский коллегиум, в 1809 г. — университет со степенью кандидата. В этом же году начал читать алгебру, а затем и все остальные части курса математики, руководствуясь сначала курсом Осиповского, а со временем и собственными записками. В 1815 г. ему было присвоено звание адъюнкта, в 1819 г. — экстраординарного и в 1826 г. — ординарного профессора. Павловский подготовил издание на русском языке (1820 г.) весьма подробных таблиц логарифмов Ф. Калле. Из работ самого Павловского была напечатана лишь речь «О вероятности» (1820 г.), в которой в доступной форме, интересно и достаточно

полно он осветил основные положения теории вероятностей. Это первая на русском языке статья, популяризовавшая теорию вероятностей.

Прекрасно читая лекции, Павловский с большим вниманием относился к студентам, поощрял их к научным занятиям. Он выявил выдающийся талант к математике у своего ученика М. В. Остроградского и сумел заинтересовать его этой наукой. И Осиповский, и Павловский принимали деятельное участие в судьбе молодого Остроградского. Однако обстоятельства в университете сложились так, что он лишился и одного из знаменитейших своих выпускников — Остроградского, и одного из лучших своих профессоров — ректора Осиповского. Просветительная деятельность Осиповского, его материалистические философские воззрения, атеистические высказывания, открытые выступления против идеализма вступали во все большие противоречия с официальными установками аракчеевского времени. По доносам реакционных профессоров в 1820 г. Осиповский был отстранен от работы в университете. Лишившись работы, он поселился в Москве и продолжал заниматься начатым еще в 1802 г. переводом «Небесной механики» Лапласа. Перевод остался ненапечатанным.

С некоторыми вопросами «Небесной механики» Лапласа связана диссертация ученика Осиповского П. А. Затеplinского, относящаяся ко времени его пребывания в Париже. Затеplinский окончил в 1816 г.

⁴¹ Н. М. Архангельский. Теория движения жидких тел. — В кн.: Труды Общества наук. Харьков, 1817, стр. 42—108.

Харьковский университет, где под влиянием Осиповского заинтересовался астрономией. В 1823 г. ему, первому из русских ученых, была присуждена по математическим наукам степень доктора философии Парижского университета. В 1824—1834 гг. он преподавал в университете теоретическую астрономию по сочинению Лапласа.

После отстранения Осиповского весь курс математики перешел к Павловскому. Его помощником был воспитанник университета М. А. Байков (1800—1849). Байков окончил университет в 1819 г. Защищенная им в 1821 г. магистерская диссертация «О различных способах излагать дифференциальное исчисление», а также работы «Об обратных тригонометрических функциях» (на латинском языке) и перевод первой части «Аналитической механики» Лагранжа, за которые он был избран адъюнктом чистой и прикладной математики в 1822 г., остались неопубликованными. В 1824 г. была напечатана его речь «О счетных системах». Байков читал математику для слушателей первого года обучения (плоскую и сферическую тригонометрию, высшую алгебру и конические сечения).

Преподавание математики в 20-е годы Павловским и Байковым вполне соответствовало уровню, установленному их учителем Осиповским. По постановке преподавания математики Харьковский университет, наряду с Казанским, продолжал занимать ведущее положение в стране.

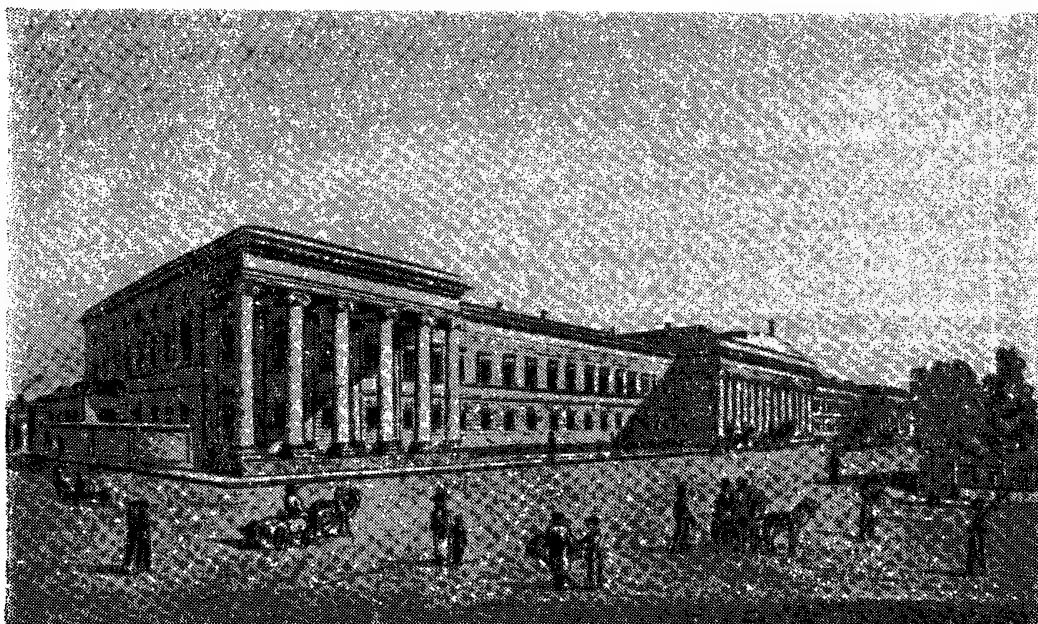
6

Математика в Казанском университете

Устав Казанского университета был утвержден в ноябре 1804 г. Формальное открытие университета состоялось в феврале 1805 г. Однако его полное открытие в соответствии с уставом затянулось до 1814 г. В 1812 г. университет был разделен на отделения. Благодаря заботам первого попечителя Казанского учебного округа академика С. Я. Румовского, преподавание физико-математических наук в университете было поставлено очень хорошо. Румовский сумел пригласить видных ученых. По его настоянию в Казанском университете была учреждена раньше, чем в других университетах, самостоятельная кафедра астрономии.

В 1805—1806 гг. математику в Казанском университете читал адъюнкт Г. И. Карташевский (1779—1840). Карташевский родился на Украине. После окончания в 1799 г. Московского университета был определен учителем математики в Казанскую гимназию. В университете преподавал весь курс математики. За резкие выступления против самовластия директора гимназии и университета И. Ф. Яковкина был уволен из университета. Первым адъюнктом прикладной математики и физики, а с 1810 г. — экстраординарным профессором в Казанском университете был воспитанник Киевской академии, земляк и соученик (по Московскому университету) Карташевского И. И. Запольский.

Широкую деятельность в области физико-математических наук в Казанском университете развернули приглашенные в университет



Казанский университет (начало XIX в.).

Румовским известные немецкие ученые профессор чистой математики М. Ф. Бартельс, профессор прикладной математики К. Ф. Реннер, профессор астрономии и основатель университетской обсерватории И. А. Литтров и профессор теоретической и опытной физики К. И. Броннер. Работая в области просвещения, они занимались также научными исследованиями и даже собирались в 1811 г. организовать при университете «Казанское математико-физическое общество». В этот период Реннер опубликовал свои исследования по интегрированию в конечных разностях. Литтров представил в Петербургскую академию наук научные работы, в том числе две статьи по математике⁴², выполненные им в Казани, и был избран в 1813 г. членом-корреспондентом академии. В одной из указанных статей он рассматривает, в связи с потребностями сферической астрономии, в аналитической форме вопрос о взаимном расположении трех плоскостей в пространстве, другая статья посвящена вопросам суммирования рядов по Эйлеру. Бартельс подготовил в рукописи несколько математических сочинений и полный курс математики, часть которого была им опубликована в Дерпте, куда он перешел в 1820 г. профессором математики университета.

М. Ф. Бартельс (1769—1836) родился в Брауншвейге, учился в Гельмштедтском и Геттингенском университетах. В 1803 г. за диссертацию по вариационному исчислению получил в Иенском университете степень доктора философии. В 16 лет стал помощником учителя в одной из частных школ, где началась его дружба с Гауссом (Гауссу

⁴² J. S. Littrow. Sur la position des plans.— Mém. de l'Acad. des Sci., 1822, t. 8, p. 54—90. De summatione serierum. — Mém. de l'Acad. des Sci., 1820, t. 7, p. 110—138.

в то время было восемь лет). В Казань прибыл в начале 1808 г. В университете читал самые разнообразные математические дисциплины: тригонометрию, высшую арифметику, дифференциальное и интегральное исчисления, аналитическую геометрию, аналитическую механику, историю математики и др. Авторитет Бартельса как профессора математики был очень высоким. Об этом, в частности, свидетельствует тот факт, что он был первым деканом отделения физических и математических наук и ежегодно переизбирался на этот пост в 1814—1820 гг. Бартельс вел научную переписку с академиком Н. И. Фуссом.

Большое внимание Бартельс и другие профессора, особенно Литтров, уделяли подготовке в университете молодых ученых. Их воспитанниками были Н. И. Лобачевский, И. М. Симонов, а также А. В. Кайсаров, Д. М. Перевощиков и другие выпускники университета, ставшие впоследствии профессорами и преподавателями. На предложенную Бартельсом тему А. В. Кайсаров представил в конце 1808 г. работу «Рассуждение о разрешении уравнений второй и третьей степеней посредством тригонометрии», за которую был удостоен степени кандидата. В 1811 г. Кайсаров, уже магистр, начал преподавать в университете физику. Бартельсу была поручена дальнейшая подготовка Г. Б. Никольского, определенного Румовским в середине 1808 г., после успешного окончания Петербургского педагогического института, магистром в Казанский университет. Однако Никольский увлекся административно-практической работой, проявляя при этом реакционные взгляды. В 1817 г. он получил звание ординарного профессора прикладной математики.

Особенно большое внимание Бартельс и Литтров уделяли своим лучшим ученикам Н. И. Лобачевскому и И. М. Симонову (1794—1855). Первый впоследствии стал гениальным математиком, второй — известным астрономом. В 1814 г. Лобачевский и Симонов, получив звание адъюнкта, начали преподавать в университете, Лобачевский — математику, Симонов — астрономию и геодезию.

Первым университетским курсом Лобачевского была теория чисел, которую он излагал по Гауссу и Лежандру. Такой курс в России до Лобачевского, по всей вероятности, читал лишь Бартельс. В последующие годы Лобачевский преподавал арифметику, алгебру и тригонометрию, а также дифференциальное и интегральное исчисления⁴³. Дифференциальное и интегральное исчисления он читал, следуя руководству Лакруа, плоскую и сферическую тригонометрию, вслед за Бартельсом, — в основном по Каньоли⁴⁴.

После ухода Бартельса в 1820 г. в Дерптский университет ведущим математиком в Казанском университете становится Лобачевский. Он все больше углубляется в научную работу, занимается подготовкой пособий по геометрии и алгебре, расширением преподавания математики.

⁴³ Материалы для биографии Н. И. Лобачевского. Собр. и ред. Л. Б. Модзалевский. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1948, стр. 64, 75, 77, 82, 83, 241.

⁴⁴ A. Cagnoli. *Trigonometria plana e sferica*. Paris, 1808.

По запискам Лобачевского учитель гимназии Н. О. Юферов, окончивший Казанский университет в 1820 г. со степенью кандидата и признанный в 1822 г. магистром математики и физики, читал в университете с осени 1821 г. вспомогательные курсы алгебры и геометрии студентам врачебного отделения, а впоследствии некоторое время также студентам физико-математического отделения.

С сентября 1825 г. прямолинейную и сферическую тригонометрию читал профессор Г. Б. Никольский, аналитическую геометрию, дифференциальное и интегральное исчисления — воспитанник Венского политехнического института и Венского университета, ученик И. А. Литрова адъюнкт математики Н. Д. Брашман (1796—1866), начертательную геометрию — адъюнкт прикладной математики П. М. Васильев (1785—1866), аналитическую механику и математическую физику (в 1825/26 и 1826/27 учебных годах) — Н. И. Лобачевский.

Наряду с разносторонней преподавательской деятельностью Лобачевский занимался исследованием постулата параллельных. О первых своих результатах в этом направлении он сообщил физико-математическому отделению университета в докладе, прочитанном 11(23) февраля 1826 г. Этот день является днем рождения новой, неевклидовой геометрии — геометрии Лобачевского, дальнейшая разработка которой стала основной целью его жизни. После увольнения М. Магницкого с поста попечителя учебного округа ректором университета был избран Лобачевский. Начался новый период деятельности Лобачевского и всего Казанского университета.

7

Математика в Дерптском университете

Дерптский университет был учрежден русским правительством в 1802 г. в качестве краевого университета и организован по образцу германских провинциальных университетов. В течение почти всего XIX века языком преподавания в университете был немецкий, а преподаватели, за небольшим исключением, приглашались из Германии. Вначале в Дерптском университете не было физико-математического факультета. Кафедра чистой и прикладной математики и кафедра смешанной математики и военной науки входили в состав философского факультета. Кроме двух ординарных профессоров на этих кафедрах предусматривался астроном-наблюдатель в звании экстраординарного профессора, считавшийся помощником профессора математики.

Первым преподавателем математики в университете был Эрнст Кнорре (1759—1810). В 1803 г. он получил звание экстраординарного профессора как астроном-наблюдатель. Более восьми лет Кнорре читал в университете курс начал математики. Изданный им конспект лекций (1803 г.) включал также сведения о логарифмах и перспективе.

Первый ректор университета профессор физики Г. Ф. Паррот (1767—1852) преподавал также математику. Одно из его пособий (1815 г.)

включает начала математики. К 1822 г. относится изобретение им пантографа для нужд Ливонского экономического общества. Пантограф был использован при проведении работ по картографированию Ливонии. Он имел большой коэффициент редукции (от $\frac{2}{7}$ до $\frac{1}{300}$ при требовавшемся $\frac{1}{35}$) и высокую точность в работе ⁴⁵. В 1826 г. Паррот был избран членом Академии наук и переехал в Петербург.

В 1804 г. профессором чистой и прикладной математики был назначен И. В. Пфафф (1774—1835) из Штутгарта ⁴⁶. В Дерпте Пфафф преподавал в основном механику и начала математики с коническими сечениями. К 1805 г. относится его курс начал дифференциального и интегрального исчисления, первый в Дерптском университете по этому предмету. Новыми курсами Пфаффа были также начала комбинаторного анализа и исчисления вероятностей (1806 г.), теория и применение геометрических инструментов (1807 г.). В 1808 г. Пфафф отказался от кафедры и весной 1809 г. уехал в Германию. На его место в этом же году был избран К. Ф. Гаусс. Однако Гаусс не принял предложение университета и рекомендовал на вакантную кафедру датчанина Г. Х. Шумахера (1780—1850). Переписка Гаусса с Шумахером составляет один из главных источников научной биографии Гаусса. Шумахер в 1805 г. приехал в Лифляндию в качестве домашнего учителя, а через год переселился в Дерпт, где под руководством Пфаффа усердно изучал астрономию и проводил наблюдения. Он напечатал ряд статей в астрономическом журнале «*Astronomische Beiträge*», издававшемся Пфаффом в 1806—1807 гг. в Дерпте. Получив в Дерптском университете от юридического факультета право чтения лекций, Шумахер начал читать два курса, в том числе политическую арифметику, которые, однако, не были окончены из-за недостатка слушателей. Он собирался заняться астрономическим определением широт и долгот всех городов Лифляндии и Эстляндии и, по поручению Пфаффа, триангуляцией местности до Вильно. Однако ему пришлось в 1807 г. возвратиться на родину. Позднее Шумахер стал директором обсерватории в Альтоне и издателем журнала «*Astronomische Nachrichten*».

Совет Дерптского университета не воспользовался рекомендацией Гаусса. На кафедру был избран профессор прикладной математики Харьковского университета И. С. Гут (1763—1818). Получив в университете Галле степень доктора философии, он с 1789 по 1807 г. был профессором физики и математики университета во Франкфурте-на-Одере, затем непродолжительное время преподавал в Харькове. В Дерпте Гут читал ряд курсов по астрономии, прикладной математике и военным наукам, исполнял обязанности декана. Курсами Гута по математике были учение о конических сечениях (1812 г.), начала

⁴⁵ G. F. P a r r o t. Description d'un nouveau pantographe. — Mém. de l'Acad. des Sci., 1831, t. 1, p. 25—38.

⁴⁶ Младший брат И. Ф. Пфаффа, именем которого была названа известная задача в теории дифференциальных уравнений.

высшей геометрии, или геометрии кривых (1813, 1815, 1817 гг.), дифференциальное и интегральное исчисления (1814—1816 гг.).

И Кнорре, и Гут занимались в основном астрономией и механикой, уделяя преподаванию математики мало внимания. Значительную роль в преподавании математики в университете сыграли его воспитанники астрономы-наблюдатели М. Г. Паукер и, особенно, В. Я. Струве, занимавшиеся преимущественно у Паррота и Пфаффа.

М. Г. Паукер (1787—1855), уроженец Эстляндии, в 1808 г. окончил университет. В 1811 г. был избран на должность астронома-наблюдателя. В 1813 г. защитил диссертацию об упругих свойствах твердого тела, за которую ему были присуждены почти одновременно степени магистра и доктора философии. Затем он был утвержден в звании экстраординарного профессора.

Паукер написал большое количество работ по математике, астрономии и метеорологии. За метеорологические работы он был избран в 1822 г. членом-корреспондентом Петербургской академии наук и впоследствии удостоен ее премий. В Дерптском университете Паукер читал (1811—1813 гг.) курс сферической тригонометрии и аналитической геометрии, арифметику с приложением к учению о вероятностях и политической арифметике, анализ бесконечно малых с применением к механике и астрономии. Его курсы по сравнению с курсами Гута были более содержательными.

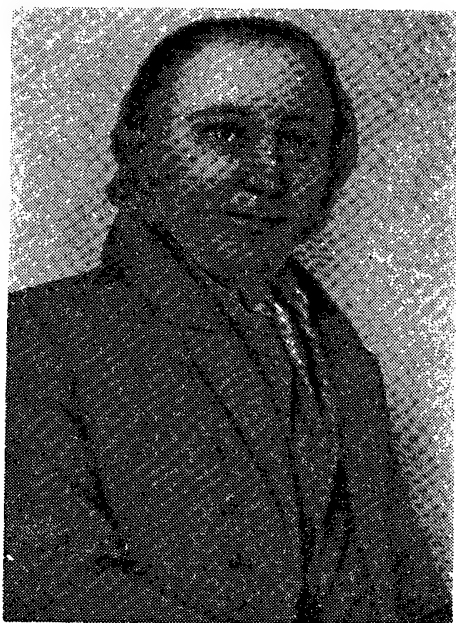
В 1813 г. защитил диссертацию о суммировании рядов и был удостоен степени магистра и доктора К. Я. Купфер (1789—1838). В 1819 г. он издал работу об определении числа мнимых корней алгебраического уравнения произвольной степени. Имя Купфера упоминается в обозрениях преподавания в связи с чтением начал математики. В 1820 г. Купфер был назначен адъюнктом в университет, но в конце этого же года его перевели в Ревель (Таллин) старшим учителем математики местной гимназии.

В поднятии преподавания математики в молодом университете намного большую, чем Паукер, роль сыграл Василий Яковлевич (Фридрих-Вильгельм) Струве (1793—1864). Благодаря ему в университете начали преподавать высшую математику. После двух с половиной лет в основном заочного обучения в университете Струве в 1810 г. получил степень кандидата филологии. С 1811 г. изучал физику, математику и астрономию. В 1813 г. ему были присуждены степени магистра и доктора, а также звание экстраординарного профессора. В 1814 г. Струве объявил курс комбинаторики (*Doctrina combinatoriam*). В 1816—1820 гг. он несколько раз читал курсы начал математики, дифференциального исчисления, высшей геометрии по «Введению в анализ» Эйлера.

Первым преподавателем одной лишь математики в университете был уроженец Курляндии и воспитанник Дерптского университета И. М. Гаусман (1783—1864). Степень доктора философии он получил в Кенигсбергском университете. Гаусман вел недолго курсы начал математики. Затем учительствовал в Киеве, Риге и Митаве.

В 1820 г. кафедра чистой и прикладной математики была разделена на две: чистой математики и астрономии. Первым ординарным про-

фессором астрономии университета был В. Я. Струве, продолжавший вместе с тем до 1826 г. чтение математических курсов, главным образом практической геометрии, плоской и сферической тригонометрии, дифференциального и интегрального исчисления. Затем он полностью переключился на занятия астрономией и геодезией, читал содержательные и оригинальные курсы по теоретической и практической астрономии и по высшей геодезии. В 1816—1827 гг. осуществил расширенный план триангуляции Прибалтики. В 1822 г. был избран членом-корреспондентом, а позднее — ординарным академиком Петербургской академии наук. Струве основал Пулковскую обсерваторию и был ее директором.



М. Ф. Бартельс.

На кафедру чистой математики, включавшую, как и раньше, прикладную математику (механику), в качестве ее первого профессора был избран в 1820 г. учитель Гаусса по начальной школе М. Ф. Бартельс, профессор Казанского университета. В Дерпте Бартельс не нашел того увлечения студентов математикой, которое он наблюдал в Казанском университете. Для математических дисциплин в молодом Дерптском университете не всегда было достаточное количество подготовленных слушателей. Бартельс читал аналитическую геометрию, дифференциальное и интегральное исчисления (продолжая пользоваться руководством Лакруа), механику и небесную механику.

Научная деятельность в Дерптском университете в течение первых двух десятилетий его существования была довольно значительной в области астрономии и малозаметной в области математики. Бартельс прибыл в Дерпт уже зрелым ученым и опытным преподавателем и вскоре поднял преподавание математики на высоту, соответствовавшую уровню науки того времени. Научные стремления и достижения Бартельса в Дерпте большей частью фиксированы в трудах его учеников (см. гл. III). Работы самого Бартельса, не считая переводов, выполненных еще до приезда в Россию, все были опубликованы в дерптский период его деятельности. Первыми вышли из печати «Четыре рассуждения по теории аналитических функций» (1822 г.) на латинском языке. Эта работа состоит из четырех частей. В первой рассматриваются представления обратных круговых и гиперболических функций в виде бесконечных произведений и рядов, во второй — разложения в ряды тригонометрических и логарифмических функций, в третьей — вводится понятие производной и развивается необходимый для этого аппарат. Четвертая часть посвящена изучению кривых и поверхностей второго порядка, их свойств и методов упрощения их уравнений. Здесь же

излагаются вопросы о касательных к кривым, радиусе кривизны, касательной плоскости и нормали в случаях задания неявными функциями. Последний раздел написан в духе Эйлера. Материал четвертой части особенно привлекал внимание Бартельса, и дальнейшие исследования привели его к некоторым оригинальным результатам в теории пространственных кривых.

В журнале Петербургской академии наук напечатана статья Бартельса, в которой кратко рассмотрены основные формулы геометрии трех измерений ⁴⁷. Она не давала каких-либо существенно новых в научном отношении результатов. Заслуживает внимания скорее метод их получения. Материал названной статьи Бартельса, а также одной из двух других его статей по этим же вопросам, представленных Петербургской академии наук, но оставшихся ненапечатанными, включен в первую часть его курса лекций по математическому анализу, отражавшего его двадцатипятилетний опыт преподавания в Казанском и Дерптском университетах (напечатан только первый том на немецком языке, 1833 г.). Эта книга написана на высоком научном уровне. Ее полное название «Лекции по математическому анализу с приложениями к геометрии, механике и учению о вероятностях» свидетельствует о том, что в последующих двух томах кроме собственно анализа Бартельс намеревался изложить его применения. Однако он написал лишь первую лекцию второго тома, в которой изложил на основе теории пределов дифференциальное исчисление до вывода формулы Тейлора. Она была посмертно издана (1837 г.) В. Я. Струве и присоединена к первому тому.

Дерптский университет времен Струве и Бартельса был важным центром культивирования точных наук в России. В 1828 г. при нем был открыт Профессорский институт. Многие лица, окончившие русские университеты, были направлены в институт для усовершенствования в науках и приобретения ученых степеней. Немалая заслуга в этом члена-корреспондента Петербургской академии наук (с 1826 г.) Бартельса. Он подготовил почву, на которой в дальнейшем была развернута значительная творческая научная работа в Дерптском университете, особенно в области геометрии и механики.

8

Математика в Виленском университете

Виленский (ныне Вильнюсский) университет ведет свое начало от иезуитской академии, основанной в 1579 г. В 1780 г. академия была преобразована в Главную литовскую школу, переименованную в 1797 г. в Главную виленскую школу. На базе последней в 1803 г. и был создан Виленский университет. Препо-

⁴⁷ B a r t e l s. Aperçu abrégé des formules fondamentales de la géométrie à trois dimensions. — Mém. présentés à l'Acad. des Sci. par divers savants, 1831, t. 1, p. 77—95.



Виленский университет (начало XIX в.).

давание в нем велось в основном на польском языке, сменившем латинский.

Преподаванию естественных наук и математики в академии, а затем в Главной школе начали уделять серьезное внимание лишь со второй половины XVIII в. Основную роль в освобождении преподавания от средневековой схоластики сыграл ректор школы, известный астроном Мартин Почобут-Одляницкий. При Почобуте кроме астрономии, физики и других естественных наук преподавалась высшая чистая, прикладная, а также элементарная математика. В Главной виленской школе высшую чистую математику читал профессор Ф. Норвайша, прикладную — Т. Кундзич, элементарную — вице-профессор Т. Жицкий. Из них непосредственно продолжил преподавание в университете, заняв в нем кафедру высшей чистой математики, один лишь Норвайша. В своем преподавании как в Главной школе, так и в университете Норвайша неизменно следовал трудам Ньютона, которые он основательно

изучил в Англии. Основой курса высшей чистой математики, который он читал более 40 лет, был математический анализ — теория флюксий и флюент Ньютона. Вместе с тем в своих проспектах лекций Норвайша наряду с трактатами Ньютона называл сочинения Маклорена, Котеса, Клеро, Даламбера, Эйлера, Крамера и других ученых. Известно, что он писал работы по математике, однако опубликована была лишь программа его лекций.

Кафедра прикладной (высшей смешанной) математики при открытии университета оставалась вакантной. По совету Н. И. Фусса на эту кафедру был приглашен профессор механики и технологии из Эрлангена К. Х. Лангсдорф (1759—1834). Лангсдорф в 1804—1806 гг., до возвращения в Гейдельберг, где он некоторое время был ректором университета, преподавал в университете механику, технологию и алгебру. Курс его лекций по алгебре был в 1804 г. записан М. Полинским и хранится в рукописном фонде Вильнюсского университета. Лангсдорф интересовался вопросами обоснования дифференциального исчисления.

Видное место физико-математических наук в университете еще больше укрепилось после приглашения на пост ректора Яна Снядецкого (1756—1830), известного польского ученого, математика и астронома, прогрессивного деятеля просвещения в Польше. Благодаря ему и его брату профессору химии Андрею Снядецкому Виленский университет стал важным центром науки и культуры начала XIX в. В 1811 г. Я. Снядецкий был избран членом-корреспондентом Петербургской академии наук. В Вильно выходили сборники его сочинений, в одном из которых была напечатана широко известная его работа о Копернике. В философских сочинениях он выступал против идеалистической философии Канта. В Вильно же Снядецкий написал и издал (1817 г.) учебник по сферической тригонометрии, один из первых удачных учебников по этому предмету, который, как и его руководство по алгебре с приложениями к геометрии (1783 г.), долгое время и с большим успехом использовался в преподавании в университете.

Снядецкий считал совершенно необходимым преподавание в университете элементарной математики, для хорошей подготовки учителей гимназий по математике. В 1807 г. чтение курса элементарной математики было поручено экстраординарному (с 1810 г. — ординарный) профессору Т. Жицкому. Двухлетний курс Жицкого охватывал арифметику, элементарную геометрию, тригонометрию, а также алгебру, высшую и аналитическую геометрию (как введение к анализу бесконечно малых). Алгебру Жицкий читал по Снядецкому, элементарную геометрию — по Евклиду, отступление от которого Снядецкий считал недопустимым.

Преемником Норвайши был его ученик Захар Немчевский (1766—1820) из Жмуди (Литва). Он окончил Главную школу, в 1788 г. получил степень доктора философии, затем преподавал (с 1797 г. — вице-профессор высшей смешанной математики Главной школы), а в 1802—1808 г. совершенствовался в математике за границей, в основном в Париже. По возвращении из-за границы Немчевский был назначен на должность

профессора высшей смешанной математики в Виленском университете. Читал также курс чистой математики. Вместо курса Норвайши он начал читать курс дифференциального и интегрального исчисления, отражавший новые веяния как в самой математике, так и в системе ее изложения. В основу разработанной им программы преподавания полного курса математики было положено соответствующее руководство Лакруа. В своих лекциях Немчевский излагал правила дифференцирования функций с одной и многими переменными с применениями к нахождению экстремумов функций одной и двух переменных (а также к исследованию кривых линий высших порядков), интегрирование алгебраических и трансцендентных функций, вопросы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений любого порядка, включая особые решения, а также уравнений в частных производных, вариационное исчисление и основанный на анализе курс механики. Он поставил преподавание математического анализа и механики по образцу Парижской политехнической школы. Как опытный профессор, Немчевский имел большое влияние на своих последователей. Курсы математики читались в основном по разработанной им программе. Их читали воспитанники университета А. Вырвич и М. Полинский.

Антон Вырвич (1791—1865) окончил в 1811 г. Виленский университет. В 1817 г. получил степень доктора философии, а в 1826 г. — звание ординарного профессора чистой математики. В 1817 г. к нему перешла часть курса Жицкого, с уходом которого в 1816 г. в отставку прекратила существование кафедра элементарной математики. Вырвич продолжал чтение алгебры с применением к кривым линиям по Снядецкому. Вопросы же аналитической геометрии он преподавал, следуя французским ученым. Вырвич — автор нескольких учебников для начальной и средней школы по элементарной математике, пособия по началам аналитической геометрии (1829—1830 гг.). Он писал также статьи по физике. В 1819—1822 гг. Вырвич преподавал астрономию со сферической тригонометрией, лекции по алгебре были переданы М. Полинскому. С 1823 г. алгебру снова преподавал Вырвич, а аналитическую геометрию с 1824 г. — Полинский. Кроме высшей алгебры Вырвич читал дифференциальное и интегральное исчисления, Полинский же, как преемник Немчевского по кафедре высшей смешанной математики, постоянно преподавал механику. С 1822 г. его курсом была аналитическая механика, которую он читал по сочинениям Пуассона, Прони, Лагранжа. Практическую механику читал В. Горский.

Михаил Модестович Полинский-Пелка (1784—1848) после окончания Виленского университета совершенствовался в математических науках за границей. В 1816 г., будучи учителем математики Виленской гимназии, получил степень доктора философии за работу по геодезии, курс которой впоследствии читал в университете. В этом же году Полинский издал книгу о началах плоской тригонометрии, второе (1821 г.) и третье (1828 г.) издания которой он дополнил таблицами логарифмов и тригонометрических функций. Им также напечатано несколько статей по физике. В обширном рукописном наследии Полинского много работ по вопросам преподавания математики, в которых, в частности, он раз-

вивает идеи Снядецкого. Некоторые рукописи свидетельствуют о том, что Полинский вел также исследовательскую работу по математике. Например, он оригинально, применяя тригонометрию, подходил к изучению конических сечений. Начиная с 1823 г. Полинский несколько раз избирался деканом и в последнее десятилетие существования университета занимал ведущее положение на отделении физических и математических наук.

Своим воспитанникам И. Румбовичу (1798—1838) и З. Ревковскому (1807—1893) университет обязан дальнейшим расширением преподавания математики. Первый читал самостоятельный курс начертательной геометрии, введенный в 1822 г., второй с 1830 г. — теорию вероятностей. О целесообразности введения этих курсов неоднократно говорил Я. Снядецкий. Так число преподавателей математических предметов в университете возросло сначала до трех, затем до четырех.

Ипполит Румбович с 1821 г. начал преподавать в университете топографию. Он хорошо знал математику и архитектуру. В конце 1824 г. был утвержден адъюнктом, а двумя годами позже — магистром философии. Его лекции пользовались успехом у слушателей.

Весьма способным выпускником Виленского университета был Зигмунд Ревковский. В 1828 г. он успешно сдал магистерские экзамены и защитил магистерскую диссертацию. В этом же году издал свой очерк об исчислении вероятностей⁴⁸. Ревковский предложил читать курс теории вероятностей и представил составленную им программу, охватившую как теоретические начала теории вероятностей, так и разнообразные практические ее приложения. Программа была одобрена М. В. Остроградским. По курсу «Начала исчисления вероятностей» Ревковский в соответствии со своей программой очень старательно составил пособие, оставшееся в рукописи. Успешно начатая математическая деятельность Ревковского не успела принести ему славы ученого: за участие в польском восстании 1830—1831 гг. он был сослан на Кавказ. На склоне лет Ревковский разработал математическую теорию наиболее экономной организации производства на отдельных предприятиях и в государстве в целом.

По имеющимся данным, с 1800 по 1832 г. в Вильно вышла из печати 61 работа математического содержания. Однако среди них не обнаружены исследования с новыми математическими результатами. Это учебные пособия, статьи методического, методологического, критикобиблиографического характера. Последние большей частью печатались в местном периодическом издании «Dziennik Wileński».

В течение рассматриваемого периода в Виленском университете значительно возрос удельный вес физико-математических наук. Однако в 1832 г. в связи с подавлением польского восстания университет был закрыт.

⁴⁸ Z. R e w k o w s k i. O początkach i wroście rachunków prawdopodobieństw. Wilno, 1828.

Математика во Львовском университете

В 1805 г. Львовский университет был переведен в Краков и слит с местным университетом. Во Львове остался лишь лицей — среднее учебное заведение. Только в 1817 г. лицей был преобразован в университет для Галиции. Математические науки преподавались на философском факультете. В австрийских университетах этот факультет вплоть до 1848 г. носил характер средней школы, служил подготовительной ступенью для последующих занятий на теологическом, юридическом и медицинском факультетах. Занятия первоначально проводились в течение двух, затем трех лет. На первом году обучения читалась чистая математика, на втором — прикладная математика, на третьем — практическая геометрия (геодезия), причем долгое время преподавание ограничивалось элементарным курсом.

С 1787 г. математику в университете читал Франтишек Кодеш. Он хорошо знал свой предмет. Читал его, не отступая от установленной программы, в рамках предписанных учебников (пособия Х. Вольфа по чистой математике ⁴⁹, неоднократно переиздававшиеся, и А. Кестнера — по прикладной ⁵⁰). Большое внимание уделял практической математике, знакомил студентов с инструментами, проводил в поле практические занятия по геодезии.

В отсутствие Кодеша все преподавание математики поручалось Яну Гольфельду, который несколько лет занимал в университете кафедру практической геометрии. Как опытный землемер, Гольфельд принимал участие в работах по триангуляции и картографированию Западной Галиции.

С 1817 г. во Львовском университете математику снова преподавал Кодеш. Он написал руководство по чистой математике, изданное в 1818—1820 гг. в двух томах на латинском языке ⁵¹. Курс Кодеша почти не выходил за пределы начал математики. В первом томе изложены арифметика и алгебра на уровне устаревших учебников, во втором — геометрия (элементарные сведения о плоских геометрических фигурах и о телах, в том числе вычисление площадей и объемов, тригонометрия с приложениями и аналитическая геометрия на плоскости; понятие функции Кодеш даже не определяет). Кроме руководства по математике Кодеш написал две небольшие статьи по «политической арифметике» — об исчислении процентов и о вычислении их при изменении сроков платежа, а также несколько статей по геодезии, в частности об определении широты города Львова.

Таким образом, в положении преподавания математики во Львовском университете первых десятилетий XIX в. заметных изменений по сравнению с концом XVIII в. не произошло.

⁴⁹ C. F. Wolff. *Elementa matheseos purae*. T. 1—5, 1713—1741.

⁵⁰ A. G. Kästner. *Anfangsgründe der angewandten Mathematik*. Bd 1, 2. Göttingen, 1792.

⁵¹ Fr. Kodesch. *Elementa matheseos purae ad usum juventutis Galicianae*. T. 1, 1818. T. 2, 1820.

Преподавание математики в средней школе и учебная литература

Основным средним учебным заведением в России с начала XIX в. была гимназия. Ее назначением, как и ранее существовавших главных народных училищ, являлась подготовка воспитанников к продолжению образования в университетах, а также для гражданской и военной службы. Преподавание было многопредметным, вследствие чего учащиеся получали поверхностные знания. За четыре года обучения в гимназиях они едва успевали изучить только общие основы большого количества наук, в том числе «математики чистой и прикладной и опытной физики». С 1819 г. во всех гимназиях усиливается преподавание древних языков, сокращается объем преподавания естественных наук, исключаются из программ экономические и некоторые другие науки. Для того чтобы сделать гимназии узкословными, отделить их от ранее преемственно связанных с ними уездных училищ, вводится семилетний срок обучения.

Согласно училищному уставу 1804 г., в гимназиях следовало кроме «арифметики и начальной (прямолинейной) геометрии с плоской тригонометрией» преподавать также «алгебру до уравнений третьей степени, с приложением к геометрии и коническим сечениям». Однако большей частью преподавали дополнительно только «начальную алгебру». В связи с этим в университетах приходилось доучивать поступающих и пополнять их знания по началам математики.

В качестве руководства по математике для гимназий первоначально были одобрены «Начальные основания математики» А. Г. Кестнера, изданные в русском переводе (1792—1794 гг.) для главных народных училищ. Они охватывали все части математики, преподававшиеся в гимназии. В 1805 г. взамен переводного руководства Кестнера был одобрен «Курс математики» Т. Ф. Осиповского. Высокие научные и методические достоинства этого курса позволили использовать его не только в университетах, но и в гимназиях, где он изучался в сокращенном виде. «Курс математики» Осиповского оставался основным руководством по математике для гимназий до 1812 г., хотя по объему он значительно превышал их потребности.

Подготовка специально приспособленного к гимназическому курсу руководства была поручена Н. И. Фуссу. Как член ученого комитета Министерства народного просвещения со времени его основания, Фусс постоянно оказывал значительное влияние на постановку преподавания математики. Переработав ранее опубликованные им пособия по отдельным разделам математики, он издал упомянутые уже ранее «Начальные основания чистой математики», ставшие с 1814 г. основным руководством для гимназий. Соответственно руководству Фусса, содержащему изложение начальных оснований алгебры и геометрии, приложений алгебры к геометрии, плоской тригонометрии, конических сечений и оснований дифференциального и интегрального исчисления,

был определен объем и характер гимназического курса математики. В этот курс входила также арифметика, в качестве пособия по которой для гимназий в 1812 г. была одобрена «Арифметика» Лакруа в переводе Ф. И. Петрушевского. С 1819 г. из курса математики для гимназий были исключены основания дифференциального и интегрального исчислений. Руководство Фусса, небольшое по объему, отличающееся сжатостью и доступностью изложения материала, с объяснениями и доказательствами, приспособленными к возрасту учащихся, широко использовалось в практике преподавания.

ГЛАВА ВТОРАЯ

НАУЧНАЯ И ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ М. В. Остроградского и В. Я. Буняковского

М. В. Остроградский

1

Жизненный путь

Михаил Васильевич Остроградский родился 24(12) сентября 1801 г. в деревне Пашенной Кобелякского уезда на Полтавщине, в небогатой украинской дворянской семье. Первоначальное образование получил в Полтавской гимназии. Летом 1816 г. был определен вольнослушателем в Харьковский университет. К поступлению в университет его подготовил адъюнкт военных наук М. К. Робуш. В начале 1818 г. на математические способности Остроградского обратил внимание А. Ф. Павловский. По его свидетельству, через три месяца занятий «Остроградский был уже в состоянии упрощать самые трудные и сложные математические формулы». Благодаря усиленным занятиям он в этом же году успешно сдал экзамены университетского курса.

Пробыв год в деревне у отца, Остроградский вернулся в университет с целью «усовершенствования себя по части наук, относящихся к прикладной математике». Большое влияние на научное образование Остроградского, развитие его блестящего математического таланта и выработку его общего мировоззрения оказал Т. Ф. Осиповский. Расправа реакционных сил с Осиповским отразилась и на лучшем его ученике. Остроградский был обвинен в «проявлении признаков безбожия», и ему, несмотря на представление к производству в степень кандидата, а также на то, что он дважды сдал с успехом все положенные экзамены, было отказано даже в выдаче свидетельства об окончании университета. Летом 1822 г. он уехал в Париж для совершенствования в полюбившейся ему науке. Слушал по математическим предметам лекции в университете и Collège de France. Непосредственное общение Остроградского с крупными французскими учеными — Коши, Пуассоном, Пуансо, Фурье и другими — намного расширило его математический кругозор. Выдающиеся французские математики высоко оценили первые шаги Остроградского в науке. О его результатах Коши несколько раз упоминал в своих трудах. Доложенная в ноябре 1826 г. Парижской академии наук работа Остроградского была со временем



М. В. Остроградский.

напечатана в специальном академическом издании¹. Работа посвящена изучению распространения волн в цилиндрическом сосуде. Остроградский дал свой вывод основных уравнений задачи и впервые исследовал вопрос о колебаниях жидкости конечной глубины и ограниченной стенками сосуда.

В Петербурге Остроградский сразу получил заслуженную известность. 17 декабря 1828 г. он был избран адъюнктом Академии наук по прикладной математике. Так началась деятельность Остроградского в Петербургской академии наук. Он выступал на заседаниях академии с сообщениями о своих работах, готовил их к опубликованию, участво-

¹ В 1959—1961 гг. Академией наук СССР было издано «Полное собрание трудов» (далее — Полн. собр. тр.) М. В. Остроградского (в трех томах, под ред. И. З. Штокало, на русском языке). В первом томе помещены работы по математической физике, во втором — по механике, в третьем — по математическому анализу. Далее ссылки даны на это издание. Упомянутую работу см. в т. 1, стр. 7—22.

вал в работе различных ее комиссий, писал отзывы на поступавшие сочинения. В это же время Остроградский начал преподавательскую деятельность, сначала, с осени 1828 г., в офицерских классах Морского кадетского корпуса, затем в Институте корпуса инженеров путей сообщения, Главном педагогическом институте и других учебных заведениях. Большой успех имели также публичные курсы лекций Остроградского. Широкую известность получили его курс небесной механики², а также учебные пособия по аналитической механике (1836 г.) и высшей алгебре (1837 г.). Всей своей деятельностью Остроградский способствовал подъему математического просвещения в стране.

Значительное количество важных научных работ, представленных Остроградским Петербургской академии наук в 1828—1830 гг., и блестяще прочитанный курс лекций по небесной механике упрочили его положение как крупного математика и механика. 11 августа 1830 г. он был избран экстраординарным, а 21 декабря этого же года — ординарным академиком. Благодаря ему установились научные связи отечественных математиков с учеными Франции, в то время мирового центра математического творчества.

После опубликования блестящего цикла работ по математической физике (конец 20-х — начало 30-х годов) в 30—40-х годах появились замечательные работы Остроградского по математическому анализу, за ними последовали его глубокие исследования в области аналитической механики. Во всех этих направлениях он достиг результатов первостепенной важности. Научные заслуги Остроградского получают широкое признание за рубежом. Его избирают членом Американской (в Бостоне, 1834 г.), Туринской (1841 г.) и Римской (1853 г.) академий, членом-корреспондентом Парижской академии наук (1856 г.). В Петербургской академии наук Остроградский был академиком по прикладной (до 1855 г.), а затем чистой математике. В 50-е годы его внимание все больше привлекают вопросы преподавания.

Умер М. В. Остроградский 1 января 1862 г. (20 декабря 1861 г.) у себя на родине.

2

Исследования по математической физике

Свою научную деятельность М. В. Остроградский вначале сосредоточил в области математической физики. Его исследования в этом направлении относятся в основном к периоду, когда математическая физика переживала крутой подъем, связанный с деятельностью Фурье, Коши, Пуассона, Навье, Ампера, Грина, Гаусса. В это, как писал В. А. Стеклов, «редкое счастливое время, когда чуть не каждый день обогащал мир новыми идеями, новыми открытиями

² М. А. Ostrograski. Cours de Mécanique Céleste. St-P., 1831.

Курс записан и подготовлен к изданию с участием Остроградского его слушателем И. Янушевским, капитаном Корпуса инженеров путей сообщения.

в области математической физики и вместе с тем математического анализа»³, важнейшие разделы математической физики, а именно гидродинамику, теорию потенциала, теорию теплопроводности, теорию упругости, успешно разрабатывал в своих работах и М. В. Остроградский.

В работе, представленной Парижской академии наук в 1826 г. и опубликованной ею в 1832 г., Остроградский вывел систему уравнений теории волн малой амплитуды на поверхности тяжелой идеальной несжимаемой жидкости

$$\frac{du}{dt} = g \frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{dv}{dt} = g \frac{d\varphi}{dy}, \quad \frac{dw}{dt} = g \frac{d\varphi}{dz},$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0$$

и проинтегрировал ее для случая прямого кругового цилиндрического сосуда при соответствующих краевых и нулевом начальном условиях⁴. Для величины φ , удовлетворяющей уравнению Лапласа, после перехода к полярным координатам с использованием представления φ в виде тригонометрического ряда, приводящего к своеобразному разделению переменных, получено выражение в виде ряда по цилиндрическим функциям. Подобного рода разложения встречались ранее у Фурье в «Аналитической теории теплоты» (1822 г.). В дальнейшем они в весьма общем виде стали предметом специального изучения в работах Дини (с 1880 г.), впервые исследовавшего условия их сходимости. Остроградский своим путем получил решение уравнения цилиндрических функций (уравнения Бесселя) в виде $\gamma^n \int_0^\pi \sin^{-2n} b \cos(\theta \gamma \cos b) db$

(γ — независимая переменная, n , θ — параметры; в современных обозначениях это с точностью до постоянного множителя — $I_n(\theta\gamma)$). Иным путем такое решение ранее было уже найдено Пуассоном (1823 г.). Остроградский сообщил 16 сентября 1829 г. Петербургской академии наук о решении им более общей задачи, для случая сосуда, имеющего форму цилиндрического сектора. В этом исследовании он не мог обойтись без введения (в виде обобщенного интеграла Пуассона) цилиндрических функций нецелого положительного порядка. Оно, как и ряд других (краткие сведения о которых приведены в научном бюллетене Академии наук), не было напечатано и до сих пор в полном виде остается неизвестным.

Первой работой Остроградского, представленной Петербургской академии наук, была «Заметка об интеграле, который встречается при исчислении притяжения сфероидов» (1828, 1831 г.). Ее, а также вторую заметку по теории потенциала выгодно отличает от соответствующих работ Пуассона новизна в подходе к рассматриваемому вопросу, простота рассуждений.

³ П. Трипольский. Михаил Васильевич Остроградский. Празднование столетия дня его рождения. Полтава, 1902, стр. 123.

⁴ У Остроградского φ означает частную производную потенциала скоростей по времени, деленную на ускорение силы тяжести g . Во всех его работах частные производные обозначены $\frac{d}{dt}$ и т. п.

Особенно богаты важными для математической физики идеями две заметки Остроградского по теории теплоты, разработка которой связана с основополагающим трудом Фурье «Аналитическая теория теплоты», прежде всего первая из них — «Заметка о теории теплоты». В самом начале Остроградский устанавливает важнейшую в теории кратных интегралов формулу преобразования объемного интеграла в интеграл по поверхности, ограничивающей этот объем:

$$\int \left(\frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} \right) \omega = \int (P \cos \lambda + Q \cos \mu + R \cos \nu) s.$$

Как частный случай этой формулы он получает формулу, которая может быть записана в виде

$$\begin{aligned} & \iiint_{(T)} [u' L(u) - u M(u')] d\tau = \\ & = \iint_{(S)} (\cos \lambda \cdot f_1 + \cos \mu \cdot f_2 + \cos \nu \cdot f_3) u u' ds \end{aligned}$$

и теперь обычно называется формулой Грина для произвольных сопряженных линейных дифференциальных операторов, хотя Грин вывел такую формулу лишь для оператора Лапласа. У Остроградского линейный дифференциальный оператор обозначен через $f(\alpha, \beta, \gamma) u$, где α, β, γ — знаки частного дифференцирования по x, y, z соответственно, $f(\alpha, \beta, \gamma)$ — целая рациональная функция своих аргументов. Для уравнения $[f(\alpha, \beta, \gamma) - \phi] u = 0$, где ϕ — параметр (как сопряженное ему берется уравнение $[f(-\alpha', -\beta', -\gamma') - \phi'] u' = 0$), он рассматривает общую краевую задачу, иными словами, в общем виде впервые ставит в трехмерном пространстве краевую задачу математической физики на собственные значения и собственные функции, особо отмечая ортогональность собственных функций исходной и сопряженной краевых задач.

Общую схему решения задач математической физики с использованием метода разделения переменных Остроградский конкретизирует на примере полученного Фурье уравнения теплопроводности

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2}$$

для случая твердого выпуклого, ограниченного поверхностью без особых точек и линий тела — сфероида, как выражались в то время. При этом предполагается, что на поверхности сфероида

$$\frac{dv}{dx} \cos \lambda + \frac{dv}{dy} \cos \mu + \frac{dv}{dz} \cos \nu + h v = 0$$

(λ, μ, ν — углы, образованные внешней нормалью к поверхности с осями координат, h — постоянная), а при $t = 0$, $v = f(x, y, z)$. Положив $v = e^{-\phi^2 t} u$, Остроградский приходит к задаче нахождения ненулевых решений уравнения

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} + \phi^2 u = 0$$

при указанном краевом условии. В результате он придает должную общность методу разделения переменных, который был введен Фурье и применялся им, а затем Пуассоном лишь при рассмотрении отдельных конкретных задач (для шара, цилиндра, куба, прямоугольного параллелепипеда) и приводил к разложениям по синусам и косинусам, цилиндрическим и сферическим функциям (Фурье, Пуассон, другим методом — Лаплас). Записав решение смешанной задачи в указанном случае в виде ряда и положив в нем $t = 0$, Остроградский для произвольной функции $f(x, y, z)$, задающей начальные условия, получает

$$f(x, y, z) = \Sigma \frac{u \int f(x, y, z) u' \omega}{\int uu' \omega}$$

и далее пишет, что, по его мнению, последний ряд «всегда сходится, но доказать это замечательное свойство в общем случае очень трудно». Доказательство этого утверждения при определенных условиях — важнейшее достижение математической физики конца прошлого — начала нынешнего века, во времена Остроградского для него не было необходимой базы. Для частного же случая тригонометрических рядов $\Sigma(A_n \cos nx + B_n \sin nx)$, которые широко использовал Фурье, Остроградский намечает доказательство их сходимости, основная идея которого такая же, как и в известном доказательстве Дирихле, приведенном в специально посвященных этому вопросу работах (1829, 1837 гг.). Он раньше Лобачевского (1834 г.) и задолго до Римана (1853 г.) приводит принцип локализации тригонометрических рядов, связываемый ныне часто лишь с именем Римана. Подробнее этот принцип Остроградский изложил в девятой лекции курса небесной механики, где отметил и свой приоритет в этом вопросе⁵. Интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a) \sin \frac{x-a}{\varepsilon}}{\sin \frac{x-a}{2}} da \quad \left(\varepsilon = \frac{1}{2n-1} \right),$$

использованный им при этом, положен в основу современного доказательства принципа локализации. Результаты, полученные Остроградским в его первой заметке по теории теплоты, занимают ведущее место в современной учебной литературе. Меньшую роль в ней играет основной результат второй его заметки по теории теплоты, в которой неоднородная краевая задача для уравнения теплопроводности естественным путем впервые сводится к однородной краевой задаче.

К вопросам распространения тепла в твердых телах относится также решение Остроградским задачи для прямой треугольной призмы с основанием в виде прямоугольного равнобедренного треугольника. Оно появилось в статье Ламе о распространении тепла в многогранниках, представленной Парижской академии наук в 1829 г. и опубликованной

⁵ М. В. Остроградский. Заметка по теории теплоты. — В кн.: М. В. Остроградский. Полн. собр. тр. Т. 1, стр. 68; Курс небесной механики. — Там же, стр. 204—207.

Table pour les 120 000 m				195	
120 000				1000000 m	
120 000	120 000	120 000	120 000	(Les données sont les mêmes)	
120 000	120 000	120 000	120 000	Elles sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	1. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	2. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	3. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	4. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	5. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	6. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	7. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	8. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	9. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	10. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	11. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	12. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	13. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	14. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	15. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	16. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	17. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	18. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	19. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	20. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	21. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	22. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	23. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	24. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	25. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	26. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	27. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	28. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	29. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	30. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	31. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	32. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	33. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	34. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	35. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	36. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	37. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	38. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	39. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	40. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	41. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	42. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	43. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	44. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	45. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	46. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	47. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	48. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	49. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	50. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	51. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	52. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	53. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	54. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	55. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	56. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	57. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	58. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	59. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	60. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	61. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	62. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	63. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	64. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	65. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	66. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	67. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	68. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	69. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	70. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	71. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	72. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	73. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	74. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	75. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	76. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	77. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	78. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	79. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	80. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	81. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	82. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	83. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	84. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	85. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	86. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	87. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	88. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	89. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	90. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	91. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	92. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	93. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	94. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	95. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	96. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	97. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	98. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	99. Les données sont les mêmes	
120 000	120 000	120 000	120 000	100. Les données sont les mêmes	

Страница рукописи М. В. Остроградского.

в 1833 г., а затем было включено Ламе в курс лекций по аналитической теории тепла. Ламе расценил это решение как существенный шаг вперед и сам рассмотрел случай основания в виде равностороннего треугольника. Непосредственный практический интерес представляло изучение Остроградским распространения тепла внутри земли. Это исследование (оно примыкает ко второй заметке по теории теплоты) утеряно.

В двух других работах по теории теплоты Остроградский выводит уравнения распространения тепла в жидкостях (первая — 1831, вторая — 1838 г.). Во второй из них он, используя свою интегральную формулу, выводит уравнение

$$\begin{aligned} \frac{d(k\theta)}{dt} + \frac{d(k\theta u)}{dx} + \frac{d(k\theta v)}{dy} + \frac{d(k\theta w)}{dz} = \\ = \frac{d\left(K \frac{d\theta}{dx}\right)}{dx} + \frac{d\left(K \frac{d\theta}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(K \frac{d\theta}{dz}\right)}{dz}, \end{aligned}$$

которое при постоянном k превращается в уравнение Фурье для распространения тепла в жидкостях. По словам В. А. Стеклова, «это самый изящный, строгий и простой метод»⁶, вошедший в употребление после

⁶ П. Трипольский. Михаил Васильевич Остроградский, стр. 126.

исследований Г. Р. Кирхгофа и К. Ф. Неймана ⁷. Интегральная формула Остроградского получила разнообразнейшие применения в точном естествознании.

Остроградским получено также уточненное, по сравнению с данным Фурье, уравнение распространения тепла в твердом теле

$$C \frac{du}{dt} = K_1 \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right) + K_2 \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right)^2 + \dots$$

$$\dots + K_n \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2} \right)^n + \dots$$

(степени понимаются символически, после раскрытия скобок заменяются соответствующими указателями дифференцирования) с соответственно уточненным краевым условием. Этот результат Остроградского впервые был опубликован Буняковским (1839 г.) ⁸.

Успешно выступил Остроградский и в решении задач теории упругости. В двух работах он проводит интегрирование уравнений в частных производных, относящихся к малым колебаниям упругих тел (1831, 1833 гг.), а именно уравнений Навье, полученных также Пуассоном, для которых решается задача с начальными условиями. Обобщив метод, предложенный Коши для одного линейного уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами (1823 г.), на случай системы таких же уравнений, Остроградский получил решение в виде интегралов Фурье. Этим же занимался Пуассон. Исследования Остроградского и Пуассона способствовали развитию общей теории уравнений в частных производных и, как отметил В. А. Стеклов, наряду с другими привели Коши (1839 г.) «к замечательному обобщению задачи, известному теперь под именем задачи Коши» ⁹.

Таким образом, математическая физика обязана Остроградскому решением новых и важных для того времени задач, новыми идеями и методами исследования, ставшими ее неотъемлемой частью, более высокой, чем у его предшественников, точностью и строгостью рассуждений. Остроградский как один из создателей математической физики получил мировое признание.

3

Работы в области математического анализа

С исследованиями Остроградского по математической физике тесно переплетаются его работы в области математического анализа. Первой по времени опубликования его статьей яв-

⁷ Кирхгофу принадлежит вывод уравнения распространения тепла с учетом вязкости жидкости (опубликован в 1894 г.), обобщающего приведенное уравнение Остроградского и, естественно, его частный случай, соответствующий постоянному k , — уравнение Фурье, равносильное уравнению, полученному Остроградским в первой из упомянутых его работ.

⁸ В. Я. Бу н я к о в с к и й. Лексикон чистой и прикладной математики. Т. 1. СПб, 1839, стр. 176—180.

⁹ П. Т р и н о л ь с к и й. Михаил Васильевич Остроградский, стр. 126.

ляется «Заметка о различных вопросах анализа» (1830 г.). В ней оригинально установлены свойства сферических многочленов, рассмотренных в несколько обобщенном виде, и предложен метод разложения функций двух переменных по сферическим функциям, удовлетворяющим уравнению

$$\frac{1}{\sin q} \cdot \frac{d \left(\sin \frac{dY}{dq} \right)}{dq} + \frac{1}{\sin^2 q} \cdot \frac{d^2 Y}{dp^2} + n(n+1)Y = 0.$$

О важных результатах Остроградского по анализу упоминалось также при рассмотрении его работ по математической физике.

Непосредственно вопросам анализа посвящена работа Остроградского «Заметка об определенных интегралах» (1831 г.). Она касается установленного Коши факта изменения результата интегрирования при изменении порядка интеграций в несобственных двойных интегралах и, по-видимому, относится к парижскому периоду жизни Остроградского. Основным результатом работы является формула

$$\Delta = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [f(a + \varepsilon x, b + \varepsilon y) - f(a + \varepsilon y, b + \varepsilon x)] \varepsilon^2 dy dx,$$

где

$$\int_{x_0}^X \int_{y_0}^Y f(x, y) dy dx = \int_{y_0}^Y \int_{x_0}^X f(x, y) dx dy + \Delta$$

и $f(x, y)$ становится бесконечной при значениях $x = a$ и $y = b$, заключенных между x_0 и X , y_0 и Y соответственно. Используя приведенную формулу, Остроградский очень просто устанавливает формулу

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^X [f(x + Y \sqrt{-1}) - f(x + y_0 \sqrt{-1})] dx = \\ & = \sqrt{-1} \int_{y_0}^Y [f(X + y \sqrt{-1}) - f(x_0 + y \sqrt{-1})] dy - \\ & \quad - 2\pi \sqrt{-1} \cdot \frac{d^{n-1} \varepsilon^n f(a + b \sqrt{-1} + \varepsilon)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) d\varepsilon^{n-1}}, \end{aligned}$$

которую раньше вывел (и дал ее многочисленные применения) Коши.

Он также получает новые результаты для случая $f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{F(x, y)}$ в предположении, что $F(x, y)$ вместе со своими частными производными первого порядка обращается в нуль при $x = a$ и $y = b$.

В 1833 г. появились работы Остроградского по интегрированию алгебраических функций. Внимание Остроградского прежде всего привлекает вопрос о том, в каком случае интеграл $z = \int \frac{f(x, y)}{F(x, y)} dx$, в котором $f(x, y)$ и $F(x, y)$ — многочлены x и y , причем y является алгебраической функцией x (удовлетворяет уравнению $y^n + A_1 y^{n-1} + A_2 y^{n-2} + \dots + A_{n-1} y + A_n = 0$ или $\psi(x, y) = 0$, коэффициенты которого являются многочленами x), выражается в виде алгебраической функ-

ции x . В этом же году указанный вопрос алгебраического интегрирования независимо от Остроградского изучал также Лиувилль. К этому времени был известен следующий результат Абеля: если для y , связанного каким-нибудь алгебраическим уравнением с x , $\int y dx$ может быть явно или неявно выражен при помощи алгебраических функций, то этот интеграл всегда можно считать равным рациональной функции x и y . Остроградский, используя теорию исключения, начинает с установления по существу равносильного этой теореме Абеля факта: если z есть алгебраическая функция x , то z есть рациональная функция x и y . Абель занимался вопросом об эффективном определении в общем случае такой функции в несколько иной постановке: либо ограничиваясь интегралами вида $\int \frac{p dx}{\sqrt{R}}$, где p и R — многочлены x , либо допуская в представлении интеграла алгебраической функции и логарифмы. Кроме того, основные относящиеся к этому вопросу результаты Абеля были опубликованы лишь в 1839 г.

Остроградский исследовал вопрос в его исходной постановке: наряду с выяснением условий алгебраичности z он дал в рассмотренных им случаях также метод получения интеграла, если последний выражается алгебраически. В результате с помощью конечного числа шагов либо рассматриваемый интеграл получается в готовом виде, либо устанавливается, что выразить его в виде алгебраической функции x невозможно. Подробно рассмотрен случай $\int \frac{L}{M} \cdot \frac{dx}{y}$, где $y^2 = R$, L и M — многочлены. Указано, что метод «без малейших трудностей» применим к интегралу $\int \left(\frac{L_1}{y^{n-1}} + \frac{L_2}{y^{n-2}} + \dots + \frac{L_{n-1}}{y} \right) dx$, в котором $L_1, L_2, \dots, L_{n-1}$ — многочлены x , y определяется уравнением $y^n = R$ с целым n (R — многочлен x), а при некоторых усложнениях приводит к цели также и в случае интеграла $\int (L_1 y^{n-1} + L_2 y^{n-2} + \dots + L_{n-1} y + L_n) dx$, в котором y определяется алгебраически уравнением $\psi(x, y) = 0$.

В следующей работе Остроградский выясняет, какую форму может принять интеграл $z = \int y dx$, если он допускает выражение в виде алгебраической функции x и величин $t_1 = \int y_1 dx, t_2 = \int y_2 dx, \dots, t_i = \int y_i dx$; при этом $y, y_1, y_2, \dots, y_i$ — алгебраические функции x . В заметке доказана теорема: $z = c_1 t_1 + c_2 t_2 + \dots + c_i t_i +$ рациональная функция $y_1, y_2, \dots, y_i, y$ и x , где $c_1, c_2, \dots, c_i$ — произвольные постоянные, иными словами, $\int (c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \dots + c_n y_n) dx$ есть рациональная функция $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ и x . Важное значение этой теоремы для теории интегрирования алгебраических функций несомненно, однако она, видимо, не была использована в дальнейшем. Работа Абеля, в которой дана эта теорема впервые, была опубликована, по всей вероятности, лишь в 1881 г.¹⁰, и заслугу установления теоремы

¹⁰ N. H. A b e l. Oeuvres Complètes. V. 2. Christiania, 1881, p. 206—216. Комментарий к этой работе см. в кн.: М. В. О с т р о г р а д с к и й. Полн. собр. тр. Т. 3, стр. 336—337.

следует разделить между обоими учеными, назвав последнюю теоремой Абеля — Остроградского. Остроградский внес заметный вклад в новую, открытую Абелем область исследования — теорию интегрирования алгебраических функций.

Одним из наиболее значительных исследований Остроградского по математическому анализу является его работа «Мемуар об исчислении вариаций кратных интегралов» (1834 г.). Для развития вариационного исчисления эта работа Остроградского имела важное значение. Заметную роль она сыграла и в развитии теории кратных интегралов, еще далекой тогда от своего завершения, но вместе с тем находившей все более широкие применения в механике и математической физике.

После разработки Эйлером и Лагранжем (середина XVIII в.) вариационного исчисления для функций одной независимой переменной естественно возникла необходимость распространить его на случай функций многих переменных. Для функций двух переменных первые шаги были сделаны Лагранжем (задача о минимальных поверхностях) и Эйлером (1770 г.), однако при определении вариации частных производных Эйлер столкнулся с трудностью, преодолеть которую удалось лишь в начале 30-х годов XIX в. Пуассону, получившему, наконец, для двойного интеграла с переменной границей области интегрирования правильную формулу:

$$\delta \int U dx dy = \int \left(\delta U + U \frac{d\delta x}{dx} + U \frac{d\delta y}{dy} \right) dx dy.$$

Для этого Пуассону пришлось рассматривать независимые переменные задачи как функции других, вспомогательных переменных. Из-за существенных затруднений при большем числе независимых переменных он не смог обобщить свою формулу на интегралы большей кратности. Исследование первой вариации интегралов любой кратности во всей его широте, и притом по Лагранжу, впервые было проведено Остроградским. Попутно он получил важнейшие формулы теории кратных интегралов, что позволяет его считать одним из творцов этой теории. Вариационное исчисление привлекало внимание Остроградского своими широкими применениями, особенно в механике.

Вопрос о вычислении вариаций частных производных Остроградский решает путем проникательного анализа в пользу Пуассона, отмечая, что предшественники Пуассона, «включая самого Эйлера, дифференцировали с характеристикой δ частные производные основной переменной не надлежащим образом». Получив формулы для вариаций производных произвольного порядка функции любого числа переменных, он переходит к задаче нахождения вариации кратного интеграла функции V от $u, x, y, z, \dots$ и от частных производных u относительно величин $x, y, z, \dots$, а именно $V = \int U dx dy dz \dots$, взятого для всех значений $x, y, z, \dots$, удовлетворяющих неравенству $L < 0$, где L — функция $x, y, z, \dots$, и устанавливает свою первую известную формулу

$$\delta V = \int \left[\frac{d(U\delta x)}{dx} + \frac{d(U\delta y)}{dy} + \frac{d(U\delta z)}{dz} + \dots \right] dx dy dz \dots + \int DU dx dy dz \dots;$$

$$\delta U = \frac{dU}{dx} \delta x + \frac{dU}{dy} \delta y + \frac{dU}{dz} \delta z + \dots + DU$$

(DU — чистая вариация подынтегральной функции U). При доказательстве этой формулы Остроградский вводит новые переменные $X, Y, Z, \dots$ и устанавливает формулу

$$dXdYdZ\dots = S\left(\frac{dX}{dx} \cdot \frac{dY}{dy} \cdot \frac{dZ}{dz} \dots\right) dx dy dz \dots,$$

в которой, в соответствии с введенным Коши обозначением для определителей, $S\left(\frac{dX}{dx} \cdot \frac{dY}{dy} \cdot \frac{dZ}{dz} \dots\right)$ означает определитель, составленный из соответствующих производных первого порядка функций $X, Y, Z, \dots$ по переменным $x, y, z, \dots$. К. Якоби совершенно аналогичную формулу в иной записи без доказательства опубликовал также в 1834 г. Следовательно, приоритет введения в математику функциональных определителей любого порядка Якоби по меньшей мере разделяет с Остроградским.

Далее Остроградский излагает сведение кратного интеграла, распространенного на произвольную область, определенную соотношением вида $L(x, y, z, \dots) \leq 0$, к повторному интегралу со всеми необходимыми принципиальными разъяснениями о расстановке пределов по каждой из последовательных переменных интегрирования. До этого соответствующее сведение лишь для интегралов второй и третьей кратности, допускающих непосредственно геометрическое истолкование, рассматривалось в работах Эйлера и Лагранжа, в которых также были впервые освещены вопросы замены переменных в таких интегралах (опубликованы в 70-х годах XVIII в.).

Используя такое сведение, Остроградский получил формулу

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy} + \frac{dR}{dz} + \dots \right) dx dy dz \dots = \\ = \int \frac{\left(P \frac{dL}{dx} + Q \frac{dL}{dy} + R \frac{dL}{dz} + \dots \right) ds}{\sqrt{\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \dots}}, \\ ds = \sqrt{dy^2 dz^2 \dots + dx^2 dz^2 \dots + \dots + dx^2 dy^2 \dots}, \end{aligned}$$

обобщающую на случай любого числа переменных полученную им ранее, в первой заметке по теории теплоты, формулу преобразования тройного интеграла, взятого по некоторому объему, в интеграл по поверхности, ограничивающей этот объем. Прийти к такому обобщению интегральной формулы было нелегко. Соответствующие представления геометрии многомерных пространств более или менее определенно начали складываться несколько позже (Грассман, 1844 г.).

Приведенная формула позволила Остроградскому получить вторую формулу для вариации кратного интеграла:

$$\delta V = \int \frac{U \delta L ds}{V \sqrt{\frac{dL^2}{dx^2} + \frac{dL^2}{dy^2} + \frac{dL^2}{dz^2} + \dots}} + \int DU dx dy dz \dots,$$

а также соотношение

$$\int DU dx dy dz \dots = \int W D u dx dy dz \dots + \int \Theta ds,$$

где функция W не содержит вариации Du , а Θ содержит эту вариацию и ее частные производные по $x, y, z, \dots$. Остроградский явно не записывает уравнение $W = 0$ (обобщенное уравнение Эйлера, или уравнение Эйлера — Остроградского), уравнение в частных производных, среди решений которого может находиться искомое решение $u = u(x, y, z, \dots)$ рассматриваемой вариационной задачи (определяющее минимальное или максимальное значение V), однако заключительные рассуждения работы, проведенные очень сжато, по существу связаны с выяснением краевых условий, которым должно удовлетворять требуемое решение уравнения $W = 0$. Непосредственным следствием второй формулы Остроградского для вариации кратного интеграла является формула дифференцирования по параметру исходного интеграла в случае, если и подынтегральное выражение и граница области интегрирования зависят от этого параметра.

К рассмотренной работе Остроградского примыкает его статья «О преобразовании переменных в кратных интегралах» (доложена в 1836 г., опубликована в 1838 г.). В ней он ограничивается случаем двойного интеграла. Выясняет причины неточности, допущенной Лагранжем, который следовал Эйлеру, и повторенной затем самим Остроградским в 1834 г. при формальном выводе формулы замены переменных в многократных интегралах. Впервые став на правильную геометрическую точку зрения и используя координатные линии по новым переменным, Остроградский дает четкую трактовку этого вопроса, в основном раскрывающую сущность преобразования переменных. Эта трактовка в дальнейшем вошла, и сохранилась поныне, в учебную литературу по интегральному исчислению. Рассуждения по этому вопросу он проводит и иначе, используя Эйлеров метод последовательного введения переменных, что позволяет распространить вывод на интегралы произвольной кратности. Такой вывод был проведен им, однако он сохранился только в рукописи; первыми опубликовали вывод в 1841 г. Котлан и Якоби.

К середине 30-х годов относятся работы Остроградского по теории вероятностей, известные по опубликованным извлечениям из них¹¹. Они связаны с уточнением и исправлением некоторых утверждений Лапласа в его «Аналитической теории вероятностей». Согласно Лапласу теория вероятностей есть в сущности не что иное, как здравый

¹¹ М. В. Остроградский. Извлечение из мемуара о вероятности судебных ошибок. — В кн.: М. В. Остроградский. Полн. собр. тр. Т. 3, стр. 65—70; Мемуар об исчислении производящих функций. — Там же, стр. 106—108.

смысл, выраженный в числах. Остроградский высоко ценил эту науку и рекомендовал ввести ее в преподавание в университетах и даже в гимназиях.

В первом сочинении речь идет о вычислении вероятности правильности судебных решений. Во всех такого рода работах этого времени предполагалась независимость выводов судей, с чем, однако, нельзя согласиться, так как судьи руководствуются одними и теми же свидетельскими показаниями и вещественными доказательствами. Во второй работе Остроградский уточняет некоторые утверждения Лапласа, касающиеся определения производящих функций для y_{x+1} и вообще y_{x+i} по производящей функции $u = y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \dots + y_x t^x + \text{etc}$ для функции y_x (целочисленной) переменной x . Это позволило ему ввести в изложение Лапласа и другие исправления.

Особое внимание привлекают две небольшие заметки Остроградского по обыкновенным дифференциальным уравнениям¹². В первой из них Остроградский усовершенствует метод последовательных приближений, широко применявшийся Ньютоном и Фурье к нахождению корней алгебраических уравнений. Он указывает прием, который позволяет избежать появления вековых членов (членов, содержащих независимое переменное, обычно время, вне знаков тригонометрических функций) при интегрировании нелинейных дифференциальных уравнений путем разложения по малому параметру, входящему в эти уравнения. Поясняет прием Остроградский на примере уравнения (ставшего классическим) $\frac{d^2 y}{dt^2} + y = \alpha y^3$ с начальными условиями $y = 1$, $\frac{dy}{dt} = 0$ при $t = 0$, заменяя его уравнением $\frac{d^2 y}{dt^2} + (1 - \frac{3\alpha}{4}) \tilde{y} = \frac{\omega}{4}(4y^2 - 3y)$, и, найдя решение с учетом первых степеней α , показывает, что оно совпадает с соответствующим приближением, полученным из точного решения, выраженного в эллиптических функциях. Основная идея заключается в одновременном разложении периода (или частоты) и самого решения по степеням α . Эта идея значительно позже получила широкое распространение при изучении возмущенных колебательных движений, однако при этом работа Остроградского долгое время не упоминалась. Во второй заметке для линейного уравнения

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + Q \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + S \frac{dy}{dx} + Ty = X$$

Остроградский получил фундаментальную формулу $\Delta = ae^{-\int P dx}$, вошедшую в учебную литературу¹³ и часто называемую формулой

¹² М. В. Остроградский. Заметка о методе последовательных приближений. — В кн.: М. В. Остроградский. Полн. собр. тр. Т. 3, стр. 71—75; Заметка о линейных дифференциальных уравнениях. — Там же, стр. 124—126.

¹³ У Остроградского Δ — знаменатель в выражениях для $\frac{dC_1}{dx}, \frac{dC_2}{dx}, \dots, \frac{dC_n}{dx}$, получаемых из системы линейных уравнений для этих величин, к которой приводит метод вариации произвольных постоянных Лагранжа; a — постоянная; Δ — определитель Вронского системы n решений линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка.

Лиувилля. В работе Лиувилля, относящейся к 1838 г., такой формулы нет, он даже не отмечает, что ее можно получить из найденного им более сложного соотношения.

В 1839 г. Остроградский применил математический анализ к двум конкретным прикладным задачам. В результате решения одной из них, предложенной ему физиком Б. С. Якоби, появились две его заметки о взаимном намагничивании брусков. Указанная Якоби схема намагничивания не безупречна, но рассмотренная математически Остроградским, она в общей постановке может иметь применение. Остроградский, указав на возможность решения задачи с помощью степенных рядов, свел ее к линейному разностному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами, и решение ее сразу получилось в общем виде в элементарных функциях. Особенно просто он сделал это во второй заметке.

Намного более важной и несравнимо более сложной была задача о движении неоднородных вращательных сферических снарядов. Для теоретического исследования этого злободневного в то время вопроса Остроградскому потребовалось около полутора лет плодотворной работы. Оно изложено в его статьях по внешней баллистике, сыгравших определенную роль в развитии русской школы баллистики. Предполагая смещение центра масс снаряда относительно его геометрического центра лобом, Остроградский и здесь пошел дальше Пуассона, в работе которого (1839 г.), послужившей толчком к баллистическим исследованиям Остроградского, смещение центров считалось малым и поверхностное трение снаряда не учитывалось. Уравнения Пуассона оказались частным случаем уравнений движения снаряда, выведенных Остроградским.

Баллистическая задача потребовала серьезного исследования вопроса приближенного вычисления интегралов. Результатом исследования явилась одна из лучших работ Остроградского — «Мемуар об определенных квадратурах» (доложен в 1839 г., опубликован в 1840 г.). В нем основное внимание уделено эйлеровой (Маклорена) формуле, формуле суммирования. Для приближенного вычисления определенных интегралов эта формула впервые, по-видимому, была применена Лежандром, который также записал ее, используя значения функции для середин частичных отрезков. Новые требования к точности в анализе, выдвинутые Коши, Гауссом, Абелем, привели к необходимости оценки остатка формулы, длительное время трактовавшейся как такой, что содержит бесконечный ряд. Выражение для остаточного члена с помощью разложения интегрируемой функции в тригонометрический ряд получил Пуассон (1823 г., опубликовано в 1827 г.). Оно оказалось сложным в основном из-за того, что под знаком интеграла содержало бесконечный тригонометрический ряд. Пуассон, ограничившись общими замечаниями о поведении остатка, не привел ни одного примера численного применения своей формулы. Остроградский же, исходя из формулы Тейлора для подынтегральной функции, дал строгий и простой вывод формулы Эйлера — Маклорена с остаточным членом в виде, мало чем отличающимся от принятого ныне:

$$\int_a^b f(x) dx = \omega \left[\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) + \sum_1^{n-1} f(a_i) \right] + A_1 \omega^2 [f'(b) - f'(a)] +$$

$$+ A_2 \omega^4 [f'''(b) - f'''(a)] + A_3 \omega^6 [f^{(V)}(b) - f^{(V)}(a)] + \dots$$

$$\dots + A_{m-1} \omega^{2m-2} [f^{2m-3}(b) - f^{2m-3}(a)] + A_m \omega^{2m} (b-a) f^{2m}(\overline{a, b}),$$

где $n\omega = b - a$, $\overline{a, b}$ означает, по Фурье, число, промежуточное между a и b , а $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{m-1}, A_m$ — рекуррентно находимые постоянные (определенным образом связанные с числами Бернулли). По всей вероятности, из-за срочности выполняемой работы (задача была правительственным поручением) от внимания Остроградского ускользнуло то обстоятельство, что равноценный полученному им результат был установлен пятью годами раньше Якоби (1834 г.). Это, пожалуй, единственный случай, когда один из основных результатов Остроградского оказался полученным ранее другим ученым. Вместе с тем в отличие от Якоби, которому в связи с обоснованием применения полусходящихся (асимптотических) рядов оказалось достаточным ограничиться лишь определением знака остаточного члена, Остроградский, интересовавшийся именно приближенным вычислением интегралов, более полно исследует формулу остаточного члена, а также в связи с вычислениями, в которые входят опытно определяемые функции, получает впервые формулу Лежандра с остаточным членом. Полученные результаты Остроградский использует для баллистических расчетов. В конце мемуара приведен соответствующий числовой пример с оценкой остатка. По такой же методике под руководством Остроградского были сосчитаны таблицы функции $\Theta(\theta)$, определяемой выражением

$$\Theta = 2 \int_{\alpha}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin^3 \theta} = \Phi(\alpha) - \Phi(\theta),$$

где

$$\Phi(\theta) = \frac{\operatorname{ctg} \theta}{\sin \theta} + \log \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2},$$

облегчающие расчет траектории, которую описывает тело, движущееся в сопротивляющейся среде (сопротивление среды предполагается пропорциональным квадрату скорости).

Возможными практическими применениями было обусловлено также появление работы Остроградского «Об одном вопросе, касающемся вероятностей» (1848 г.). В ней решается следующая задача: в сосуде имеются белые («хорошие», приемлемые) и черные («плохие», неприемлемые) шары (предметы), общее количество которых известно, но неизвестно, сколько из них какого цвета (качества); необходимо путем извлечения некоторого количества шаров и подсчета числа белых и черных шаров среди извлеченных определить вероятность того, что общее число белых шаров не выходит из заданных пределов. Такого рода задачи можно использовать для оценки качества принимаемой продукции по данным выборки. Одним из первых это и показал Остро-

градский. Имея в виду, в частности, армейских поставщиков, он пользовался в своем весьма простом изложении элементарными средствами, в основном факториальными биномами. Для определения искомой вероятности в случае больших чисел Остроградский приводит формулу, которая обобщает формулу Стирлинга для логарифма факториала. В конце он дает и подробно разъясняет схему вычислений для получения решения задачи, детально рассматривает численный пример (счет с восемью знаками после запятой). Популяризации теории вероятностей и ее применений посвящены появившиеся в 1847 г. статьи Остроградского «О страховании» и «Игра в кости».

В работах по баллистике Остроградский еще раз пошел дальше Пуассона¹⁴, а в двух заметках начала 40-х годов проявилось его превосходство над Ламе и Навье. В первой заметке Остроградский указал, что установленная Ламе (1838 г.) формула $3V = \int (x \cos \lambda + y \cos \mu + z \cos \nu) dS$, рассматривавшаяся им как новое соотношение, является частным случаем интегральной формулы, полученной Остроградским еще в 1828 г., и выполнил различные преобразования этой частной формулы. Во второй заметке, в основном методического характера, он анализирует допущенную Навье в его опубликованных лекциях по анализу (читанных в Политехнической школе) неточность при решении задачи об определении среди всех прямоугольных параллелепипедов поверхности a^2 параллелепипеда с наибольшим объемом. Лиувилль пришел к парадоксальному решению задачи: найти наиболее короткий или наиболее длинный отрезок, который можно провести к данному кругу из точки, взятой в его плоскости. В письме к Брашману¹⁵ Остроградский разъяснил суть ошибки Лиувилля, а также отметил, что уравнение

$$-\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\frac{dy}{dx} + F(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0,$$

которое Лиувилль интегрировал (1842 г.) методом изменения произвольных постоянных, сразу интегрируется в квадратурах (для этого достаточно разделить его на $\frac{dy}{dx}$ и умножить на dx).

В начале 40-х годов Остроградский снова заинтересовался теорией интегрирования алгебраических функций, долгое время привлекавшей его внимание и являвшейся одним из основных предметов его исследований в области математического анализа. По этим вопросам он опубликовал еще две работы¹⁶. В первой из них даны другой вывод и дополнение теоремы, доказанной им в 1833 г., — теоремы Абеля — Остроград-

¹⁴ На несколько более или менее серьезных ошибок в курсе механики Пуассона Остроградский указал в статье «О принципе виртуальных скоростей и о силе инерции». См. в кн.: М. В. Остроградский. Полн. собр. тр. Т. 2, стр. 104—109.

¹⁵ М. В. Остроградский. Письмо к Н. Д. Брашману. — В кн.: М. В. Остроградский. Полн. собр. тр. Т. 3, стр. 317—318. Вместе с четырьмя другими письмами Остроградского Брашману научного содержания впервые было опубликовано на французском языке в журн. «Математический сборник», 1866, т. 1, стр. XXI—XXXII.

¹⁶ М. В. Остроградский. Об интегралах алгебраических функций. — В кн.: М. В. Остроградский. Полн. собр. тр. Т. 3, стр. 175—179; Об интегрировании рациональных дробей. — Там же, стр. 180—214.

ского. Наряду с прямыми, т. е. определенными уравнениями, как пишет Остроградский, вида $\frac{dy}{dx} =$ алгебраической функции x , рассматриваются

также обратные, т. е. определенные уравнениями вида $\frac{dy}{dx} =$ алгебраической функции y , трансцендентные функции. Показано, что прямые и обратные функции не могут быть связаны между собой посредством какого-либо алгебраического уравнения и, в частности, интеграл алгебраической функции никогда не может содержать показательные или тригонометрические величины. Эта теорема и дополнение к ней широко обобщают результаты Лапласа, Абеля и Лиувилля.

Вторая работа — «Об интегрировании рациональных дробей» (1845 г.) — примыкает к первому мемуару Остроградского по интегрированию рациональных дробей. В ней он излагает свой метод выделения с помощью рациональных действий алгебраической (рациональной) части интеграла от рациональной функции. Метод основан на известной его формуле $\int \frac{N}{M} dx = \frac{X}{P} + \int \frac{Y}{Q} dx$, в которой рациональные дроби $\frac{N}{M}$, $\frac{X}{P}$, $\frac{Y}{Q}$ правильны, причем P является общим наибольшим делителем многочленов M и $\frac{dM}{dx}$, $M = QP$. Для полного решения задачи Остроградский дает алгоритм алгебраического определения многочленов X и Y , связанный с предложенным им оригинальным методом разделения в многочлене корней различной кратности.

Теорию интегрирования рациональных функций, располагавшую методом интегрирования с помощью рядов, предложенным И. Ньютоном (1704 г.), и методом разложения на простейшие дроби, введенным Г. В. Лейбницем (1702, 1703 гг.) и И. Бернулли (1703, 1719 гг.) и завершенным Л. Эйлером (1748 г.), Остроградский обогатил методом нахождения алгебраической части интеграла рациональной функции с помощью рациональных действий. Еще в 1833 г. Остроградский указал способ предварительного упрощения подынтегральной рациональной дроби путем разложения ее на простейшие. Примененный в 1872 г. Эрмитом способ для выделения алгебраической части интеграла рациональной функции совпадает со способом Остроградского. Естественно, что этот метод должен носить имя его первооткрывателя — Остроградского, а не пришедшего к этому методу почти тридцатью годами позже Эрмита. Как видим, вклад Остроградского в математический анализ весьма значителен. Его результаты по теории интегрирования функций и вариационному исчислению являются важнейшей составной частью анализа и предметом изучения не только для лиц, овладевающих математикой, но и для тех, кому приходится пользоваться ею при рассмотрении вопросов точного естествознания и техники. Как и другие видные математики своего времени, Остроградский развивал идеи Л. Эйлера, широко пользовался его научным наследием. Он принял активное участие в попытке издания полного собрания сочинений Эйлера, предпринятой Петербургской академией наук в 40-х годах, был назначен его научным редактором.

После блестящего дебюта в области механики — «Курса небесной механики» — Остроградский занялся изучением, в порядке широкого обобщения, принципа виртуальных скоростей при условии наличия идеальных связей, удерживающих и неудерживающих, стационарных и нестационарных, неголономных и голономных с применениями к исследованию равновесия веревочного многоугольника и гибкой нерастяжимой нити, а также других вопросов. В своих исследованиях, особенно в богатом по содержанию и оригинальном по изложению курсе «Лекции по аналитической механике»¹⁷, занимающем промежуточное положение между «Аналитической механикой» Лагранжа и «Трактатом по механике» Пуассона, с одной стороны, и «Лекциями по динамике» Якоби — с другой, Остроградский существенно пополнил знаменитый труд Лагранжа, углубил и в отдельных случаях уточнил его. Как и у Лагранжа, у Остроградского подход к задачам механики сугубо математический, в основе его лежит использование вариационного исчисления. Основные положения механики Остроградский выводит из единого начала возможных перемещений. Он постоянно стремится к общности и цельности изложения.

Особое место в курсе Остроградского занимает девятая лекция. В ней изучается плоское движение тела массы m , описываемое уравнениями $m \frac{d^2x}{dt^2} = X$, $m \frac{d^2y}{dt^2} = Y$ в предположении интегрируемости выражения $Xdx + Ydy$, равного $m d\varphi$. Показано, что наличие интеграла (живых сил) $\frac{p^2 + q^2}{2} = \varphi + a \left(\frac{dx}{dt} = p, \frac{dy}{dt} = q \right)$ и еще одного первого интеграла $f(p, q, x, y, a, b) = 0$ (a, b — произвольные постоянные) позволяет решить задачу в квадратурах. Такой же результат примерно одновременно с Остроградским получил Якоби (1836 г.). Теорема Остроградского — Якоби была началом в проведении ими и другими учеными ряда важных исследований по интегрированию систем дифференциальных уравнений динамики. В шестой лекции дано оригинальное аналитическое доказательство правила параллелограмма сил, привлекавшего внимание многих выдающихся ученых. В последней, тридцатой, лекции изложены начала вариационного исчисления. Курс Остроградского оказал существенное влияние на развитие аналитической механики в России.

В конце 40-х годов механика становится основной областью научных исследований Остроградского. Он искусно применяет к исследованию задач механики методы анализа, особенно вариационного исчисле-

¹⁷ М. В. Остроградский. Лекции по аналитической механике. — В кн.: М. В. Остроградский. Полн. собр. соч. Т. 1. Ч. 2. Изд-во АН СССР, 1946. Наиболее значительные по научным результатам шестая, девятая и шестнадцатая лекции напечатаны в кн.: М. В. Остроградский. Полн. собр. тр. Т. 2, стр. 287—310.

ния. К этому времени относятся его работы «О вариации произвольных постоянных в задачах динамики», «Об интегралах общих уравнений динамики» и «Мемуар о дифференциальных уравнениях, относящихся к изопериметрической задаче». Последние две имели принципиальное теоретическое значение: в них тесно увязывалась теория обыкновенных дифференциальных уравнений (динамики и более общих) с теорией уравнений в частных производных. Они появились после известных исследований Гамильтона, в частности его труда «Об общем методе в динамике» (1834—1835 гг.), где впервые уравнениям движения была придана каноническая форма.

В первой из названных работ Остроградский дает при тех же предположениях, что и у Гамильтона, оригинальный вывод канонических уравнений динамики, записывая их в виде $x'_i = \frac{dV}{dp_i}$, $p'_i = -\frac{dV}{dx_i}$. Ис-

пользуя эти уравнения, он доказывает теорему Пуассона о первых интегралах уравнений динамики. Далее рассматривает случай, до него никем не отмеченный, когда кроме сил, имеющих потенциал, на точки

действуют силы, работа которых выражается в виде $\sum_{i=1}^{i=n} (X_i \delta x_i + P_i \delta p_i)$.

Для этого случая он дает упрощенный вывод полученных Пуассоном (1809 г.) уравнений теории возмущений — уравнений, определяющих вариации произвольных постоянных, входящих в решение, соответствующее невозмущенному движению. Последнее обстоятельство оправдывает название работы. Она примыкает к заметке Остроградского с аналогичным названием, написанной им в 1829 г., и к его «Курсу небесной механики».

В статье «Об интегралах общих уравнений динамики» (доложена в 1848 г., опубликована в 1850 г.). Остроградский рассматривает общий случай движения несвободной системы с нестационарными связями и силовой функцией, явно зависящей от времени. С помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям Якоби для случая свободной системы, он доказывает, что если $S = \varphi + \text{const}$ (φ содержит столько произвольных постоянных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, сколько имеется переменных $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$) есть полный интеграл уравнения $\frac{dS}{dt} + \Theta = 0$, то интегралы канонических уравнений можно получить его дифференцированием; ими являются $p_i = \frac{d\varphi}{d\xi_i}$, $\frac{d\varphi}{d\alpha} = \beta_i$ (β_i — новые произвольные постоянные).

Канонические уравнения Остроградский записывает в виде $\xi'_i = \frac{d\Theta}{dp_i}$, $p'_i = -\frac{d\Theta}{d\xi_i}$, при этом $V = T + U$ и V как функция второй степени

относительно ξ'_i представляется в виде $V = V_0 + V_1 + V_2$, где V_0 не содержит ξ'_i , а V_1 и V_2 являются однородными функциями ξ'_i соответственно первого и второго измерений, функция $\Theta = V_2 - V_0$ и ее аргументами являются $t, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \frac{dS}{d\xi_1}, \frac{dS}{d\xi_2}, \frac{dS}{d\xi_3}, \dots, S = \int^t V dt$. Такой же ре-

зультат для несвободных систем излагал Якоби в лекциях по динамике, читанных им зимой 1842/43 г. и опубликованных Клебшем по записям Борхардта в 1866 г., более чем через полтора десятилетия после появления работы Остроградского. Следовательно, эта теорема должна быть названа теоремой Остроградского — Якоби. Основные же уравнения динамики естественно называть уравнениями Остроградского — Гамильтона.

Работа Остроградского была первым исследованием, в котором задача об интегрировании уравнений механики рассмотрена в наиболее общем виде. По форме изложение у Остроградского отлично от изложения у Гамильтона и Якоби. В учебной литературе по существу принято изложение Остроградского. Освещение этой темы обычно начинается с изложения теоремы Остроградского — Якоби 1836 г. об интегрировании уравнений плоского движения тела, при рассмотрении которой Остроградский фактически построил с помощью квадратур функцию, являющуюся для данного случая главной функцией по Гамильтону.

Имеющуюся у Гамильтона формулу для вариации главной, по его терминологии, функции S $\delta S = \delta \int_0^t (T + U) dt = \Sigma [p_i \delta \xi_i - (p_i \delta \xi_i)_0]$,

которая при закрепленных концах (когда $\delta \xi_i = 0$ при $t = t_1$ и $t = 0$) выражает принцип стационарного действия, Остроградский получил при более общих предположениях, чем Гамильтон, и тем самым значительно обобщил этот принцип (принцип Остроградского — Гамильтона). Непосредственно на этом принципе и дальнейших его обобщениях он остановился в третьей из названных выше работ, а также в одном из писем Брашману (1853 г.).

Большая работа Остроградского «Мемуар о дифференциальных уравнениях, относящихся к изопериметрической задаче» (доложена в 1848 г., опубликована в 1850 г.) посвящена по существу вариационному исчислению, но в ней имеются в виду задачи динамики, развивая которые Остроградский пришел к исследуемому вопросу, и много внимания уделяется применению к ним полученных результатов. Мемуар замечателен тем, что представляет собой далеко идущее развитие вопросов вариационного исчисления в их связи с интегрированием дифференциальных уравнений — вопросов, блестяще использованных в предыдущей статье при решении задач механики. В нем исследуется задача нахождения экстремума интеграла $\int V dt$, где V зависит от независимой переменной t (времени), функций этой переменной $x_1, x_2, \dots, x_m$ и их производных различных порядков (до n -го включительно; по терминологии того времени, задача называлась изопериметрической). При этом с самого начала постоянно имеется в виду непосредственно $\delta V dt$, а не $\delta \int V dt$, следовательно, рассмотренные условия преобразования вариации $\delta V dt$ в точный дифференциал дают для задачи в интегральной форме при закрепленных границах интегрирования условия обращения в нуль вариации интеграла, что является, как известно, необходимым условием экстремума интеграла. Последние приводят к дифференциаль-

ным уравнениям (Эйлера) рассматриваемой экстремальной задачи. Их Остроградский преобразует к каноническому виду

$$d\xi_{i,k} = \frac{d\Theta}{dx_i^{(k)}} dt, \quad dx_i^{(k)} = -\frac{d\Theta}{d\xi_{i,k}} dt,$$

где $x_i^{(k)}$ — производная k -го порядка функции $x_i(t)$,

$$\xi_{i,n-1} = \frac{dV}{dx_i^{(n)}}, \quad \xi_{i,k-1} = \frac{dV}{dx_i^{(k)}} - \xi'_{i,k}, \quad \Theta = V - T,$$

$$T = \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{k=0}^{k=n-1} \xi_{i,k} x_i^{(k+1)},$$

замечая, что «эти уравнения вполне сходны с общими формулами Динамики, хотя эта наука является лишь весьма частным случаем изопериметрической задачи». Предполагая функцию V таковой, что частная производная $\frac{dV}{dt}$ не содержит вовсе ни функций x_i , ни их производных (зависит лишь от t), он выводит соотношение

$$\Theta - \int \frac{dV}{dt} dt + h = 0 \quad (1)$$

(h — произвольная постоянная), которое в частном случае динамики становится интегралом живых сил.

Интегрируя полученное ранее для $\delta V dt$ выражение в виде точного дифференциала, Остроградский устанавливает формулу

$$\Theta \delta t + \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{k=0}^{k=n-1} \xi_{i,k} \delta x_i^{(k)} = \delta \int V dt + \text{const}, \quad (2)$$

являющуюся широким обобщением вариационных принципов динамики. Задача представлялась ему, поскольку он исходил из ее дифференциальной формы, «только весьма простым следствием или, скорее, очевидным результатом метода вариаций, примененного к теории минимумов и максимумов», и он остановился на ней лишь как на формуле, заключающей, «как весьма частный случай, динамический принцип наименьшего действия», под которым здесь понимается любой интегральный вариационный принцип механики, включая принцип Лагранжа и принципы, введенные Гамильтоном. Эта формула при дополнительных предположениях относительно входящих в нее вариаций (обращении их в нуль на границах интегрирования) позволяет записать полученный Остроградским результат в виде $\delta \int V dt = 0$, что, являясь необходимым условием экстремума $\int V dt$, представляет собой в весьма общей форме «принцип наименьшего действия» (в случае динамики этим интегралом является $\int (T + U) dt$). Остроградский критически анализирует принцип наименьшего действия, введенный Лагранжем ($\delta \int T dt = 0$), показывая, что при наличии соотношения (1) интегралы $\int V dt$ и $\int T dt$ имеют минимум одновременно. Эта критика обусловлена неясностями в изложении Лагранжа, прежде всего недостаточно отчетливым толкованием по-

нения вариации. Она оживила интерес к вариационным принципам механики.

Далее Остроградский рассматривает вопросы интегрирования полученных им канонических уравнений исходной задачи с помощью полного интеграла уравнения $\frac{dS}{dt} = \Theta$, где $S = \int_0^t V dt$, т. е. значительно развивает теорию Гамильтона — Якоби. Считая известным решение канонической системы уравнений (зависящее от $2mn$ произвольных постоянных), он излагает метод получения решения возмущенных канонических уравнений

$$d\xi_{i,k} = \frac{d\Theta}{dx_i^{(k)}} dt + X_{i,k} dt, \quad dx_i^{(k)} = - \frac{d\Theta}{d\xi_{i,k}} dt - \Xi_{i,k} dt,$$

где $X_{i,k}$ и $\Xi_{i,k}$ — данные функции t , $x_i^{(k)}$ и $\xi_{i,k}$, путем вариации произвольных постоянных. Изложение этого вопроса примыкает к названным ранее его работам о вариации произвольных постоянных в задачах механики.

Из всего богатого содержания «Мемуара» наиболее известными стали вопросы, связанные с вариационным принципом Остроградского — Гамильтона. Этот принцип нашел разнообразные применения не только в механике, но и в физике и сыграл весьма значительную роль в дальнейшем развитии физико-математических наук. В основе формулировки принципа стационарного действия механики у Остроградского лежит вытекающий из соотношения (2) результат, который в письме Брашману от 2 февраля 1853 г. он охарактеризовал как заключающий в себе всю механику и изложил так: *«Момент движущих сил плюс момент сил, заменяющих связи системы, плюс вариация живой силы, выраженные в любых координатах, представляют полную производную по времени. Это самый простой и общий результат, какой могут дать динамические соображения. Итак, условие полной производной не является необходимым только для Гидростатики и Гидродинамики; оно свойственно всей науке о движении»*¹⁸ (по терминологии того времени, момент сил — это работа сил). Общая форма вариационного принципа конкретизирована применительно к механике в первом письме Остроградского Брашману, где он особо отметил свое намерение заменить условия maxima и minima условиями интегрируемости.

Многие результаты работы, также впервые опубликованные, часто связывают прежде всего с именем Якоби, который независимо от Остроградского рассмотрел случай изопериметрической задачи с подынтегральной функцией, содержащей лишь производные первого порядка неизвестных функций. Но эти исследования Якоби долгое время оставались неопубликованными и были освещены в лекциях по динамике, изданных его учениками и последователями (1866 г.) и в полном собрании его сочинений (70—80-е годы). Приоритет Остроградского в получении соответствующих результатов несомненен.

¹⁸ М. В. Остроградский. Письма профессору Брашману. Письмо 2-е — В кн.: М. В. Остроградский. Полн. собр. тр. Т. 2, стр. 276. В этом томе перепечатаны письма Остроградского Брашману по вопросам механики.

Описанный принцип Остроградский уточняет применительно к механике в «Мемуаре по общей теории удара» (доложен в 1854 г., опубликован в 1857 г.), где получает общее уравнение теории удара в вариациях, а из него — уравнения теории удара в дифференциальной форме, которые и исследует. Для выражения $X dv + X_1 dv_1 + X_2 dv_2 + \dots + X_{f-1} dv_{f-1}$, в котором коэффициенты X являются однородными функциями первого измерения переменных v , оказываются выполненными условия $\frac{dX_k}{dv_i} = \frac{dX_i}{dv_k}$, и оно интегрируется как полный дифференциал. Исследование приводит к обобщению теоремы Карно о потере живой силы при неупругом соударении двух тел (потеря равна живой силе, соответствующей потерянной скорости) на случай произвольного числа тел. Этот результат привлек особое внимание ученых и вызвал в Парижской академии наук дискуссию о приоритете, в которой приняли участие Ж. Бертран, О. Коши, Ж. Дюамель и В. Понселе. Работа Остроградского, первое исследование, в котором задача теории удара (неупругого) рассмотрена в общем виде с исчерпывающим ее доказательством, является существенным вкладом в общую теорию удара. Основное содержание последней работы Остроградского по механике — заметки об использовании линейных многочленов в динамике (1857 г.) — составляет чисто алгебраический вывод общего уравнения динамики (в вариациях) для систем со связями путем использования свойства линейной зависимости линейных многочленов p_i вида $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \dots + a_{in}x_n$ (линейных форм). В ней показано, что эти же свойства следует использовать для вывода необходимых условий относительных минимумов и максимумов основной задачи вариационного исчисления, а также для разыскания условий интегрируемости дифференциального выражения $Xdx + Ydy + Zdz + \dots$ с любым числом переменных $x, y, z, \dots$ при наличии между дифференциалами $dx, dy, dz, \dots$ линейного соотношения.

Рассмотренная заметка была напечатана в 44-м томе «Докладов» Парижской академии наук в связи с избранием Остроградского в 1856 г. ее членом-корреспондентом. Последнее являлось одним из свидетельств самого высокого признания научных заслуг Остроградского. Его труды по механике послужили основой для становления и развития русской школы механики. Сочетание глубоких теоретических исследований с их приложением к изучению важных задач естествознания и техники было присуще как самому Остроградскому, так и многим его ученикам и последователям.

5

Математические работы 50-х годов

Большинство работ Остроградского 50-х годов посвящено математическим вопросам. Они, хотя и не содержат результатов первостепенного значения, представляют определенный интерес. Статьи алгебраической тематики — «О равных корнях целых

полиномов», «О производных алгебраических функций», «Заметка о равных множителях целых многочленов» — примыкают к его исследованиям по интегрированию алгебраических функций. Возникший перед Остроградским еще в 1833 г. при рассмотрении интегрирования рациональных дробей вопрос о выделении кратных корней многочленов он изучил в мемуаре 1844 г. и предложил оригинальный метод для его решения, тесно связанный с проведением соответствующих выкладок по выделению алгебраической части интеграла рациональной функции. В основном несколько улучшенное изложение этого метода в чисто алгебраическом виде воспроизведено в первой из названных трех статей. Целью Остроградского в данном случае является представление многочлена $ax^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n$, обозначенного через P , в виде $P = q_1q_2^2q_3^3 \dots q_k^k \dots q_{i-1}^{i-1}q_i^i$, где q_k — произведение линейных множителей, соответствующих всем корням k -й кратности многочлена P . Остроградский видоизменяет общеизвестный метод выделения кратных корней многочлена путем последовательного применения теоремы об общем наибольшем делителе многочлена и его производной, а затем излагает свой метод, позволяющий значительно сократить вычисления.

В третьей из названных работ (опубликована в 1856 г. в «Докладах Парижской академии наук», т. 42, перепечатана в этом же году в журнале Лиувилля) Остроградский отметил, что каждое q_k можно найти непосредственно как общий наибольший делитель многочленов Q и $R - (k-1)\frac{dQ}{dx}$, не используя $q_1, q_2, \dots, q_{k-1}$; при этом P_1 есть наибольший делитель многочлена P и его производной $\frac{dP}{dx}$, $P = QP_1$, $\frac{dP}{dx} = RP_1$.

В статье о производных алгебраических функций установлена, по возможности чисто алгебраическими средствами, теорема: $\delta y' = \delta y - 1$, т. е. степень производной всякой алгебраической функции на одну единицу ниже степени самой функции, если эта последняя степень не равна нулю (как и у Абеля, здесь степень алгебраической функции y является значением показателя α , таким, что отношение $\frac{y}{x^\alpha}$ будет конечным при бесконечно большом x). Показано также, что никакая алгебраическая функция не может иметь в качестве своей производной функцию степени -1 , так что всякая функция $(\int y dx)$, производная которой имеет степень -1 ($\delta y = -1$), обязательно является трансцендентной функцией (в частности, логарифмическая функция не сводится к алгебраическим).

В статье «Новый способ интегрирования четырех дифференциальных уравнений» (1856 г.) показано, что для нахождения решения системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dV}{dy}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{dV}{dx}, \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{dV}{d\eta}, \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{dV}{d\xi},$$

где V — функция x, y, ξ, η , явно не зависящая от t , достаточно двух

первых интегралов (включая очевидный $V = a$) и одной квадратуры. Этот результат обобщает теорему, установленную в девятой лекции по аналитической механике (1836 г.).

Работа «Способ вариаций» (1858 г.) была напечатана в виде добавления в книгу по дифференциальному исчислению ближайшего ученика Остроградского В. Беренса¹⁹. И дифференциал, и вариацию величины Остроградский трактует как неизмеримо (бесконечно) малую величину, отмечая простоту, удобство такого подхода. При этом он упоминает и точку зрения Лагранжа — представление приращения величины в виде суммы членов разных порядков (в том числе в виде степенных рядов).

Деятельное участие принимал Остроградский вместе с академиками Буняковским и Веселовским в работе специального комитета по вопросам организации эмеритальной (пенсионной) кассы. Эта касса была создана при Морском ведомстве для облегчения материального положения служащих, уволенных в связи с лишением России права иметь военный флот на Черном море (после поражения в Крымской войне 1853—1855 гг.). Выплату пенсий следовало начать с 1859 г. Методика расчетов на основе начал страхования была разработана и изложена Остроградским в «Записке об эмеритальной кассе»²⁰ (1858 г.). Составленные под его руководством для облегчения расчетов таблицы роста капитала от 1 до 9 руб. в зависимости от числа лет при 4% годовых давали значения с 11 десятичными знаками копейки, так что могли быть использованы не только при расчетах в эмеритальной кассе, но и при самых значительных финансовых операциях. В связи с успешной деятельностью эмеритальной кассы при Морском ведомстве такие кассы были созданы и при других ведомствах²¹.

Последние три научные статьи Остроградского — «О вероятности гипотез по событиям» (1859 г.), «О кривизне поверхностей» (1860 г.), «Об одном определенном интеграле» (1860 г.) — в основном методического характера. В первой из них улучшено для общего случая неравновозможных гипотез изложение по Лапласу формул Байеса (Прайса). Вторая заметка — единственная печатная работа Остроградского по чисто геометрическому вопросу. В ней дан наглядный вывод известной теоремы Менье о кривизне кривой на поверхности, улучшенный по сравнению с выводом Коши (1826 г.) в его лекциях по применению исчисления бесконечно малых к геометрии. В третьей заметке, появление которой было вызвано письмом Эрмита Чебышеву от 31 мая 1860 г., Остроградский, используя формулы преобразования многократных интегралов из своей работы «Мемуар об исчислении вариаций кратных интегралов», дает наиболее простой вывод теоремы Кэли (1848 г.) об

¹⁹ В книге Беренса частично отражены идеи последней известной статьи Остроградского «О новом изложении теории наибольших и наименьших величин», доложенной Академии наук 30 ноября 1860 г. Статья посвящена нахождению признаков, отличающих наибольшие величины от наименьших или показывающих отсутствие тех и других.

²⁰ Вопросу уточнения процентных вычислений при дробном числе лет посвящена заметка Остроградского «Погрешности при вычислении процентов» (1848 г.).

²¹ По свидетельству А. Н. Крылова, записка Остроградского долгое время использовалась эмеритальными кассами.

ортогональности двух однородных гармонических многочленов разных степеней от многих независимых переменных (функций Лапласа) на поверхности сверхсферы (на поверхности $L = 0$, где $L = x^2 + y^2 + z^2 + \dots - 1$), вывод, ускользнувший, видимо, от внимания и Кэли и Эрмита.

Математическое наследие Остроградского не исчерпывается рассмотренными работами. Он докладывал Петербургской академии наук и о многих других своих исследованиях. Часть из них известна лишь по названиям либо по кратким извлечениям, некоторые же сохранились в рукописях. Среди последних — заметки об одной системе алгебраических уравнений (1856 г.) и о функции гамма (1859 г.)²². Во второй речь идет о вычислении функции гамма для весьма больших значений переменной, дан основанный на суммировании соответствующих конечных разностей более простой, чем у Бине (1839 г.), вывод формулы для логарифма функции гамма. Эту формулу четыре года раньше Бине получил Лобачевский в работе о сходимости рядов, на которую Остроградский дал в 1842 г. отзыв. Однако Остроградский поверхностно просмотрел работу Лобачевского и не заметил упомянутую формулу.

Сохранившиеся рукописи Остроградского свидетельствуют о том, что он очень много внимания уделял вопросам приближенных вычислений. Занимаясь построением теории иррациональных чисел на основе приближенных вычислений, Остроградский пришел к формуле

$$\omega = a + \frac{1}{p} - \frac{1}{pp_1} + \frac{1}{pp_1p_2} - \frac{1}{pp_1p_2p_3} + \dots + \frac{(-1)^n}{pp_1p_2 \dots p_n} + \frac{(-1)^{n+1}\alpha_{n+1}}{pp_1p_2 \dots p_{n+1}},$$

где a — целая часть несоизмеримого количества ω , $\omega = a + \alpha$ (α — остаток, меньший единицы), $1 = p\alpha + \alpha_1$, $1 = p_1\alpha_1 + \alpha_2$, $1 = p_2\alpha_2 + \alpha_3, \dots$, $1 = p_n\alpha_n + \alpha_{n+1}$, причем $\frac{1}{p_{n+1}+1} < \alpha_{n+1} < \frac{1}{p_{n+1}}$. Эта формула позволяет весьма просто и эффективно находить быстро сходящиеся рациональные приближения иррационального числа.

6

Учебные пособия

Благодаря Остроградскому во всех учебных заведениях, где он преподавал, значительно улучшилась математическая подготовка слушателей, существенно повысился ее научный уровень. Остроградский был превосходным лектором. Своими лекциями, отличавшимися общностью и строгостью рассуждений, краткостью, простотой и ясностью, изяществом изложения, увлекательной и живой формой, он оказывал глубокое воздействие на слушателей. Курсы

²² Напечатаны в сб.: Михаил Васильевич Остроградский. Педагогическое наследие. Документы о жизни и деятельности. Физматгиз, М., 1961, стр. 338 и 348—352. Материалы, помещенные на стр. 267—358 сборника, содержат сведения о многих работах Остроградского, в том числе неопубликованных.

Остроградского по математике и механике печатались, литографировались, распространялись в рукописном виде. Они способствовали повышению уровня преподавания математических наук в России. Особенно широкую известность получили его «Лекции алгебраического и трансцендентного анализа», читанные им на русском языке зимой 1836/37 г. в Морском кадетском корпусе и изданные (1837 г.) слушателями капитаном С. Бурачком и лейтенантом С. Зеленым по их записям²³. Остроградский принимал участие в обработке записей при подготовке их к изданию. Это были публичные лекции, читанные в основном для морских офицеров, гражданских и военных инженеров. Они имели неизменный успех и были большим общественным и культурным событием.

В опубликованных двух частях курса лекций Остроградского изложена высшая алгебра в соответствии с достигнутым к тому времени уровнем развития этой науки. Они отличались новизной содержания, обширностью материала и, по-видимому, были первым в мире учебным пособием, в котором излагались, причем в интересной и доступной форме, результаты Лагранжа, Фурье, Штурма, Абеля, Гаусса, имевшие главное значение в алгебре того времени. Лекции использовались также в университетском преподавании. Они существенным образом изменили содержание курса алгебры и постановку его преподавания, послужили образцом для авторов учебных руководств по алгебре последующего времени.

Рассмотрению важнейшего класса уравнений, разрешимых в радикалах, — уравнений деления круга — Остроградский предпосылает в лекциях XXIII—XXVII второй части курса изложение начал теории чисел. В этих лекциях впервые полно изложены на русском языке начала теории чисел. В основу положена теория сравнений: Остроградский достойно оценил предложенный Гауссом новый метод решения задач теории чисел. К лекциям приложены таблицы первообразных корней для всех простых чисел до 200 с таблицами для нахождения индекса по заданному числу и числа по индексу.

По замыслу Остроградского обе части курса должны были составить введение к третьей части, к трансцендентному анализу — интегральному исчислению. Однако третья часть лекций, включавшая дифференциальное исчисление и начала трансцендентного анализа, а именно интегрирование алгебраических функций, когда интегралы также являются алгебраическими функциями, не была издана. Из читанных в последующее время публичных лекций Остроградского по трансцендентному анализу были опубликованы в 1841 г. извлечения²⁴. Во второй лекции он вводит понятие симметрической производной, получившее важное значение при исследовании в XX в. вопросов метрической теории функций.

²³ За запись и издание лекций Остроградского С. Бурачек и С. Зеленый были удостоены Демидовской премии (1837 г.).

²⁴ М. В. Остроградский. Извлечение из первой..., Извлечение из второй публичной лекции трансцендентного анализа. — В кн.: М. В. Остроградский. Полн. собр. тр. Т. 3, стр. 159—170.

В начале 40-х годов штаб военно-учебных заведений приступил к пересмотру составленных в 1836 г. учебных планов и программ. Особенно большое участие в этой работе принял Остроградский. В 1843 г. он возглавил соответствующий комитет по математическим наукам, а в 1847 г. был назначен главным наблюдателем за преподаванием математических наук в военно-учебных заведениях. Остроградский оказывал благотворное влияние на преподавание математики в военно-учебных заведениях, а тем самым и на все математическое образование в России ²⁵.

Пересмотр программ и учебных планов в основном касался курса элементарной математики, преподававшегося в общих классах специальных учебных заведений и в кадетских корпусах. Остроградский написал «Программу и конспект тригонометрии для руководства военно-учебных заведений» (1851 г.) и «Руководство начальной геометрии» в трех частях (1855, 1857, 1860 гг.). Они содержат интересные положения, многие из которых сохраняют свое значение и в настоящее время.

В «Руководстве начальной геометрии» ²⁶ курс элементарной геометрии изложен весьма полно и оригинально с привлечением аналитических доказательств без использования фигур. Оно отличается глубиной и строгой последовательностью изложения материала, новым, по сравнению с учебниками того времени, порядком его расположения, содержит сведения по истории математики. Выход руководства приветствовал Н. Г. Чернышевский. В отзыве, напечатанном в «Современнике» (1855 г.), он отмечал необычайную ясность и строгость изложения, полезность и важность введенных Остроградским новшеств. Однако отсутствие у Остроградского опыта преподавания в младших классах сказалось на уровне руководства: пожалуй, самый полный и подробный учебник элементарной геометрии из всех учебников, появившихся в России в XIX в., он был малодоступен для учащихся. Вместе с тем это руководство было ценным пособием для учителей и оказало влияние на многих авторов учебников геометрии последующего времени. В нем в известной мере решалась задача сближения курса геометрии средней школы с практикой и с курсом математики высшей школы. Вступив в «состязание с изложением, которому Евклид представил образец», Остроградский своим руководством нанес серьезный удар по установившейся педагогической традиции.

Большое значение в общематематической подготовке учащихся Остроградский придавал началам высшей математики. Он считал необходимым ввести их в программу для старших классов средней школы, поскольку, с одной стороны, они важны сами по себе, а с другой — будут способствовать развитию математических способностей, логического

²⁵ Эта сторона деятельности Остроградского подробно освещена в книге: А. И. К р о п о т о в и И. А. М а р о н. М. В. Остроградский и его педагогическое наследие. Учпедгиз, М., 1961.

²⁶ Во Львовской библиотеке Академии наук УССР сохраняется экземпляр «Руководства начальной геометрии» Остроградского с дарственной надписью А. Н. Коркина, датированной 30 мая 1866 г. Это одно из свидетельств о связях русских математиков с передовыми деятелями западноукраинских областей.

мышления учащихся. По предложению Остроградского, в 1850 г. начала высшей математики были введены в программу четвертого общего класса кадетских корпусов. «От всех занимающихся приложением физико-математических теорий к промышленности» Остроградский требовал знакомства с дифференциальным исчислением. В заметке «Погрешности при вычислении процентов» (1848 г.) он отмечал: «Вопрос этот можно решить на основании самих элементарных правил алгебры; но мы употребим дифференциальное исчисление, во-первых, для большой простоты, а во-вторых, чтобы оно мало-помалу распространялось на все классы читателей. Фраза „дифференциальное исчисление есть трансцендентный или высший анализ, доступный весьма немногим“, повторяемая со времен Лейбница, должна же наконец устареть. Что может быть проще дифференциального исчисления для читателей, хотя несколько знакомых с математическими науками!»²⁷.

Недавно обнаружены литографированные записки публичных лекций Остроградского по некоторым особенно важным отделам интегрального исчисления²⁸. Он читал их в 1858/59 учебном году в помещении Инженерной академии. По существу, это был один из первых в России специальный курс по определенным интегралам. Определенные интегралы, значение которых все более возрастало в математике, особенно в математической физике, постоянно привлекали внимание Остроградского. Многие его результаты в этой области включены в курс лекций. Основное содержание лекций составляют несобственные и кратные интегралы, их применения и способы вычисления (начала интегрального исчисления предполагались известными).

Публичный курс лекций по теории вероятностей Остроградский читал в 1858 г. в помещении Артиллерийской академии. В следующем году здесь же он читал публичные лекции по дифференциальному исчислению, записанные и изданные прапорщиком Борткевичем. Борткевич составил также по лекциям Остроградского записки о приложении дифференциального исчисления к аналитической геометрии.

Общепедагогические взгляды Остроградского наиболее полно отражены в блестяще написанной им совместно с французским математиком И. А. Блумом работе «Размышления о преподавании» (1860 г.)²⁹. Для систематизации и закрепления знаний детей Остроградский и Блум рекомендуют специальные таблицы, содержащие в систематизированном виде основные положения преподаваемого предмета. Они разработали план издания «Политехнических таблиц», своеобразной энциклопедии точных и основных технических наук. Однако из намеченных ими (на трех языках) 340—380 политехнических таблиц было издано (1861, 1862 гг.) лишь 11, в том числе таблицы «Начальная геометрия» и «Арифметика», содержавшие конспективное изложение основ ариф-

²⁷ М. В. Остроградский. Погрешности при вычислении процентов. — В кн.: М. В. Остроградский. Полн. собр. тр. Т. 3, стр. 314—315.

²⁸ Напечатаны в сб.: Михаил Васильевич Остроградский. Педагогическое наследие, стр. 152—252; комментарии и примечания к ним В. И. Антроповой, стр. 253—263.

²⁹ Там же, стр. 32—52.

метики и начальной геометрии. Это были последние работы Остроградского. Остроградский подготовил много видных преподавателей математики, ученых, в совершенстве владевших математическими методами. Ученики Остроградского использовали и развивали его педагогические взгляды. В вопросах преподавания математики он отстаивал положения о его наглядности, учете возрастных особенностей учеников, необходимости установления связи с преподаванием физики и естествознания, введение начал высшей математики в курс средней школы и др. Эти положения составили основу международного движения за реформу преподавания математики, начавшегося в первые годы XX в. и обычно связываемого с именем Ф. Клейна. В России деятельность в указанном направлении по инициативе и под руководством Остроградского развернулась почти на полстолетия раньше.

Как отмечалось выше, Остроградский разработал ряд важных в математике алгоритмов, часто доводил свои исследования до конкретных результатов, до числа. Особое место отводил он вопросам численного решения задач, составления таблиц, рационального выполнения приближенных вычислений — вопросам, столь важным для доведения математических результатов до их непосредственного применения в практике, — и в своих курсах лекций, и в своей организационно-педагогической деятельности. Тем самым он во многом содействовал распространению в России знаний в области вычислительной математики. Остроградский приветствовал первые отечественные начинания в области вычислительной техники. На основании его отзыва Академия наук в 1845 г. удостоила поощрительной Демидовской премии изобретателя-самоучку из Белостока З. Я. Слонимского за изобретение арифметической машины — прибора для выполнения сложения и вычитания чисел ³⁰. Идею прибора Слонимского использовал в России другой изобретатель — учитель Куммер. При помощи прибора Куммера можно было складывать и вычитать любые числа до одного миллиарда; он был также одобрен Остроградским.

С именем Остроградского связано широкое распространение математических знаний в России, налаживание научных исследований по математике и механике, успешно продолженных его учениками и последователями, особенно в области механики и различных приложений математики. Многогранной была деятельность Остроградского, «которого имя в истории наук математических занимает, — как отмечал впоследствии его ученик профессор Е. Ф. Сабинин, — самое почетное место, которого как великого своего учителя, передавшего ученикам своим и любовь к науке, и ключ к самостоятельным ученым исследованиям, будут чтить несколько поколений профессоров и наставников учебных заведений, моряков, инженеров, артиллеристов и других полезных деятелей в нашем отечестве, которым будет гордиться вся Россия, как прославившим имя русское в области наук математических» ³¹.

³⁰ Академией наук было также издано «Описание нового числительного инструмента, изобретенного Зелигом Слонимским» (СПБ, 1845).

³¹ Е. Ф. С а б и н и н. Михаил Васильевич Остроградский. — Записки Новороссийского университета, 1881, т. 33, стр. 65.

В. Я. Буняковский

7

Жизнь и деятельность

Важное место в математической жизни России занимал коллега М. В. Остроградского по Академии наук Виктор Яковлевич Буняковский. Он родился 16 (4) декабря 1804 г. в г. Баре Могилевского уезда Подольской губернии в семье подполковника уланского полка. Образование получил вначале домашнее, в Москве, затем за границей, где брал частные уроки в Кобурге (Германия), слушал лекции в Лозанне (в академии) и Париже (в университете и Collège de France). Его ближайшим наставником был Коши. В 1824 г. он был удостоен младших ученых степеней во Франции — бакалавра и лиценциата, а в следующем году, вторым из русских после харьковчанина Затеplinского, — степени доктора математических наук. Докторская диссертация, защищенная Буняковским в мае 1825 г. в Парижском университете (Faculté des Sciences de Paris), как было принято во Франции в это время, состояла из двух работ. Обе относились к прикладной математике: к аналитической механике (об одном случае вращательного движения в сопротивляющейся среде) и к математической физике (о распространении тепла внутри твердых тел).

В 1826 г. Буняковский вернулся на родину и вскоре начал преподавать математику в старших классах Петербургского первого кадетского корпуса, а в следующем году — математику и механику в офицерских классах Морского кадетского корпуса. Летом 1830 г. он получил должность профессора математики в Институте корпуса инженеров путей сообщения и несколько позже — в Горном институте. В этот период своей педагогической деятельности Буняковский издал на русском языке ранее выполненные им переводы известных книг Коши по анализу и тем самым способствовал ознакомлению русских математиков с предложенным Коши построением математического анализа на основе теории пределов.

В мае 1828 г. Буняковский был избран адъюнктом Петербургской академии наук, а в марте 1830 г. экстраординарным академиком. Так началась деятельность Буняковского в Академии наук. Он сообщал на заседаниях академии и печатал в ее изданиях свои научные труды, давал отзывы на появлявшиеся математические работы, сотрудничал в издававшемся в 30-е годы энциклопедическом словаре Плюшара, математическую часть которого редактировал Остроградский.

Буняковский постоянно заботился об умножении математической литературы на русском языке. Особым проявлением такой заботы является его длительная трудоемкая работа над словарем «Лексикон чистой и прикладной математики». Работая над словарем, он преследовал цель, с одной стороны, дать русским читателям «достаточные сведения о всех важнейших теориях, как старых, так и новейших», с другой — обогатить русскую математическую терминологию, весьма неполную тогда во многих отношениях.



В. Я. Буняковский.

Первый том словаря, посвященный памяти Ньютона, Эйлера и Лагранжа, был одобрен Академией наук в 1836 г. и через три года вышел из печати. Чтобы дать возможность любителям точных знаний в России читать и понимать французскую математическую литературу, Буняковский расположил статьи тома по французскому алфавиту. В каждой статье он приводит соответствующий русский термин и весьма полно раскрывает его содержание. Оригинально написанные статьи словаря в ясной форме давали изложенный прекрасным языком большой материал для изучения различных вопросов математики. Значительное внимание в словаре уделено понятиям теории чисел и теории вероятностей, основным направлениям научной деятельности Буняковского. В работе над словарем Буняковскому помогал советами Остроградский, несколько раз упомянутый в словаре как «наш знаменитый геометр». Дружеские отношения у Буняковского с Остроградским сложились еще во время их пребывания в Париже. Обширные статьи о математической теории

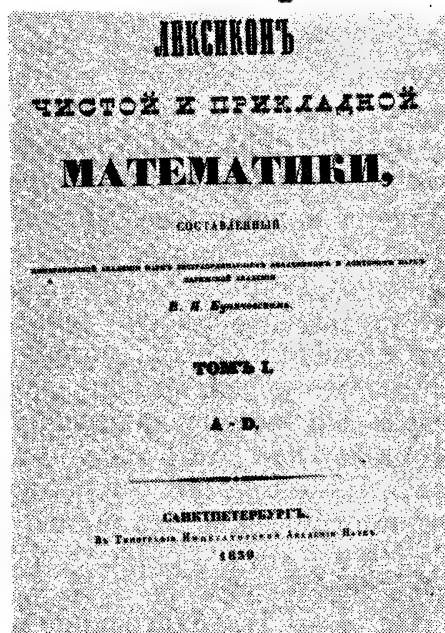
распространения теплоты в твердых телах, криволинейном движении, динамике написаны с учетом соответствующих работ Остроградского. Словарь получил восторженные оценки как замечательный вклад в русскую математическую литературу³².

В январе 1841 г. Буняковского избирают ординарным академиком, на место Коллинса. К этому времени он был уже широко известен не только как автор «Лексикона чистой и прикладной математики», как превосходный преподаватель, но и как видный ученый, опубликовавший значительное число исследований, особенно по теории чисел. Лишь со смертью Буняковского (1889 г.) был расторгнут «вечный брак» его с теорией чисел. Буняковский занимался также различными вопросами математического анализа и, особенно, теории вероятностей. В формировании русской школы теории вероятностей значительную роль сыграло обширное руководство Буняковского «Основания математической теории вероятностей» (1846 г.). Ему принадлежат также работы по геометрии и прикладным вопросам.

Буняковский совмещал научную деятельность с преподаванием математики и механики в нескольких учебных заведениях. Особенно плодотворной в смысле повышения уровня математического образования в стране была его четырнадцатилетняя (с 1846 г.) педагогическая деятельность в Петербургском университете (см. гл. III, 3).

Кроме «Оснований математической теории вероятностей» широкую известность как учебное руководство получила «Арифметика» Буняковского (1844, 1849, 1852 гг.). Первое ее издание было одобрено как руководство для гимназий, переработанное второе издание — для военно-учебных заведений. Книга отличалась четкостью и строгостью изложения, простым общедоступным языком и использовалась в большинстве учебных округов России.

После Остроградского Буняковский был самым авторитетным членом комиссии по пересмотру и окончательной обработке программ преподавания математических предметов в военно-учебных заведениях. Он составил «Программу и конспект арифметики» (1849 г.), «Программу и конспект начальной геометрии» (1851 г.), подготовил второе издание своей «Арифметики», издал для слушателей военно-учебных заведений в своем переводе «Курс начертательной геометрии» Леруа. В 1862 г.



Титульный лист книги «Лексикон чистой и прикладной математики».

³² Подготовленные Буняковским материалы к следующим двум томам словаря сохранились в рукописи.

Буняковский заменил Остроградского на посту главного наблюдателя за преподаванием математических наук в военно-учебных заведениях и занимал этот пост до реорганизации последних (1864 г.). В 1861—1863 гг. участвовал в издании «Энциклопедического словаря, составленного русскими учеными и литераторами». В выпущенных шести томах словаря он поместил около 50 статей и заметок математического и историко-математического содержания. Педагогическая деятельность Буняковского оказала значительное влияние на преподавание математики в высших и средних учебных заведениях.

С 1864 г. Буняковский — вице-президент Петербургской академии наук. В течение всего двадцатипятилетнего пребывания на посту вице-президента он продолжал заниматься и научными исследованиями. Оказывал постоянную поддержку П. Л. Чебышеву с первых его шагов в Петербурге, был для него сначала внимательным наставником, а затем его ближайшим собратом по науке. В 30—50-е годы Буняковский был одним из ведущих математиков России. Остроградский и он своей деятельностью подготовили создание Чебышевым в последующие годы математической школы.

8

Исследования по теории чисел

В исследованиях Буняковского в области теории чисел видны непосредственная преемственность с трудами Эйлера, прекрасное знание работ Лежандра и Гаусса.

Первой его работой в этой области является статья «Исследование о числах»³³ (она была также первой работой, представленной им Петербургской академии наук). В ней дано новое простое доказательство важнейшей в теории делимости целых чисел теоремы Эйлера (имя Эйлера в работе не упоминается), утверждающей, что $a^{\varphi(n)} - 1$ делится на n , если a взаимно просто с n . Затем теорема Эйлера использована для получения обобщений теоремы Вильсона, а также решения неопределенного уравнения $ax \pm by = c$ с целыми взаимно простыми положительными коэффициентами a и b . Все целочисленные решения этого уравнения определяются формулами $x = \alpha - bt$, $y = \beta + at$, где α и β — одно из решений, а t — любое целое число. Найти общую формулу для α и β тщетно пытались Лагранж и Гаусс. Это удалось сделать Г. Либри (1826 г.), в громоздкие формулы которого входили тригонометрические величины. Полученные Буняковским (и значительно позже, в 1841 г., также Коши) формулы $\alpha = ca^{\varphi(b)-1}$ и $\beta = \frac{\pm c}{b} \times (a^{\varphi(b)} - 1)$, благодаря их простоте, сразу же вытеснили формулы Либри. Используя наименьшие целочисленные решения уравнения

³³ V. B o u n i a k o w s k y. Recherches numériques. — Mém. de l'Acad. des Sci., 1831, t. 1, p. 139—152.

$ax - by = 1$, Буняковский дает способ нахождения для дроби $\frac{a}{b}$ подходящих дробей без разложения ее в непрерывную дробь. В заключение он применяет теорему Эйлера к установлению одного факта, связанного с большой теоремой Ферма, который обобщает изложенное Лежандром (1825 г.) утверждение С. Жермен о том, что если возможно решение уравнения $x^m + y^m + z^m = 0$ в целых числах, то при всех показателях, меньших 100, одно из неизвестных необходимо делится на показатель.



Медаль, выбитая в честь пятидесятилетия докторского юбилея В. Я. Буняковского.

Остроумно и с большим мастерством Буняковский выполняет различные преобразования в следующих трех своих работах по теории чисел, относящихся к началу 30-х годов³⁴. Они посвящены сравнениям второй и третьей степеней. В них показано, что сравнения $Ax^2 + By^2 - C \equiv 0 \pmod{N}$ и $Ax^3 + By^3 + Cz^3 + D \equiv 0 \pmod{N}$, коэффициенты которых — числа взаимно простые с N , всегда разрешимы в целых числах, если для первого из них N является нечетным или удвоенным нечетным числом, а для второго — любым целым числом, не делящимся на девять. В доказательствах этих теорем содержится также способ практического нахождения решения указанных сравнений, требующий использования лишь начал теории сравнений и понятия первообразного корня. Он проиллюстрирован на примерах, среди которых приведены сравнения вида $Cz^3 - D \equiv 0 \pmod{p}$ и $By^3 + Cz^3 - D \equiv 0 \pmod{p}$. Теорема Буняковского о сравнениях вида $Ax^2 + By^2 - C \equiv 0 \pmod{N}$ явилась далеко идущим обобщением одного результата Лагранжа, равносильного возможности сравнения $x^2 + By^2 - C \equiv 0 \pmod{p}$, и одного результата Эйлера, равносильного возможности сравнения $x^2 + y^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, p — простое число. В первой работе Буняковского по теории чисел нет даже упоминания о сравнениях, в этих же и последующих

³⁴ V. B u n i a k o w s k y. Sur les congruences du second degré.— Mém. de l'Acad. des Sci., 1831, t. 1, p. 563—581.

В. Я. Б у н я к о в с к и й. Об остаточных сравнениях третьей степени.— Mém. de l'Acad. des Sci., 1833, t. 2, p. 373—392; 1838, t. 1 (III), p. 13—20. В этой работе Буняковский ввел русские термины «простое число» и «первообразный корень», ставшие впоследствии общепринятыми.

его трудах теория сравнений (по Гауссу) положена в основу изложения.

Одной из первых на русском языке оригинальных работ по истории математики, содержащей интересные сведения, является «Краткий исторический обзор успехов теории чисел» (1835 г.) Буняковского. В двух работах, относящихся к концу 30-х годов, Буняковский исследует простые числа. В первой рассмотрены условия делимости суммы $1^m + 2^m + \dots + (p-1)^m$ на p^2 при нечетном простом p , во второй доказано несколько новых теорем, касающихся распознавания простых чисел и разложения чисел на множители. Способ Буняковского требует использования теоремы Эйлера и предварительного изучения сравнения $b^x \equiv 1 \pmod{N}$, где N — исследуемое число, а b взаимно просто с N .

Буняковский стремился расширить область применения теории чисел. В этом направлении он выполнил две работы: в одной из них теория чисел применена к вопросам элементарной геометрии, в другой — к вопросам алгебры³⁵. Буняковский доказал, что из всех описанных около круга правильных многоугольников один только квадрат имеет периметр, соизмеримый с радиусом; из всех вписанных в круг правильных многоугольников один только шестиугольник имеет периметр, соизмеримый с радиусом, и один только треугольник имеет апофему, соизмеримую с радиусом; линия, проведенная из центра круга к вершине угла описанного правильного многоугольника, соизмерима с радиусом только для треугольника. Во второй работе он устанавливает, что при иррациональных $\sqrt[m]{A}$ и $\sqrt[m]{B}$ сумма $\sqrt[m]{A} + \sqrt[m]{B}$ не может быть рациональной. Доказательства проведены для $m = 2, 3, 4, 5, 6$ и 7 , а также для суммы квадратичной и кубической иррациональности. Кроме того, в работе установлена невозможность соотношений

$$\begin{aligned} \sqrt{A} + \sqrt{B} &= \sqrt{C}, & \sqrt{A} + \sqrt{B} &= \sqrt[3]{C}, \\ \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} &= \sqrt{C}, & \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} &= \sqrt[3]{C} \end{aligned}$$

в случае иррациональности соответственно всех входящих в них корней, причем в первом и четвертом соотношениях дополнительно предполагается взаимная простота A , B и C .

К началу 40-х годов относятся статья Буняковского о решении одной задачи диофантова анализа и заметка о применении факториального бинома к решению неопределенных уравнений первой степени³⁶. В статье рассматривается вопрос о минимальном числе членов в пред-

³⁵ В. Я. Буняковский. О правильных многоугольниках, вписанных и описанных около круга. — Мém. de l'Acad. des Sci., 1841, t. 2, p. 423—435.

V. Bouniakowsky. Mémoire sur l'irréductibilité de certaines formules irrationnelles tant littérales que numériques. — I b i d e m, p. 471—492.

³⁶ V. Bouniakowsky. Solution d'un problème de l'analyse de Diophante. — Мém. de l'Acad. des Sci., 1844, t. 3 (V), p. 1—16; Note sur l'emploi du binôme factoriel pour la résolution des congruences du premier degré. — I b i d e m, p. 287—295.

ставлении несократимой рациональной дроби $\frac{a}{b}$, меньшей единицы, произведением чисел вида $\frac{x}{x+1}$ (x — целое положительное) и о виде этих представлений. Вопрос сведен к решению неопределенных уравнений первой степени с двумя неизвестными. Получены условия: минимальное число сомножителей равно соответственно двум, трем, четырем; дан способ нахождения соответствующих представлений, например, оно равно двум, если сумма какого-нибудь делителя $D(ab)$ произведения ab и числа a делится на $b - a$, при этом $\frac{a}{b} = \frac{p}{p+1} \cdot \frac{u}{u+1}$, где $p = \frac{D(ab)+a}{b-a}$ и $u = \frac{a(p+1)}{D(ab)}$. В заметке решение уравнения $Mx - Ny = 1$ путем использования разложения N на простые множители сведено к решению уравнений вида $ax - py_1 = 1$, где p — простое число, а a больше p и меньше $2p$. Для последнего найдено наименьшее решение в целых положительных числах.

Несколько лет спустя Буняковский предложил³⁷ метод решения неопределенных однородных уравнений первой степени со многими неизвестными вида $ax + by + cz + \dots + et = 0$. Суть метода состоит в присоединении к изучаемому однородному уравнению соответствующего числа неоднородных уравнений первой степени с произвольными целыми коэффициентами при тех же неизвестных и последующем решении системы получившихся уравнений. Буняковский заметил также, что неопределенное уравнение с шестью неизвестными $x^m X^n + y^m Y^n = z^m Z^n$ при взаимно простых m и n имеет сколько угодно решений в целых числах.

Все рассмотренные теоретико-числовые работы Буняковского относятся к алгебраической теории чисел, которую и в дальнейшем он продолжал пополнять важными результатами. В конце 40-х годов Буняковский занялся исследованием также аналитических методов в теории чисел, изучением сумм делителей чисел. Результаты этого исследования он затем применил к квадратичным формам³⁸. В работе о различных новых формулах, относящихся к сумме делителей чисел (1850 г.), Буняковский, широко используя разложения функций в степенные ряды, получает формулу

$$(1 - N) \int N + (3^2 - \overline{N - 1.2}) \int (N - 1.2) + (5^2 - \overline{N - 2.3}) \int (N - 2.3) + \\ + (7^2 - \overline{N - 3.4}) \int (N - 3.4) + \dots = 0.$$

³⁷ V. B o u n i a k o w s k y. Notes sur quelques points de l'analyse indéterminée. — Bull. de la cl. phys.-math. de l'Acad. des Sci. de St-P., 1848, t. 6, col. 196—208.

³⁸ V. B o u n i a k o w s k y. Recherches sur différentes lois nouvelles relatives à la somme des diviseurs des nombres. — Mém. de l'Acad. des Sci., 1850, t. 4 (VI), p. 259—295; Nouvelle méthode dans les recherches relatives aux formes quadratiques des nombres. — I b i d e m, 1853, t. 5 (VII), p. 303—322.

Она содержит суммы делителей чисел одной четности (если окажется, что в последнем члене будет выражение $\int 0$, то его следует заменить числом $\frac{N}{6}$), в то время как формула Эйлера

$$\int n = \int (n-1) + \int (n-2) - \int (n-3) - \int (n-7) + \int (n-12) + \dots$$

($\int 0$ при этом заменяется на n) содержит суммы делителей как четных, так и нечетных чисел. Буняковский рассматривает различные видоизменения своей формулы (к одному из них независимо от Буняковского в 1856 г. пришел Лиувилль; в связи с этим Буняковский выступил с заметкой о своем приоритете), а также ряд вытекающих из них предложений о числе тех или иных представлений целых чисел, дает таблицу сумм делителей чисел от 1 до 210. Аналогичная таблица Эйлера содержала суммы делителей чисел до 100.

Применяя к изучению квадратичных форм формулы для сумм делителей чисел, как формулу Эйлера, так и свои формулы, и используя свою теорему о сумме делителей квадратов и удвоенных квадратов, Буняковский разработал новый метод представления целых чисел с помощью квадратичных форм. Особое место занимают утверждения Буняковского, касающиеся простых чисел: простые числа формы $16e + 13$ и $16e + 5$, а значит, и формы $8k + 5$ представимы в виде суммы двух квадратов (для чисел формы $8k + 5$ это было доказано раньше другим способом) и др. Они приводят к следующей теореме: всякое простое число вида $16k + 7$ necessarily имеет вид $2u^2 + Qv^2$, где Q — простое число формы $8e + 5$. Этой теоремой устанавливалось очень простое соотношение между двумя простыми числами. Она справедлива и для простых чисел P вида $16k + 15$ (кроме очевидного представления с $u = v = 1$) при условии, что $P = 2$ и P — последовательные простые числа. Предложенный метод привлек к себе внимание. Лиувилль заметил (1857 г.), что с помощью этого метода можно доказать представимость удвоенного простого числа вида $8k + 3$ в форме $u^2 + Qv^2$ при Q того же вида.

Основной аналитический метод в теории чисел — разложение функций в ряды — ведет свое начало от Эйлера (1748 г.). Эйлер применял диофантов анализ для освобождения от иррациональностей при неопределенном интегрировании. Буняковский показал, что и, наоборот, с помощью неопределенного интегрирования можно получить результаты, полезные при рассмотрении задач диофантова анализа³⁹.

Учение о многочленах Буняковский пополнил интересными результатами теоретико-числового характера. В этом отношении обращает на себя внимание его работа о числовых делителях целых рациональных функций⁴⁰. Основным ее результатом является метод для

³⁹ V. B o u n i a k o w s k y. Note sur l'emploi des procédés élémentaires du calcul intégral dans des questions relatives à l'analyse de Diophante. — Bull. de la cl. phys.-math., 1853, t. 11, col. 65—74.

⁴⁰ V. B o u n i a k o w s k y. Sur les diviseurs numériques invariables des fonctions rationnelles entières. — Mém. de l'Acad. des Sci., 1857, t. 6 (VIII), p. 304—329.

нахождения наибольшего общего делителя N всех значений многочлена $f(x)$ с целочисленными коэффициентами, принимаемых им при целочисленных значениях x . Число N является делителем свободного члена a_m многочлена $f(x)$. Показатели степеней, в которых простые сомножители a_m войдут в N как сомножители, определяются путем последовательного деления $f(x)$ на факториальные биномы вида $(x - \overline{k - 1} \times \times p - 1) (x - \overline{k - 1} \cdot p - 2) (x - \overline{k - 1} \cdot p - 3) \dots (x - kp)$, где p является простым числом, не превосходящим m — степени $f(x)$, а $k = 1, 2, \dots$, причем kp не превосходит m . Для облегчения вычислений при практическом определении N дана таблица, где для факториалов $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot kp$ указаны значения λ наивысшей степени p^λ , которая делит этот факториал. Таблица содержит значения λ для $p = 2, 3, 5, 7$ при k от 1 до 50, 33, 20 и 14 соответственно.

В конце статьи Буняковский высказывает гипотезу, обобщающую известную теорему (Дирихле, 1837 г.) о том, что в арифметической прогрессии с взаимно простыми первым членом и разностью (иными словами, среди целочисленных значений соответствующей линейной функции $a_0x + a_1$) имеется бесконечное множество простых чисел. Он считает, что это свойство верно вообще для $\frac{f(x)}{N}$, где $f(x)$ — неприводимый многочлен любой степени с целочисленными коэффициентами (значения x также целочисленны), например для $\frac{x^9 - x^3 + 2520}{504}$. Гипотеза Буняковского остается до сих пор недоказанной даже для случая такого простого неприводимого многочлена, как $x^2 + 1$, — неизвестно, конечным или бесконечным является множество простых чисел такого вида.

Летом 1856 г. Буняковский представил Академии наук свою работу «Опыт математической методологии, приложенной к теории чисел». Работа осталась незаконченной и не была опубликована. Основное ее содержание составляет систематическая и полная для того времени классификация методов и приемов исследования, применяемых в теории чисел, а также свод важнейших теорем, различных формул и таблиц по теории чисел.

Теоретико-числовые работы Буняковского ⁴¹, относящиеся к концу 50-х годов, содержат решение некоторых частных вопросов алгебраической теории чисел. Изложенный материал иллюстрирован различными подробно рассмотренными примерами. К аналитической теории чисел относится большой мемуар Буняковского «Исследования о некоторых числовых функциях». В нем на основе рассмотрения ряда

$$\psi(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \dots$$

⁴¹ V. B u n i a k o w s k y. Sur une extension du théorème de Wilson. — Bull. de la cl. phys.-math., 1857, t. 15, col. 202—205; Sur un problème de position relatif à la théorie des nombres. — I b i d e m, 1858, t. 16, col. 67—78; Sur la transformation des modules dans les congruences du premier degré. — I b i d e m, 1859, t. 17, col. 129—135.

(для дзета-функции) и его целых положительных степеней установлено большое число соотношений между различными числовыми функциями, в частности между суммой и количеством делителей числа. Буняковский отмечает, что развитые им приемы установления свойств теоретико-числовых функций позволяют легко доказать некоторые из весьма полезных в теории чисел тождеств, которые Лиувилль начиная с 1858 г. помещал без доказательств в своем журнале. В качестве примеров он доказывает три тождества Лиувилля. Имя Буняковского стоит одним из первых в ряду ученых его и последующих поколений, которым удалось установить справедливость формул Лиувилля, сначала с помощью аналитических средств, включая эллиптические функции, а затем и элементарным путем, которым пользовался Лиувилль. Вопросы аналитической теории чисел нашли отражение в двух работах Буняковского начала 70-х годов. Рассмотренные в них задачи разложения чисел на слагаемые непосредственно примыкают к исследованиям Эйлера, составившим основу аддитивной теории чисел.

Остальные работы Буняковского в рассматриваемой области относятся к алгебраической теории чисел. Его внимание привлекают различные вопросы теории сравнений, вообще теории делимости, а также некоторые задачи неопределенного анализа.

В 1865 г. Буняковский опубликовал в «Записках Академии наук» работу, посвященную решению предложенных Бонкомпаньи (1864 г.) задач о нахождении целочисленных арифметических прогрессий, сумма кубов n последовательных членов которых равна кубу некоторого числа, кубу следующего члена прогрессии. Вслед за этим появилась работа Буняковского, в которой рассмотрено решение неопределенного уравнения $2^\mu - pE = \pm 1$ (E — целое, p — нечетное число), или сравнения $2^\mu \mp 1 \equiv 0 \pmod{p}$, именно нахождение наименьшего значения μ_0 показателя μ , для которого $2^{\mu_0} - 1$ или $2^{\mu_0} + 1$ делится на p . Буняковский предлагает способ нахождения такого решения. Этот способ он впоследствии использовал при рассмотрении ряда вопросов теории вычетов.

В конце 60-х годов появились работы Буняковского по теории вычетов. Одним из наиболее интересных результатов, полученных им в этой области, является доказательство закона взаимности простых чисел. Первая статья содержит некоторые формулы, связанные с рассмотрением квадратичных вычетов и невычетов простых чисел вида $4n + 1$ и вида $4n + 3$. Основное содержание второй статьи составляет решение сравнения $q \cdot 3^x \mp r \equiv 0 \pmod{p}$, p — нечетное число. В следующих двух статьях Буняковский прежде всего останавливается на доказа-

тельстве закона взаимности простых чисел $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$.

Упомянув о доказательстве этого важного в теории чисел закона Лежандром, Гауссом, Якоби, Дирихле, Куммером, он считает свое доказательство не лишенным интереса благодаря простоте использованных им средств. Выражение для символа Лежандра, полученное Буняковским, по своей форме существенно отличается от гауссова, во мно-

гих случаях оно сокращает вычисления при определении значения этого символа.

Вопросами дальнейшего упрощения вычисления символа Лежандра Буняковский продолжал интересоваться и позднее. В работе «О некоторых новых предложениях, относящихся к символу Лежандра $(\frac{a}{p})$ »⁴² он предлагает некоторые новые формулы для этого, в том числе не требующие нахождения целых частей чисел, приводит много числовых примеров. Этой работой он завершил свои исследования по теории вычетов.

Буняковский с большим вниманием отнесся к трудам русского математика-самоучки И. М. Первушина (1827—1900), воспитанника Пермской духовной семинарии и Казанской духовной академии. Первушин, проявив исключительное трудолюбие и поразительную настойчивость, выполнил чрезвычайно кропотливые и весьма сложные исследования, характеризующие его как замечательного вычислителя, талантливого математика. Полученные результаты он на протяжении многих лет, начиная с 1877 г., посылал в Петербургскую академию наук, где их большей частью рассматривал Буняковский. Главным предметом занятий Первушина было исследование природы чисел вида $2^{2^m} \pm 1$. Он установил делимость чисел Ферма $2^{2^m} + 1$ с $m = 12$ и $m = 23$; первое из них делится на $114\,689 = 7 \cdot 2^{14} + 1$, второе, содержащее 2 525 223 цифры, — на простое число $167\,772\,161 = 5 \cdot 2^{25} + 1$. Первое составное число Ферма нашел Эйлер (1732 г.), для него $m = 5$, а делителем является число $641 = 5 \cdot 2^7 + 1$. Эти новые случаи делимости чисел Ферма представляли несомненный интерес. Буняковский «сообщил о них в своих заметках, опубликованных в 1878 и 1879 гг. в журналах Академии наук. Проверку делимости первого из указанных чисел провел сам Буняковский, второго — Золотарев. В заметке, написанной Буняковским совместно с В. Г. Имшенецким, отмечался приоритет Первушина в установлении (1883 г.) простоты числа $2^{61} - 1 = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951$; длительное время наибольшим известным простым числом считалось число $2^{31} - 1$, простоту которого установил Эйлер (1772 г.).

Определенный интерес представляет статья Буняковского «Об одном видоизменении способа, известного под названием Эратосфенова решета» (1882 г.). В отличие от Эратосфена Буняковский выделяет из последовательности испытываемых чисел простые числа, рассматривая отдельно числа, оканчивающиеся на 1, на 3, на 7, на 9, и используя при этом решения вспомогательных неопределенных уравнений первой степени (довольно простого вида). Такой прием оказывается полезным.

Другие теоретико-числовые работы Буняковского, опубликованные в 80-е годы, связаны с рассмотрением различных свойств числовой функ-

⁴² V. B o u n i a k o w s k y. Sur quelques propositions nouvelles, relatives au symbole de Legendre $(\frac{a}{p})$. — Bull. de l'Acad. des Sci. de St-P., 1877, t. 22, col. 358—377.

ции $E(x)$, как использованных ранее Буняковским при решении ряда вопросов теории делимости, так и некоторых новых. Формула

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\frac{p-5}{4}} E(\sqrt{\mu p}) = \frac{(p-1)(p-5)}{12}$$

(p — простое число вида $4n+1$), опубликованная Буняковским без доказательства в 1869 г., привлекла внимание математиков, в том числе Эрмита. Доказательство формулы Буняковский дал в заметке, напечатанной в «Докладах Парижской академии наук» (1882 г.). Оно явилось началом большой работы Буняковского «Доказательство некоторых предложений, относящихся к числовой функции $E(x)$ »⁴³. Он провел доказательства также других аналогичных формул, в том числе формулы

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=k^2 p} E \sqrt{\mu p} = \frac{k[4k^2 p^2 - 3(k-1)p + 2]}{6}$$

(k — целое положительное).

Обобщая и дополняя мемуар «О суммовании численных таблиц по приближению»⁴⁴, в котором, в частности, рассмотрен вопрос о нахождении значения сумм $\sum \sqrt{N}$ и $\sum \sqrt[3]{N}$, распространенных на последовательность натуральных чисел $1, 2, 3, \dots, N$, Буняковский остановился на выводе формул

$$\sum_{u=1}^N E \sqrt{u} = \frac{m(m+1)(4m+5)}{6}$$

при $N = (m+1)^2 - 1$ и

$$\sum_{u=1}^N E \sqrt[3]{u} = \frac{n(n+1)^2(3n+4)}{4}$$

при $N = (n+1)^3 - 1$, дополнительных слагаемых в них в случае, если N не является числом указанного вида⁴⁵, а также видоизмененных формул, если сумма распространяется на последовательность только

⁴³ V. B u n i a k o w s k y. Démonstration de quelques propositions relatives à la fonction numérique $E(x)$. — Bull. de l'Acad., 1883, t. 28, col. 257—267, 411—425; 1884, t. 29, col. 250—272, 503—520.

Исследование свойств функции E и ее применений Буняковский продолжил в статье «Об одном видоизменении функции $E(f(x))$ и о приложении измененного приема к исследованию некоторых свойств квадратичных и неквадратичных вычетов простых чисел вида $4k+1$ » (Записки Академии наук, 1886, т. 52, стр. 124—141).

⁴⁴ В. Я. Б у н я к о в с к и й. О суммовании численных таблиц по приближению. — Записки Академии наук, 1867, т. 12, Приложение № 4, 41 с.

⁴⁵ Выведена также формула

$$\sum_1^N E \sqrt[m]{u} = \sum_1^n [n(n+1)^m - n^m] \text{ при } N = (n+1)^m - 1.$$

четных или только нечетных натуральных чисел. Рассмотренные в качестве применений числовые примеры охватывают случаи, когда такого рода суммы являются числами определенного вида, например простыми.

Последней опубликованной работой Буняковского является «Заметка об одной формуле, относящейся к теории чисел»⁴⁶. В ней доказано, что разность между данным числом A и суммой $S(A)_p$ цифр этого числа, выраженного по системе нумерации с основанием p , разделенная на $p - 1$, равна $E\left(\frac{A}{p}\right)$, так что $E\left(\frac{A}{p}\right) = \frac{A - S(A)_p}{p - 1}$. Показано применение последней формулы и ее обобщения к решению таких задач теории чисел, как определение кратности простого делителя числа (факториала), решение неопределенных уравнений первой степени, вычисление суммы квадратичных вычетов простых чисел, вычисление символа Лежандра. Для решения этих задач предложены различные способы, в том числе изложенные выше приемы самого Буняковского. В этой работе Буняковский подвел их решение под одну общую, причем весьма простую, формулу.

В теоретико-числовых работах Буняковский затрагивал различные вопросы. В них он решал некоторые новые задачи, предлагал новые приемы решения задач, рассмотренных другими учеными. Буняковский пополнил теорию чисел многими результатами, однако эти результаты большей частью носили частный характер и потому не оказывали ощутимого влияния на научные интересы петербургских математиков. Они оставались в стороне от основного направления теоретико-числовых исследований Петербургской математической школы, сложившегося в трудах Чебышева и его учеников.

9

Работы по теории вероятностей и математическому анализу

Вторым основным направлением в научной деятельности Буняковского была теория вероятностей. Ей, как и теории чисел, он уделил много внимания в «Лексиконе чистой и прикладной математики». Первые работы Буняковского по теории вероятностей относятся к середине 30-х годов. В них рассмотрено применение теории вероятностей к решению конкретных задач. Решив поставленную в первой работе задачу, Буняковский нашел вероятность z наличия у произвольно взятого уравнения $x^2 + px + q = 0$, в котором p и q — отличные от нуля целые числа, заключающиеся между $-m$ и $+m$, только вещественных корней, $z = \frac{n + m^2}{2m^2}$, где n — число решений формулы $p^2 - 4q \geq 0$. Из формул Буняковского следует, что при неограниченном возрастании m отношение числа уравнений с вещественными корнями к числу уравнений с мнимыми корнями пропорционально $\sqrt{m}$.

⁴⁶ В. Я. Буняковский. Заметка об одной формуле, относящейся к теории чисел. — Записки Академии наук, 1887, т. 55, Приложение № 5, 16 с.

В работе предложен способ решения такой же задачи для уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, применимый также для уравнения $ax^3 + bx + c = 0$. Вторая задача, рассмотренная Буняковским, как и известная задача Бюффона (1777 г.), дает основанный на теореме Я. Бернулли (законе больших чисел, согласно Пуассону) способ определения числа π . Вместо бросания, как у Бюффона, тонкого цилиндра на плоскость, покрытую равноотстоящими параллельными прямыми, Буняковский рассматривает бросание тонкого цилиндра длины $2r$ на плоскость, покрытую равносторонними треугольниками с длиной стороны L . Вероятность z попадания цилиндра на одну из сторон треугольника при этом выражается формулой

$$z = \frac{8\sqrt{3}rL - r^2\left(16 + 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi\right)}{\pi L^2} \quad \left(r < \frac{L}{2\sqrt{3}}\right),$$

из которой по результатам достаточного числа бросаний (в качестве примера указано 100 000) и может быть найдено приближенное значение π . В следующих задачах подсчет числа встреч цилиндра с окружностью, с другими линиями приводит Буняковского к аналогичным формулам, позволяющим путем проведения достаточного числа опытов определить приближенно дугу по ее синусу, эллиптический интеграл Лежандра второго рода, значение логарифмической функции ⁴⁷.

Первостепенное значение для развития теории вероятностей в России имело обширное содержательное руководство Буняковского «Основания математической теории вероятностей» (1846 г.). Работу над ним он начал в 1841 г. Книга была первым сочинением на русском языке, в котором подробно изложены математические начала теории вероятностей и важнейшие ее приложения, она полностью отражала уровень, достигнутый наукой о случайных явлениях.

Теоретической основой книги Буняковского являются правило нахождения вероятностей сложных событий и теорема Я. Бернулли. Последняя доказана по Лапласу с использованием формулы Стирлинга. Этот теоретический материал проиллюстрирован множеством подробно рассмотренных примеров, касающихся разнообразных игр, лотерей и других вопросов. Он составляет содержание первых семи глав. Седьмая глава — о законах вероятности при неопределенном числе статочностей — дает основу для изучения апостериорных вероятностей. Приложение теоретического материала дано в последующих главах — о вероятностях жизни человеческой (с разъяснением таблиц смертности и их применений), о пожизненных доходах, вдовьих кассах, тонтинах, сберегательных кассах и о страховых учреждениях вообще, о наивыгоднейших результатах наблюдений, о свидетельских показаниях. Главы о непосредственном применении теории вероятностей составляют больше половины книги и придают ей в целом практическую направ-

⁴⁷ Такого рода задачи явились основой развития метода статистических испытаний, сложившегося в последнее время и получившего применение в качестве одного из методов решения разнообразных математических задач на современных быстродействующих электронных счетных машинах.

ленность. Заключительная, двенадцатая, глава — краткий исторический очерк постепенного развития математической теории вероятностей.

Значительная практическая направленность руководства Буняковского, основного его труда в этой области, еще более характерна для его последующих работ. В конце 50-х годов он принимал деятельное участие в решении теоретических вопросов, касающихся деятельности эмеритальной кассы Морского ведомства, а затем и других пенсионных касс. В дальнейшем Буняковский занялся изучением различных вопросов статистики народонаселения России. Его работы в области теории вероятностей во многом способствовали распространению, преподаванию и разнообразным применениям этой науки в России.

В области математического анализа Буняковского привлекли отдельные вопросы дифференциального и интегрального исчисления. Еще в начале своей научной деятельности он опубликовал заметку о максимумах и минимумах функции двух переменных ⁴⁸. В ней в связи с одним замечанием Лагранжа в «Теории аналитических функций» выведены признаки наличия максимума или минимума в точке, в которой дифференциалы первых трех порядков функции обращаются в нуль. Для этого проведено непосредственное исследование знака многочлена четвертой степени, выражающего значение дифференциала четвертого порядка функции в рассматриваемой точке.

Второй работой Буняковского в области математического анализа является статья «Об алгебраических интегралах в разностях рациональных дробей» ⁴⁹. Ее появление было вызвано исследованиями Остроградского об интегрировании алгебраических функций, особенно его первой работой об интегрировании рациональных дробей. Буняковский переносит результаты этой работы на интегралы в конечных разностях.

Он показывает, что $z = \sum \frac{f(x, y)}{F(x, y)}$, где y — алгебраическая функция x (Δx для простоты считается равным единице), является алгебраической функцией x (рациональной от x и y) при тех же условиях, что и $\int \frac{f(x, y)}{F(x, y)} dx$, а также что способы нахождения такой функции, предложенные Остроградским для $\int \frac{f(x, y)}{F(x, y)} dx$, остаются в силе и для $\sum \frac{f(x, y)}{F(x, y)}$. В случае разностного интеграла они позволяют либо непосредственно найти значение интеграла, если он выражается алгебраически, либо установить невозможность такого выражения.

Примерно 20 лет спустя Буняковский занялся изучением вопроса о максимумах и минимумах функции многих переменных ⁵⁰. Он дока-

⁴⁸ V. B o u n i a k o w s k y. Sur les maxima et les minima des fonctions à deux variables. — Mém. de l'Acad. des Sci., 1831, t. 1, p. 463—468.

⁴⁹ В. Я. Б у н я к о в с к и й. Об алгебраических интегралах в разностях рациональных дробей. — Mém. de l'Acad. des Sci., 1838, t. 1 (III), p. 205—223.

⁵⁰ V. B o u n i a k o w s k y. Note sur les maxima et les minima d'une fonction symétrique entière de plusieurs variables. — Bull., de la cl. phys.-math., 1854, t. 12, col. 353—361; Développements analytiques pour servir à compléter la théorie des maxima et minima des fonctions... — Mém. de l'Acad. des Sci., 1859, t. 7 (IX), p. 151—174.

зал, что максимум или минимум целой симметричной функции многих независимых переменных, степень которой меньше четырех, всегда достигается при равных между собой значениях всех переменных. На примерах показано, что это не распространяется на такую же функцию четвертой и более высоких степеней. Наконец, Буняковский распространил результаты своей первой работы о максимумах и минимумах на функции многих переменных, исследовав общий случай, привлекавший внимание еще П. Рахманова (1810 г.), если первым из необращающихся в нуль в рассматриваемой точке дифференциалом функции является дифференциал какого-то четного порядка. Исследование знака соответствующего многочлена четного порядка, выражающего значение этого дифференциала в рассматриваемой точке, проведено с помощью теоремы Штурма. Этот общий случай изучал также Коллинс, а из зарубежных ученых — Сильвестр и др.

Значительно больший интерес представляют работы Буняковского по интегральному исчислению⁵¹. Изучая вопросы преобразования кратных интегралов, Буняковский заметил, что величина кратного интеграла как функция параметров может быть различной при замене в нем пере-

менных, и показал это на примере двойного интеграла $\int_0^{\infty} \int_0^x F(x, y, \lambda, \mu) dx dy$

при переходе в нем к полярным координатам. Он разъяснил кажущийся парадокс и проиллюстрировал свое разъяснение на примере решения задачи о нахождении по методу наименьших квадратов для функции $\sqrt{x^2 + y^2}$ линейной функции $\lambda x + \mu y$, которая при $y < x$ наименее уклоняется от значения $\sqrt{x^2 + y^2}$ (решению соответствуют значения $\lambda = 0,934318...$ и $\mu = 0,426949...$).

Наиболее существенные новые результаты получены Буняковским в работе о некоторых неравенствах, касающихся обыкновенных интегралов и интегралов в конечных разностях (1859 г.). В ней, как и во многих местах «Оснований математической теории вероятностей», используется трактовка определенного интеграла по Остроградскому:

$$M_{x_0}^X f(x) = \frac{\int_{x_0}^X f(x) dx}{X - x_0},$$

причем $M_{x_0}^X f(x)$ означает среднее арифметическое значений функции

⁵¹ V. B u n i a k o w s k y. Considérations sur un cas spécial qui se présente dans la transformation des intégrales multiples.— Bull. de la cl. phys.-math., 1859, t. 17, col. 433—439; Sur quelques inégalités concernant des intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies.— Mém. de l'Acad. des Sci., 1859, t. 1, p. 1—18; Note sur une certaine transformation des intégrales.— Bull. de l'Acad., 1860, t. 2, col. 136—142.

В. Я. Б у н я к о в с к и й. О некоторых частных случаях интегрируемости в конечном виде дифференциала $\frac{x + c_1}{x + c_2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}}$ и других выражений подобного вида.— Записки Академии наук, 1863, т. 3, Приложение № 2.

$f(x)$ для всех значений x от x_0 (включительно) до x (исключительно). Исходя из приведенной формулы и используя то обстоятельство, что среднее геометрическое меньше среднего арифметического и больше среднего гармонического, Буняковский непосредственно получает неравенство

$$(X - x_0) \log \left(\frac{X - x_0}{\int_{x_0}^X \frac{dx}{f(x)}} \right) < \int_{x_0}^X \log f(x) dx < (X - x_0) \log \frac{\int_{x_0}^X f(x) dx}{X - x_0}$$

и далее, по аналогии с соответствующим соотношением для произведения суммы n квадратов величин и суммы квадратов того же количества величин, приходит к важнейшему в математическом анализе неравенству

$$\int_{x_0}^X \varphi^2(x) dx \int_{x_0}^X \psi^2(x) dx > \left(\int_{x_0}^X \varphi(x) \psi(x) dx \right)^2,$$

особо отмечая его частные случаи при $\varphi(x) = \frac{1}{\psi(x)} = \sqrt{f(x)}$, а также $\psi(x) = 1$ (подынтегральные функции предполагаются непрерывными и положительными между x_0 и X). Это неравенство Буняковского применяется при изучении многих вопросов математики. Долгое время его приписывали Г. Шварцу (1843—1921), который опубликовал такое же неравенство 16 лет спустя после Буняковского (1875 г.).

С помощью полученных неравенств Буняковский просто получает формулу конечных приращений, устанавливает равносильный признакам Дюамеля и Раабе свой признак сходимости рядов. В заключение он отмечает, что неравенства сохраняются, если в них вместо $\int_{x_0}^X f(x) dx$

ВЗЯТЬ

$$\sum_{x_0}^X f(x) = f(x_0) + f(x_0 + 1) + f(x_0 + 2) + \dots + f(X),$$

а также показывает аналогичные применения соответствующих неравенств для интегралов в конечных разностях.

В названной работе 1860 г. Буняковский вывел формулу

$$\sum_{x_0}^X \varphi(x) dx = \left(\frac{\varphi(x_0)}{\psi(y_0)} \right)^2 \frac{\psi'(y_0 + \lambda[Y - y_0])}{\varphi'(y_0 + \lambda[X - x_0])} \int_{y_0}^Y \psi(y) dy,$$

при определенных предположениях о входящих в нее функциях.

Последняя работа Буняковского по интегральному исчислению, и вообще по математическому анализу, посвящена вопросам интегриро-

вания в конечном виде с помощью алгебраических и логарифмических функций. В ней рассматривается интеграл

$$\int X dx = \int \frac{f(x)}{F(x)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}},$$

в котором $\frac{f(x)}{F(x)}$ — рациональная дробь. Вводятся понятия возвратной $\varphi(x)$ и знакопеременной возвратной $\psi(x)$ функции, т. е. таких, что $\varphi(x) = \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ и $\psi(x) = -\psi\left(\frac{1}{x}\right)$ соответственно, отмечаются их

свойства и доказывается, с помощью подстановки $x + \frac{1}{x} = z$, что

всякую рациональную дробь $\frac{f(x)}{F(x)}$ можно представить в виде суммы двух дробей, одна из которых является возвратной, другая — знакопеременной возвратной функцией. Используя это представление и показав, что многочлен $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ с помощью линейного преобразования всегда можно привести к виду

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Ax + 1 = x^2 \left[x^2 + \frac{1}{x^2} + A \left(x + \frac{1}{x} \right) + B \right],$$

Буняковский устанавливает: если тождественно выполняется соотношение $f(x) F\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{x}\right) F(x) = 0$, т. е. дробь $\frac{f(x)}{F(x)}$ является знако-

переменной возвратной функцией, то $\int X dx$ выражается в конечном виде с помощью алгебраических и логарифмических функций. Применительно к случаю, когда $f(x)$ и $F(x)$ — многочлены первой или второй степени (одновременно), это приводит к заключению, что при дроби $\frac{f(x)}{F(x)}$, равной

$\frac{x \pm 1}{x \mp 1}$, $\frac{x^2 + bx + 1}{x^2 - 1}$, $\frac{x^2 - 1}{x^2 + bx + 1}$ (b — произвольное число, включая нуль), $\frac{x^2 - 1}{x}$, $\frac{x}{x^2 - 1}$ (также сумме, разности, а в некоторых случаях

произведению и частному этих выражений, взятых конечное число раз), интеграл $\int X dx$ выражается в конечном виде. Если дробь $\frac{f(x)}{F(x)}$ не яв-

ляется знакопеременной возвратной функцией, то предлагается выделять дробь, обладающую таким свойством, сначала из дроби $\frac{f(x)}{F(x)}$, затем

из рациональной дроби оставшегося непроинтегрированным выражения и т. д. В ряде случаев это приводит к цели. Учитывая все сказанное,

Буняковский заключает, что при дроби $\frac{f(x)}{F(x)}$, равной $\frac{x + C_1}{x + C_2}$ или

$\frac{x^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$, существует бесконечное число случаев (систем зна-

чений C_1 и C_2 , коэффициентов многочленов второго порядка), когда $\int X dx$ выражается в конечном виде с помощью алгебраических и логарифмических (или круговых) функций. Работа Буняковского — одно из первых исследований, в котором предлагался общий подход к изучению вопроса о псевдоэллиптичности $\int X dx$. Отдельные случаи псевдо-

эллиптичности были известны еще Эйлеру, который, например, вычислил в конечном виде $\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4} dx$, рационализовав его с помощью подстановки простейшего вида. Этот вопрос привлекал внимание Чебышева, предложившего общий метод его решения с помощью непрерывных дробей. Буняковский использует для решения более простые средства.

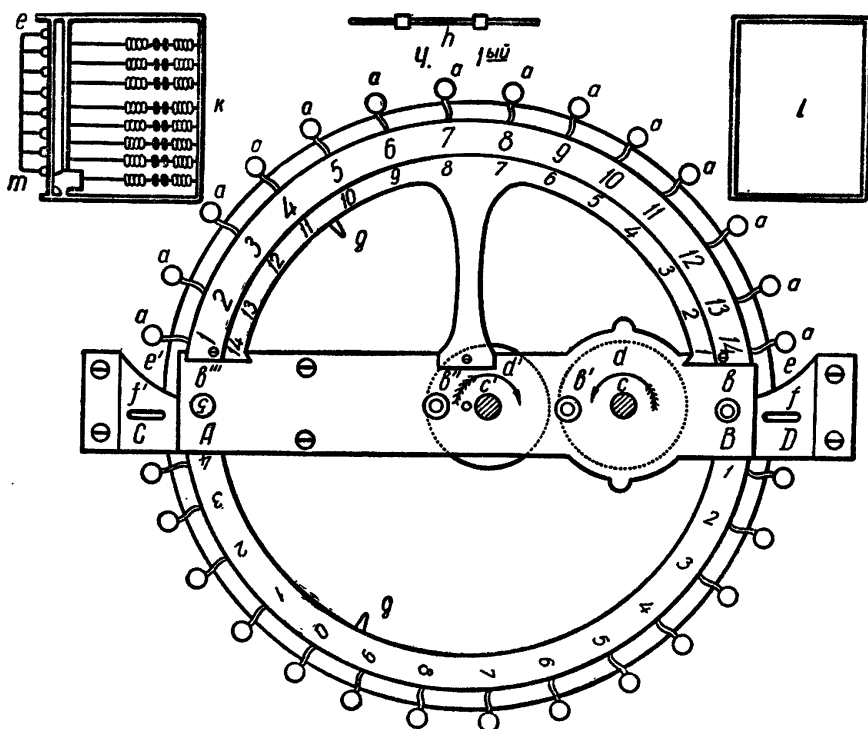
10

Работы по геометрии и прикладным вопросам

В начале 40-х годов Буняковский занялся исследованием теории параллельных линий. Этому вопросу посвящены все его собственно геометрические работы. Их появление свидетельствует о том, что Буняковский разделял отрицательное отношение к работам Лобачевского, сложившееся в Петербургской академии наук после отзыва Остроградского и высказываний П. Н. Фусса и Э. Д. Коллинса. Фусс и Коллинс считали исследования Лобачевского «бесполезными умозрениями», примером которых называли «умозрения о плоских треугольниках, в которых сумма углов будто бы не равна двум прямым».

Сначала в работах по теории параллельных линий Буняковский совсем не называет имени Лобачевского, хотя в его намерения и входило «познакомить любителей геометрии с постепенным развитием и современным состоянием основного вопроса о теории параллельных линий, столь важного для науки». Решение этого вопроса было уже дано Лобачевским. Однако открытие Лобачевского осталось не понятым Буняковским. Неоднократные его попытки доказать аксиому параллельных по существу были выступлением против идей Лобачевского. Возвратившись к вопросу о параллельных линиях в 1872 г., когда уже начали появляться отдельные выступления с признанием заслуг Лобачевского, Буняковский снова выразил отрицательное отношение к его открытию. В своих работах он изложил критику различных попыток доказательства постулата Евклида, а также собственные взгляды по этому вопросу. Исследования Буняковского по теории параллельных линий с принципиальной точки зрения несостоятельны. Они сохраняют лишь некоторый исторический интерес. Наиболее ценным из них является работа «Параллельные линии» (1853 г.).

Наряду с теоретическими Буняковский постоянно занимался прикладными вопросами. В статье по механике, в частности, он показал, что число положений равновесия однородной треугольной призмы, погруженной в жидкость, не может быть больше 15, и высказал предположение, что таких положений не больше 12. Последнее в 1855 г. доказал А. Ю. Давидов. В 1842 г. Буняковский решил предложенную ему Б. С. Якоби задачу об определении числа особого вида сочетаний. К этой задаче Якоби пришел в работах по электромагнитному телеграфу. Позднее внимание Буняковского привлек вопрос о наивыгоднейшем размещении громоотводов (1863 г.).



Самосчеты В. Я. Буняковского.

Постоянно интересовался Буняковский средствами вычислений и математическими приборами. В исследованиях по этим вопросам он проявил себя и как видный изобретатель. К годам учения (1824 г.) относится подвижная таблица, придуманная им для решения без всякого вычисления основных вопросов церковного календаря (описание опубликовал в 1857 г.). К 50-м годам относятся его работы о планиметрах. Известные к этому времени планиметры, включая планиметр-самокат П. А. Зарубина (1854 г.), были весьма сложными, малонадежными и дорогостоящими. Этих недостатков, в значительной мере, нет в планиметре-пантографе Буняковского (1855 г.). В 1860 г. Буняковский установил также теоретическую возможность построения свободных планиметров, т. е. планиметров, целиком свободно перемещающихся вдоль контура фигуры.

К середине прошлого века метод наименьших квадратов получил широкое распространение. В трудах астрономов России В. Струве, О. Струве, Х. Петерса, а также других ученых значительное место занимала математическая обработка результатов наблюдений. Исследования М. Г. Паукера способствовали все более широкому использованию этого метода при обработке опытных данных в физике. Непосредственное практическое применение метода наименьших квадратов часто сопряжено со значительной вычислительной работой. Для облегчения ее выполнения и контроля полученных по этому методу результатов Буняковский предложил в 1858 г. специальный прибор — суммарный эккер. Прибор позволял получать квадраты последовательности чисел с сум-

мированием этих квадратов, а также произведения двух множителей (как разности квадратов их полусуммы и полуразности) с суммированием последовательности этих произведений. Принцип действия прибора основан на одной лишь теореме Пифагора. Изготовленный экземпляр прибора позволял выполнять действия с квадратами чисел, содержащих менее четырех цифр.

Самым простым и доступным прибором для выполнения простых вычислений являются русские счеты. Изобретением русских самосчетов (1867 г.) Буняковский устранил основной недостаток счетов, связанный с перенесением вручную десяти единиц одного разряда в качестве единицы следующего разряда. В самосчетах Буняковского это выполнялось механически. Вопросами усовершенствования самосчетов и их применения Буняковский занимался и в дальнейшем (1876 г.).

Работы Буняковского по прикладным вопросам, особенно его изобретения различных вычислительных приборов, представляли значительный интерес в свое время.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

МАТЕМАТИКА В УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЯХ РОССИИ В 30—50-е ГОДЫ XIX в.

1

Социально-экономическое и культурное развитие России

В течение первой половины XIX в. в социально-экономической и культурной жизни России произошли большие изменения. В первой четверти столетия в стране отчетливо проявлялись признаки разложения помещичье-крепостного строя, а начиная со второй четверти XIX в. постепенно назревает кризис феодально-крепостнических отношений. Формировавшийся капиталистический уклад вступил в антагонистические противоречия с помещичье-крепостной системой, вызвавшие в 40—50-е годы общий кризис феодализма, который охватил и социально-экономические отношения и политическую надстройку.

Это было время неограниченной власти тайной полиции и цензуры, душивших всякую свободную мысль, режима кнута и деспотизма, установленного кровавыми руками царизма. В 1837 г. хитросплетенными кознями Николая I был смертельно ранен на дуэли великий русский поэт А. С. Пушкин. В 1841 г. на подстроенной царской полицией дуэли погиб в двадцатисемилетнем возрасте М. Ю. Лермонтов. В 1847 г. был арестован и сослан Т. Г. Шевченко, а через два года отправлен на каторгу русский писатель Ф. М. Достоевский.

Но царские власти не в силах были подавить передовую мысль. Несмотря на все полицейские заслоны, уже через несколько лет после подавления восстания декабристов вновь возникло антиправительственное движение революционного и революционно-демократического направления, возглавленное передовыми людьми общества. Такие деятели, как А. И. Герцен, В. Г. Белинский, несколько позже Н. Г. Чернышевский, Н. А. Добролюбов, чьи идеи глубоко вошли в сознание передовых людей того времени, всю свою жизнь посвятили служению народу. Отечественная литература этого времени прославилась выдающимися произведениями А. С. Пушкина, М. Ю. Лермонтова, Н. В. Гоголя, Т. Г. Шевченко, П. П. Гулака-Артемовского, Е. П. Гребенки, Хачатура Абовяна, Мирзы Фатали Ахундова и многих других писателей и общественных деятелей.

Под давлением передовых слоев общества и в связи с ростом производительных сил страны царское правительство вынуждено было в какой-то степени идти на удовлетворение запросов народного хозяйства, в первую очередь в деле подготовки квалифицированных кадров для промышленности. Однако оно заботилось о том, чтобы воспитание этих кадров отвечало требованиям правящих кругов. На все учебные заведения легла тяжелая рука самодержавия. Преподаватели должны были представлять перед началом занятий конспекты лекций и программы с указанием учебников и сочинений, которым они будут следовать в процессе занятий. Никаких отступлений от установленного порядка не допускалось. В таких условиях нужно было готовить кадры для промышленности, которая предъявляла свои требования.

В первой половине XIX в. промышленность в России заметно возросла. В 1804 г. в стране насчитывалось 1200 предприятий с общим числом 225 тыс. рабочих, а к 1861 г. их было уже 2800 с 860 тыс. рабочих. Основным показателем роста производительных сил страны в этот период является начало промышленного переворота: ручные станки и вододействующие механизмы мануфактурного периода с 30—40-х годов XIX в. начали постепенно заменяться паровыми двигателями и механическими станками. Мануфактурное производство уступало место фабричному. Паровые машины и первые водяные турбины появились и в отсталой тогда горнозаводской промышленности. На отдельных металлургических заводах вводились прокатные станы и пудлингование вместо устаревшего кричного способа получения железа, а кое-где испытывался и более совершенный — бессемеровский способ. Об общем механическом вооружении русской промышленности рассматриваемого времени свидетельствуют следующие данные. Ввоз машин в Россию возрос с 1830 по 1860 г. в 12 раз, инструментов — в 9 раз, производство машин в стране — более чем в 13 раз. При этом стоимость отечественных машин со временем почти уравнивалась со стоимостью машин, ввезенных из-за границы. В связи со все возрастающими потребностями промышленности и торговли начались поиски новых рынков сбыта, особенно на Ближнем Востоке, на Балканах, в Средней Азии. Большую остроту приобрел вопрос о путях сообщения. Транспорт усовершенствовался: вводилась паровая тяга. В 1860 г. протяженность железных дорог России составляла 1587 км. Начало развиваться пароходство на Балтийском и Черном морях, а также на Волге и ее притоках. Промышленный переворот ускорил переход к капиталистическим методам эксплуатации рабочей силы.

Однако промышленный переворот в России, начавшийся в 30—40-е годы XIX в., затянулся и завершился лишь в 80—90-е годы. Рутинная техника, порожденная крепостничеством, стремилась удерживать свои позиции на многих предприятиях страны. Огромные природные богатства России использовались в ничтожной степени. Обрабатывающая промышленность явно не удовлетворяла потребности огромной страны, в которой только за три десятилетия, к 1858 г., население увеличилось на 35 % и составляло 73 млн. чел. (по десятой ревизии). Рост металлургической промышленности и машиностроения сильно отставал от роста

жизненных потребностей государства. Это особенно проявилось в период Крымской войны. Поражение царизма в этой войне ускорило процесс социально-экономического кризиса в стране.

Кризис феодально-крепостнического строя отражался и на состоянии сельского хозяйства. Примитивные способы ведения сельского хозяйства привели к тому, что за первую половину XIX в. в стране было 39 неурожайных лет. Помещичье хозяйство с его патриархальным укладом не могло вывести сельскохозяйственное производство из тупика. Большая часть дворянских земельных владений оказалась разоренной: $\frac{2}{5}$ всех дворянских имений, насчитывавших $\frac{2}{3}$ всего крестьянского населения, была заложена. Товарность помещичьих хозяйств осуществлялась не за счет интенсификации сельского хозяйства, а за счет усиления наиболее отсталых, варварских форм эксплуатации крестьянства — барщины, а также увеличения оброка, который за первую половину XIX в. возрос почти в три раза.

Непосильный гнет помещиков и кулаков вызывал волнения и восстания крестьянских масс. За первую четверть XIX в., по неполным данным, было около 300 крестьянских волнений, а с 1826 по 1861 г. — уже свыше 1700. В освободительное движение в стране включилась новая сила — волнения рабочих. С 1826 по 1855 г. произошло 170 волнений рабочих. Нарастание противоречий в экономике страны, ухудшение экономического положения угнетенных классов, обострение классовой борьбы, борьба революционных демократов против самодержавия и крепостничества, политический «кризис верхов», т. е. невозможность для господствующих классов сохранить в неизменном виде свое господство, — все это, вместе взятое, привело к возникновению в России революционной ситуации 1859—1861 гг. «Под давлением военного поражения, страшных финансовых затруднений и грозных возмущений крестьян, — писал В. И. Ленин, — правительство прямо-таки *вынуждено* было освободить их. Сам царь признался, что надо освобождать сверху, пока не стали освобождать снизу»¹. С отменой крепостного права в России, несмотря на сохранение в значительной степени феодальных пережитков, были созданы более благоприятные условия для развития капитализма.

Революционно-демократическая идеология оказывала сильное влияние на развитие передовой русской культуры. В острой борьбе с крепостничеством и сословными препонами передовые слои русского общества упорно пробивали дорогу просвещению и образованию. За первую половину XIX в. число гимназий увеличилось почти в 2,5 раза, возросло число приходских школ. В 1834 г. был открыт университет в Киеве. Значительно возросло число технических специальных учебных заведений.

Несмотря на тяжелейшие условия, русские ученые добились выдающихся успехов. П. Ф. Горянинов, один из предшественников Дарвина, самостоятельно вплотную подошел к созданию теории клеточного строения организмов. Вслед за ним профессор К. Ф. Рулье обосновал идею

¹ В. И. Л е н и н. Полн. собр. соч. Т. 4, стр. 430.

эволюционных процессов жизни на земле. Н. И. Пирогов, основоположник военно-полевой хирургии и хирургической анатомии, сыграл выдающуюся роль в развитии отечественной медицины. Больших успехов добились химик А. М. Бутлеров, создавший теорию химического строения вещества, астроном В. Я. Струве, директор крупнейшей в мире Пулковской обсерватории.

Успешно были решены многие сложные технические задачи. Смелыми новаторами в области электротехники прослыли русские ученые В. В. Петров, П. Л. Шиллинг, Б. Я. Якоби и Э. Х. Ленц. Русский металлург горный инженер П. И. Аносов разработал методы получения высококачественной стали и положил начало микроанализу металлов. Изобретатели-самоучки А. Е. и М. Е. Черепановы разработали оригинальную конструкцию паровоза, тульский рабочий Зайцев построил паровую машину высокого давления, московский мастер Мазин сконструировал станок для изготовления сукон. Классическими ансамблями (в Петербурге, Москве и других городах) обогатилась русская архитектура.

Ведущими математиками в это время были академики Остроградский и Буняковский, профессор Лобачевский, создатель новой неевклидовой геометрии. Основными направлениями научных исследований Остроградского (см. гл. II) являлись математическая физика, аналитическая механика, математический анализ. Остроградский заложил основы русской школы механики, сыгравшей большую роль в дальнейшем развитии этой науки, а также вместе с Буняковским своей деятельностью подготовил создание математической школы. Буняковский возродил в Петербургской академии наук ведущий свое начало от Эйлера интерес к теории чисел, а также много и успешно занимался теорией вероятностей. Работы Буняковского по теории вероятностей и статистике были тесно связаны с развитием промышленности и вообще хозяйства страны. К 40-м годам относится начало деятельности Чебышева, создавшего, как и Эйлер, математическую школу. Благодаря Остроградскому, Буняковскому и особенно Чебышеву отечественная математика снова приобрела и умножила мировую славу.

2

Учебные заведения и развитие математики в России

Борясь с распространением революционных идей, царское правительство предприняло реакционные меры в области просвещения. В 1827 г. было категорически запрещено принимать в средние и высшие учебные заведения крепостных крестьян. Правительство всячески стремилось увеличить число студентов-дворян и закрыть двери университетов для разночинцев, которые все же составляли около четверти всех студентов. Существовавшая с 1803 г. преемственная связь между начальной, средней и высшей школой была прервана. Начальные

и средние школы были изъяты из ведения университетов и подчинены непосредственно попечителям учебных округов.

По новому уставу 1835 г. университеты полностью зависели от Министерства народного просвещения и попечителей учебных округов, что лишало их и той призрачной автономии, которую они имели раньше. Министру народного просвещения предоставлялось право назначать по собственному усмотрению на вакантные кафедры лиц, угодных правящим кругам. В 1842 г. университеты получили право избирать ректора на четырехлетний срок. С 1849 г. он снова стал назначаться правительством, право его выборности было восстановлено в 1861 г. Для строгого наблюдения за студентами вводилась особая инспекция. Значительно повысилась плата за обучение. В связи с польским восстанием, в 1832 г. был закрыт Виленский университет. К середине XIX в. во всех высших учебных заведениях страны обучалось лишь немногим более 4 тыс. студентов². В основу преподавания в школах и университетах была положена реакционная идеология крепостничества. В 30-е годы граф С. С. Уваров, министр народного просвещения и президент Академии наук, представил эту идеологию как «теорию официальной народности», согласно которой народное образование должно было совершаться «в соединенном духе православия, самодержавия и народности». В целях философского обоснования крепостнического строя в России насаждался немецкий идеализм, рассматривавшийся правящими кругами как средство противодействия передовым идеям русского освободительного движения.

Попавшие в тяжелое положение университеты не могли обеспечить учебные заведения преподавателями. В связи с этим, «чтобы умножить число достойных наставников юношества», в 1828 г. в Петербурге был снова открыт Главный педагогический институт. В нем, а также в Институте корпуса инженеров путей сообщения, трехгодичных офицерских классах Морского кадетского корпуса, Артиллерийском и Инженерном училищах, офицерские классы которых были преобразованы в 1855 г. соответственно в Артиллерийскую и Инженерную академии, под руководством М. В. Остроградского было подготовлено значительное количество преподавателей математических наук, в том числе для высших учебных заведений. Для пополнения преподавателями последних весьма полезным оказался также Профессорский институт для молодых ученых при Дерптском университете. Поездки молодых ученых в целях совершенствования знаний за границу, как и приглашение профессоров из-за границы, крайне ограничивались и в 1848 г. были вовсе запрещены, несмотря на увеличение в университетах числа вакантных кафедр и ослабление научной деятельности. Это запрещение, а также другие ограничения смягчились несколько во второй половине 50-х годов, в преддверии новых реформ, обусловленных общественно-экономическим развитием России и усилившимся демократическим движением в стране. В это время Н. И. Пирогов выступил со статьями по многим вопросам обучения и воспитания и впервые гласно заявил, что

² К 1855 г. в стране насчитывалось 78 гимназий, в 1830 г. — 62.

специальное образование должно основываться на серьезном общем образовании.

Царскому правительству не удалось превратить университеты в оплот обскурантизма и мракобесия. Из года в год возрастал у поступающих в университеты интерес к естественным и точным наукам. Во всех университетах удельный вес естественных факультетов непрерывно увеличивался. Благодаря передовой части профессоров и студентов университеты оставались центрами науки и прогресса России. По уставу 1835 г. обучение было четырехлетним с семестровым распределением предметов и приемом студентов по результатам вступительных экзаменов два раза в год. Это позволяло расширить преподавание некоторых дисциплин, вопреки мерам царских властей, направленным на ограничение преподавания университетских наук. Кафедра чистой и прикладной математики входила в состав второго отделения философского факультета, объединявшего два отделения — словесных и физико-математических наук. С 1850 г. второе отделение называлось физико-математическим факультетом и состояло из двух разрядов (отделений): математических и естественных наук. К разряду математических наук относились чистая и прикладная математика, астрономия, физика и физическая география, химия, технология и архитектура. Для студентов-естественников предусматривалось преподавание алгебры, тригонометрии и конических сечений, а в дальнейшем и начал дифференциального и интегрального исчисления. Элементарная математика из программы математического отделения исключалась. По уставу 1842 г. в Киевском университете были узаконены отдельные кафедры чистой и прикладной математики. Это распространилось, в силу необходимости, и на другие университеты. Требование устава 1835 г., заключавшееся в том, что адъюнкт обязательно должен иметь степень магистра, профессор — степень доктора, способствовало повышению научного ценза преподавателей.

Чистая математика первоначально читалась на первом и втором курсах, прикладная математика (механика и, некоторое время, оптика) — на третьем, а затем и на четвертом. На первом курсе преподавались алгебра и сферическая тригонометрия, на первом и втором — аналитическая геометрия, на втором — дифференциальное и интегральное исчисления, дополненные со временем, большей частью на третьем курсе, дифференциальными уравнениями и вариационным исчислением. На старших курсах в дальнейшем читались теория вероятностей, теория чисел, исчисление конечных разностей, эллиптические функции и другие специальные курсы, в зависимости от возможностей каждого университета. Расширилось преподавание начертательной геометрии, некоторое время преподавалось исчисление на счетах по способу генерал-майора Ф. М. Свободского.

Уровень преподавания математики в университетах и других высших учебных заведениях повысился. Петербургский университет, в котором в этот период преподавали В. Я. Буняковский, О. И. Сомов, а также молодой П. Л. Чебышев, и Казанский, с которым в эти годы была связана деятельность Н. И. Лобачевского, в постановке матема-

тических курсов не уступали лучшим зарубежным университетам. Улучшилось положение и в других университетах. Преподавание в основном велось на русском языке. Учебная литература по математике пополнилась руководствами Остроградского — по алгебре и аналитической механике, Лобачевского — по алгебре, Буняковского — по теории вероятностей, Чебышева — по теории чисел, Сомова — по алгебре и эллиптическим функциям, Брашмана — по аналитической геометрии и другими. Особое место занимал «Лексикон чистой и прикладной математики» Буняковского. Значительным пополнением учебной математической литературы явились руководства по элементарной и высшей математике для военно-учебных заведений, составленные в 40—50-х годах под руководством Остроградского. Появились новые руководства для гимназий. Заметную роль продолжали играть лучшие пособия зарубежных авторов.

Наряду с существовавшими академическими периодическими изданиями, в которых научные работы печатались большей частью на иностранных языках, появились университетские научные периодические издания в основном на русском языке. С 1833 г. начали выходить при непосредственном участии Перевощикова «Ученые записки Московского университета». В 1834 г. Лобачевский основал «Ученые записки Казанского университета». В 1833—1834 гг. в Ревеле (Таллине) старший учитель по математике местной гимназии К. Я. Купфер издавал «Учебный математический журнал». После прекращения существования этого первого на русском языке журнала по вопросам преподавания математики последние освещались на страницах литературных, в частности «Современника» и «Отечественных записок», и специальных периодических изданий.

Ведущим центром научных исследований в России в 30—50-е годы оставалась Петербургская академия наук. Деятельность ее намного расширилась после присоединения к ней в 1841 г. Российской академий (учено-литературного общества русского языка и русской словесности). В Академии наук было образовано три отделения: физико-математических наук, русского языка и словесности, исторических наук и филологии. Кроме научной Академия наук продолжала вести и просветительную деятельность. В академических периодических изданиях³, как и раньше, печаталась подавляющая часть научных сочинений, в том числе по математике. Начиная с 1832 г. Академия наук ежегодно присуждала премии, учрежденные на средства уральского горнопромышленника П. Н. Демидова для награждения за лучшие сочинения по различным отраслям знаний. Это способствовало оживлению научной деятельности, общественному признанию научных заслуг. Демидов-

³ В этот период Петербургская академия наук издавала: *Mémoires de l'Académie des Sciences de St-Petersbourg*, VI série, sciences mathématiques, physiques et naturelles; *Mémoires présentés à l'Académie des Sciences de St-Petersbourg par divers savants*, t. 1—9, 1831—1859; *Bulletin scientifique publié par l'Académie des Sciences de St-Petersbourg*, t. 1—10, 1836—1842 *Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Académie des Sciences de St-Petersbourg*, t. 1—17, 1843—1859 (два журнала научно-информационного характера); *Mélanges mathématiques et astronomiques, tirés du Bulletin de l'Académie des Sciences de St-Petersbourg* (с 1853 г.).

скими премиями было отмечено значительное число математических сочинений. В составлении отзывов на них принимали участие М. В. Остроградский, В. Я. Буняковский, Э. Д. Коллинс, П. Н. Фусс, П. Л. Чебышев. Отзывы печатались в ежегодных отчетах Академии наук о присуждении Демидовских премий. Обычно они содержали подробный анализ отмеченных сочинений.

Демидовских премий были удостоены: в 1833 г. — Я. А. Севастьянов за сочинение «Приложение начертательной геометрии к воздушной перспективе, к проекции карт и к гномонике» (1832 г.); в 1836 г. — Н. Д. Брашман за «Курс аналитической геометрии» (1836 г.) и Ф. И. Петрушевский за перевод и издание на русском языке сочинения «Евклидовы начала (7-я, 8-я и 9-я книги, содержащие теорию чисел древних геометров, 1835 г.); в 1838 г. — О. И. Сомов за работу «Теория определенных алгебраических уравнений высших степеней» (1838 г.), а также С. Бурачек и С. Зеленый за запись и издание «Лекций алгебраического и трансцендентного анализа» М. В. Остроградского; в 1843 г. — П. Татаринов за книгу «Начальные основания геометрии» (1842 г.); в 1844 г. — Н. Е. Зернов за сочинение «Дифференциальное исчисление с приложением к геометрии» (1842 г.); в 1845 г. — З. Я. Слонимский за изобретение арифметической машины и А. Зеленый за «Краткое руководство начертательной геометрии с приложениями» (1843 г.); в 1846 г. — Г. К. Брун за «Руководство к политической арифметике» (1845 г.); в 1849 г. — П. Л. Чебышев за сочинение «Теория сравнений» (1849 г.) и В. П. Ермаков за изобретение ручного планиметра; в 1851 г. О. И. Сомов за книгу «Основания теории эллиптических функций» (1850 г.); в 1854 и 1856 гг. — П. А. Зарубин за изобретение инструментов, относящихся к межеванию, планиметра-самоката и трансформатора планов; в 1859 г. — А. Н. Савич за сочинение «Приложение теории вероятностей к вычислению наблюдений и геодезических измерений» (1857 г.), в 1861 г. — Ф. Г. Миндинг за «Изыскания, относящиеся к интегрированию дифференциальных уравнений первого порядка с двумя переменными» (опубликованы в 1862 г.).

В научной деятельности Петербургской академии наук в области математики в конце 20-х годов произошел перелом. Он связан с приходом в академию М. В. Остроградского и В. Я. Буняковского. С этого времени число математических исследований в России растет, прежде всего в области математического анализа, математической физики, теории чисел и теории вероятностей. Они в значительной степени сохранили преемственную связь с научным наследием Эйлера.

Математические методы все шире применяли в своих работах члены Академии наук по другим специальностям, прежде всего астрономы. Они широко использовали при обработке опытных данных метод наименьших квадратов, дополняя и уточняя его схемы для тех или иных конкретных случаев. Этим занимались пулковские астрономы: В. Струве и О. Струве, Х. Петерс, основатель и руководитель морской астрономической обсерватории в Николаеве К. Кнорре, избранный в 1831 г. членом-корреспондентом Академии наук, и др. С большой вычислительной работой по суммированию рядов были связаны исследования

Д. М. Перевощикова о вековых возмущениях семи больших планет, опубликованные Академией наук в 50-х годах. В марте 1852 г. Перевощиков был избран адъюнктом Петербургской академии наук, а в январе 1855 г. — ее экстраординарным академиком по математике. В этот период своей деятельности он перевел и издал известное сочинение по истории физико-математических наук Ф. Араго «Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров» в трех томах (1859—1861 гг.), пользовавшееся большим успехом. Подполковник А. Маюров, член-корреспондент Петербургской академии наук, опубликовал в 1833 г. работу о численном решении алгебраических уравнений. Член-корреспондент Академии наук по математическим наукам Н. Навроцкий изучал историю математики. Он составил «Хронологическую и синхроническую таблицу известнейших и примечательнейших математиков во всех веках, по 1800 год» (1846 г.). В ней отдельно указаны математики России, отмечено, что «в России преподавание геометрии и астрономии началось в Киевской Академии» и «первым известным преподавателем в оной был Феофан Прокопович».

Авторами математических работ, в основном по различным вопросам анализа и геометрии, печатавшихся в академических изданиях, были также преподаватели учебных заведений (в частности, профессора университетов: Дерптского — Ф. Миндинг и Ф. Клаузен, Петербургского — О. И. Сомов, Казанского — А. Ф. Попов, профессор чистой и прикладной математики в Ришельевском лицее в Одессе — Г. Брун, профессор Н. Г. Шультен).

В связях с зарубежными учеными основное место продолжали занимать обмен научными изданиями и научная переписка. Последняя значительно расширилась в ходе работы, которую проводила Петербургская академия наук по изданию трудов Эйлера. Остроградский и Буняковский установили некоторые личные контакты с ведущими зарубежными учеными. Систематически такие контакты с начала 50-х годов поддерживал Чебышев. М. В. Остроградский, В. Я. Буняковский, П. Л. Чебышев, П. Н. Фусс и Э. Д. Коллинс были избраны членами иностранных академий. Петербургская академия наук удостоила избрания своими почетными иностранными членами О. Л. Коши (1831 г.), К. Якоби (1833 г., с 1830 г. он был ее иностранным членом-корреспондентом). Иностранцами членами-корреспондентами Петербургской академии наук были избраны Ч. Бэббэдж (1832 г.), А. Л. Крелле (1834 г.), Ж. Штурм (1836 г.), У. Р. Гамильтон и П.-Г.-Л. Дирихле (1837 г.), Ж. Лиувилль (1840 г.), Ш. Эрмит и Ж.-В. Понселе (1857 г.), Ж. Бертран и Ж. Дюамель (1859 г.).

3

Математика в Петербургском университете

В течение 30—50-х годов уровень преподавания математики в петербургских высших и специальных учебных заведениях значительно повысился. Особое место среди них занимал Петербургский университет. Длительное время основные математиче-

ские курсы в нем читал В. А. Анкудович (с 1831 г. экстраординарный профессор). Его помощниками были П. В. Тихомиров, а затем непродолжительное время выпускники университета 1830 г. М. Иващенко и И. Коновалов. Тихомиров читал высшую алгебру, приложения алгебры к геометрии, прямолинейную и сферическую тригонометрию, а с конца 1829 г. обучал также «арифметике на счетах» по способу Ф. М. Свободского. Прибор Свободского предназначался для выполнения действий сложения, вычитания, умножения и деления многозначных чисел, возведения в степень и извлечения квадратных и кубических корней, причем выполнение последних четырех действий сводилось к выполнению действий сложения и вычитания, для чего использовались несложные приемы и простейшие таблицы. Специальные комиссии Главного штаба, а также Академии наук одобрили изобретение Свободского. Особо отмечалось, что вычисления с помощью этого прибора производятся в пять-шесть раз быстрее по сравнению с вычислениями на бумаге. Вместе с представителями других университетов Тихомиров изучал способ Свободского под руководством П. В. Тарханова. Составленное им по наставлениям Тарханова руководство для обучения счислению на счетах по способу Свободского⁴ было одним из наиболее распространенных.

Начертательную геометрию в 1831 г. вместо Н. Т. Щеглова (1800—1870), полностью переключившегося на чтение физики, преподавал И. Коновалов, а со следующего и до 1840 г. — Ф. В. Чижов, ставший со второй половины 30-х годов основным помощником В. А. Анкудовича. Ему была предоставлена возможность совершенствоваться по математическим наукам в течение трех лет в Петербурге под руководством академика М. В. Остроградского. В 1836 г. он защитил магистерскую диссертацию «Рассуждение об общей теории равновесия с применением к равновесию жидких тел и определению фигуры Земли». Кроме начертательной геометрии Чижов читал на первом курсе алгебру, плоскую и сферическую тригонометрию, аналитическую геометрию. С его именем связано обновление и улучшение преподавания этих предметов, особенно алгебры.

С середины 30-х годов, после принятия университетского устава 1835 г., В. А. Анкудович значительно расширил преподавание математики. Курс дифференциального и интегрального исчислений, читавшийся по Лакруа, он пополняет за счет руководств Коши, и в своем изложении переходит на «способ, основанный на понятии пределов и бесконечных величин». С 1837 г. Анкудович включает в преподавание новый курс — исчисление вероятностей, излагая его по сочинениям Лапласа и Пуассона. Начиная с 1839/40 учебного года он читает анализ не только на втором, но и на третьем курсе, включив дополнительно, по Лакруа, начала вариационного исчисления и исчисления конечных

⁴ Арифметика на счетах или легчайший способ производить все арифметические действия над числами на счетах, усовершенствованный генерал-майором г. Слободским. СПб., 1830. Изд. 4-е. Исправленное и умноженное. СПб., 1847. В переводе К. Е. Нявяровского на польский язык — Вильно, 1838. Способ Свободского стал известен и за границей.

разностей. Анкудович написал несколько работ, непосредственно связанных с его преподаванием в Артиллерийском училище, — «Теорию баллистики, содержащую в себе приложение математического анализа к определению различных обстоятельств, сопровождающих движение тяжелых тел, брошенных какою-нибудь силою» (1836 г.) и несколько статей (опубликованы в «Артиллерийском журнале»).

С утверждением нового университетского устава было связано также некоторое оживление других сторон математической деятельности в университете: регулярно объявлялись темы сочинений на соискание медалей, повысились требования на магистерских экзаменах, входила в практику обязательная защита преподавателями диссертаций.

Значительно улучшилось преподавание математики в университете в 40-х годах, с приходом академика В. Я. Буняковского и воспитанников Московского университета О. И. Сомова и П. Л. Чебышева. В 1839 г. курсы теоретической астрономии и начала небесной механики на серьезной математической основе читал экстраординарный профессор астрономии и геодезии А. Н. Савич (1810—1883), также воспитанник Московского университета. В 1840—1841 гг. Савич временно преподавал курсы Ф. В. Чижова, а в 1841—1843 гг. — особый курс — приложения теории вероятностей к вычислению астрономических наблюдений по Гауссу, Струве и Энке. Впоследствии Савич издал руководство по этому предмету (1857 г.).

В 1841 г. в Петербургский университет для чтения курсов Ф. В. Чижова на должность адъюнкта по предложению А. Н. Савича был приглашен Осип (Иосиф) Иванович Сомов (1815—1876). Алгебру Сомов читал по своему сочинению и курсу алгебраического анализа Коши, а аналитическую геометрию — по руководству Лефевра де Фурси и курсу аналитической геометрии Брашмана. С 1844 г. аналитическую геометрию двух измерений он читал на первом курсе, а аналитическую геометрию трех измерений, используя руководство Леруа, и алгебру, используя сочинения Лагранжа, Коши и Фурье, — на втором. В 1847 г. Сомов защитил диссертацию о распространении световых волн в средах без двойного преломления и был удостоен степени доктора математики и астрономии, а также утвержден экстраординарным профессором по прикладной математике.

В 1850 г. Сомов опубликовал сочинение «Основания теории эллиптических функций», за которое ему была присуждена третий раз Демидовская премия. В нем систематизированы, ясно и весьма полно изложены с некоторыми подробностями, принадлежащими автору, основные свойства, способы вычисления и главнейшие применения эллиптических интегралов (функций). После классического трактата Лежандра (1825—1828 гг.) сочинение Сомова было первым не только в русской, но и в мировой литературе сводным изложением теории эллиптических функций (интегралов). Блестяще выполненное как по содержанию, так и по форме, оно во многом способствовало включению этого важного раздела анализа в обиход русских математиков. Сомов первым прочел этот курс в Петербургском университете в 1847/48 учебном году. Он придерживался сочинений Абеля, Якоби и Лежандра. По его сочине-

нию такой курс многократно читал в Петербургском университете П. Л. Чебышев. В других университетах курс также читался по сочинению Сомова.

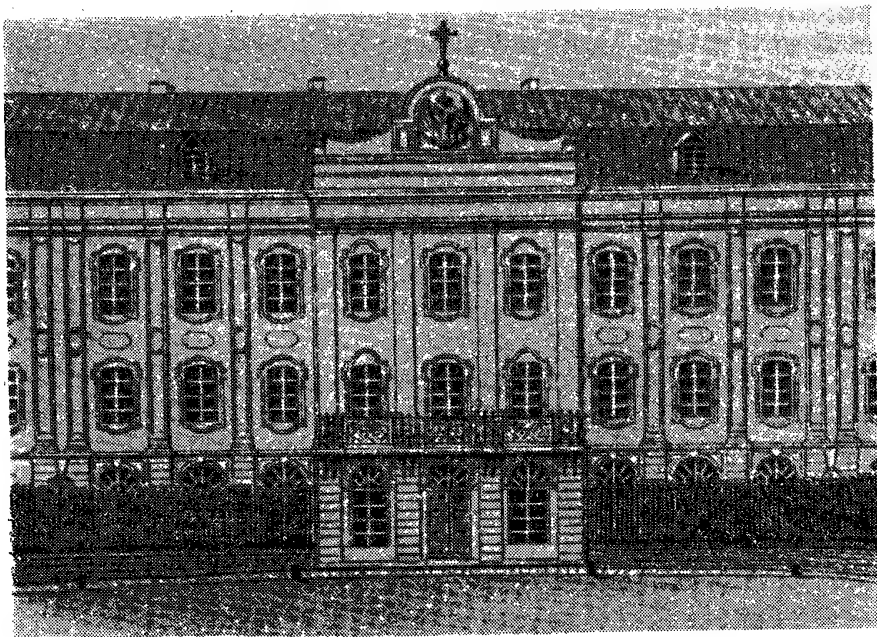
«Основания теории эллиптических функций» заметно обогатили русскую математическую литературу и долгое время служили ее украшением. По полноте изложения теории эллиптических интегралов эта работа сохраняет определенное значение и в настоящее время.

К названному сочинению Сомова примыкает несколько его статей. Часть из них напечатана в изданиях Петербургской академии наук, членом-корреспондентом которой он был избран в 1852 г. В 1854 г. появилась статья Сомова о формуле Гаусса для приближенного вычисления интегралов. В дальнейшем его интересы сосредоточиваются на вопросах механики. Он является представителем аналитического направления в этой области исследований, начало которому в России положил М. В. Остроградский.

Своей деятельностью Сомов побудил Анкудовича расширить преподавание математического анализа. С 1842 г. Анкудович читал на втором курсе дифференциальное и интегральное исчисления, а на третьем курсе — «дополнения к учению о дифференциалах и интегралах», двойные интегралы, ряды, интегрирование простейших дифференциальных уравнений. При этом он пользовался новым пособием — двухтомным курсом анализа Ж. Дюамеля, в основу которого положено понятие предела и непрерывности. В 1847 г. Анкудович ушел в отставку. На его место поступил в качестве приват-доцента П. Л. Чебышев. Курс дифференциального и интегрального исчислений перешел к В. Я. Буняковскому, заменившему в 1846 г. профессора Д. С. Чижиова. Благодаря Буняковскому и Чебышеву Петербургский университет в постановке преподавания математики быстро выдвинулся на первое место в России.

Став ординарным профессором Петербургского университета, Буняковский взял на себя преподавание механики и теории вероятностей. Механику он читал на протяжении двух учебных лет, руководствуясь сочинениями Пуассона и Остроградского. Начиная с 1847/48 учебного года Буняковский преподавал на втором курсе дифференциальное и интегральное исчисления. На третьем и четвертом курсах он обычно попеременно читал один год — теорию вероятностей, другой — интегрирование дифференциальных уравнений, исчисление конечных разностей (до 1851/52 учебного года) и способ вариаций. Теорию вероятностей излагал по своему сочинению «Основания математической теории вероятностей», благодаря которому преподавание этого предмета в университетах России значительно повысилось по сравнению с зарубежными университетами.

Чебышев начал преподавание в университете с курсов высшей алгебры и теории чисел. С 1848/49 учебного года он длительное время почти ежегодно читал также сферическую тригонометрию и аналитическую геометрию, а с 1849/50 учебного года — теорию эллиптических функций. Кроме того, в 1848/49 учебном году он преподавал интегрирование дифференциальных уравнений, а в 1849/50 — 1850/51 — практическую



Здание двенадцати коллегий, где помещались Петербургский университет и Главный педагогический институт.

механику (для студентов реального отделения). Вместо сочинений зарубежных авторов основными пособиями Чебышеву служили по алгебре — руководство Остроградского и Сомова, по сферической тригонометрии — соответствующая книга «Ручной математической энциклопедии» Перевощикова, по аналитической геометрии — курс Брашмана, по теории эллиптических функций — сочинение Сомова, а также свои записки. Особое место в преподавании Чебышева занимал курс теории чисел, впервые прочитанный им в Петербургском университете студентам четвертого курса в 1847/48 учебном году. По этому курсу он издал свое руководство «Теория сравнений» (1849 г.).

С целью дальнейшего улучшения преподавания в университете сферической тригонометрии, аналитической геометрии и высшей алгебры Чебышев в начале 50-х годов перешел на другие учебные пособия, в основном русских авторов. Немаловажные усовершенствования по сравнению с лучшими зарубежными руководствами принадлежат ему в преподавании практической механики.

И Буняковский и Чебышев придавали большое значение прикладным вопросам математики. Речь Буняковского «Мысли о движении народонаселения вообще» (1850 г.), произнесенная в Петербургском университете, была посвящена вопросам статистики населения, которая с конца 40-х годов все больше привлекала его внимание и в дальнейшем стала одним из основных направлений его научной деятельности, направлением большой практической значимости. Чебышев в речи «Черчение географических карт», произнесенной в университете 8 февраля 1856 г., подчеркнул важнейшее значение тесной связи теории и прак-

тики для развития математической науки. Эта связь предопределила естественнонаучный материализм в качестве основы деятельности как самого Чебышева, так и созданной им математической школы.

4

Математика в Главном педагогическом институте

Ведущая роль в постановке преподавания математики в Главном педагогическом институте принадлежала М. В. Остроградскому. Он был приглашен в институт для преподавания высшей математики в самом начале 1832 г. В это время студенты института закончили «предварительный курс» обучения и приступили к занятиям на трехгодичном «окончательном курсе», на котором им должны были «доставить подробное и самое основательное познание тех предметов, к преподаванию коих они в будущем их звании предназначаются». На предварительном курсе преподавалась в основном элементарная математика. Ее читал с 1829 г. адъюнкт Ф. И. Буссе, окончивший в 1816 г. Педагогический институт. Буссе много внимания уделял вопросам методики преподавания, особенно арифметики.

Одним из основных предметов на окончательном курсе отделения математических и физических наук института была математика, «чистая и в особенности высшая, прикладная и в особенности теоретическая». Ее преподавал Остроградский. Высшую алгебру, дифференциальное, интегральное и вариационное исчисления, аналитическую геометрию и теоретическую механику с приложениями он читал по своим запискам. О содержании этих курсов прямых данных не сохранилось. По косвенным же данным можно судить, что в них Остроградский вводил и свои оригинальные результаты. Так, в упомянутой ранее работе «О функции гамма» (1859 г.) Остроградский отмечал: «В курсе анализа, который я читал более чем двадцать лет назад в Главном Педагогическом Институте, я дал по этому вопросу ряд, который, как оказалось, тождествен с полученным Бине».

Воспитанник первого выпуска Главного педагогического института, состоявшегося в конце 1835 г., И. Д. Соколов (1812—1873) во время учебы на окончательном курсе института поместил несколько статей по математике в издававшемся в то время Л. А. Плюшаром «Энциклопедическом лексиконе». Тогда же он написал к русскому изданию «Алгебры» Бурдона прибавление, в котором кратко изложил способы решения численных уравнений. Во время совершенствования в науках за границей Соколов представил в Петербургскую академию наук заметку о дифракции света (1838 г.), а также установил новую теорему, относящуюся к теории чисел.

С сентября 1838 г. по декабрь 1839 г. Соколов преподавал в Главном педагогическом институте курс геометрии. После защиты в конце 1839 г. в Петербургском университете докторской диссертации «О наибольших и наименьших величинах простых определенных интегралов»

он был направлен адъюнктом в Харьковский университет. В Харькове в 1842 г. вышло сочинение Соколова «Исследование некоторых предметов, относящихся к вариационному исчислению», включавшее его докторскую диссертацию. В диссертации освещался по Лежандру и Якоби вопрос о различении наибольших и наименьших величин интегралов. Рассмотрены случаи, когда в подынтегральное выражение входят как одна неизвестная функция одной независимой переменной и ее производные до n -го порядка включительно, так и несколько таких функций⁵. Таким образом Соколов принял участие в исследовании достаточных условий наличия решения вариационных задач, которое становилось тогда одним из главных в развитии вариационного исчисления. Его диссертация впервые знакомила русских читателей с этим кругом вопросов.

В 1842—1843 гг. под руководством Остроградского совершенствовался в математике Е. И. Бейер (1819—1898), окончивший Главный педагогический институт с золотой медалью в конце 1841 г. Бейер получил весьма разностороннюю подготовку, охватившую все основные направления математики того времени. Большой интерес он проявлял к математическому анализу и его приложениям. В феврале 1843 г. Бейер представил своему наставнику исследование об интегрировании уравнений в частных дифференциалах первого порядка. Остроградский дал высокую оценку этой работе, а также всем трудам своего ученика. В дальнейшем Бейер стал профессором Харьковского университета.

В 1847—1849 гг. в институте было установлено четырехгодичное обучение. На младшем, двухгодичном курсе физико-математического факультета читались высшая алгебра и геометрия, дифференциальное и интегральное исчисления, на старшем, также двухгодичном, — прикладная математика (механика). В 1852 г. на старшем курсе физико-математического факультета было образовано два отделения — математических и естественных наук. К первому из них кроме чистой и прикладной математики относилась также астрономия и математическая физика.

С расширением преподавания увеличилось и число преподавателей. Помощниками Остроградского в преподавании математики были его ученики по институту адъюнкты М. И. Пчельников и В. И. Жирухин, которого в 1853 г. заменил Н. С. Будаев. Профессор астрономии А. Н. Савич читал также сферическую тригонометрию и небесную механику. В. И. Жирухин (1821—1858) окончил институт в 1844 г. Известно, что для своих лекций он в 1848 г. составлял «Записки по интегральному исчислению», а в 1849 г. — «Курс вариационного исчисления». В 1850 г. Жирухин защитил в Петербургском университете магистерскую диссертацию «Интегрирование дифференциальных уравнений

⁵ В сочинение были также включены датированные 25 марта 1842 г. критические замечания Соколова по поводу изложения в работах даже «самых опытейших и известнейших математиков» теоремы о том, что «вариация дифференциала какой ни есть функции равна дифференциалу вариации той же функции». Отвечая Соколову, Буяковский отверг его замечания и подтвердил правильность точки зрения Остроградского.

в частных производных первого порядка» и был утвержден адъюнктом. Н. С. Будаев (1833—1920) окончил институт в 1853 г., получив золотую медаль за сочинение «Теория маятника», значительная часть которого, прежде всего вывод уравнения движения маятника, является, по его утверждению, переводом неоконченного рукописного сочинения Остроградского. В дальнейшем Будаев совершенствовался в прикладной математике под руководством Остроградского. В 1857 г. защитил в Петербургском университете магистерскую диссертацию «Общая теория равновесия твердых тел, погруженных в жидкость» и был утвержден адъюнктом математики. Будаев записал лекции по геометрии и механике, читанные Остроградским в 1851—1852 гг. Лекции по геометрии, по существу, посвящены приложениям анализа к геометрии⁶, лекции по механике охватывают курс аналитической механики.

Главный педагогический институт был закрыт в 1859 г. Его воспитанниками были А. Н. Тихомандрицкий, И. Д. Соколов, Е. И. Бейер, И. А. Вышнеградский, Н. С. Будаев, Е. Ф. Сабинин, впоследствии профессора математических дисциплин в высших учебных заведениях.

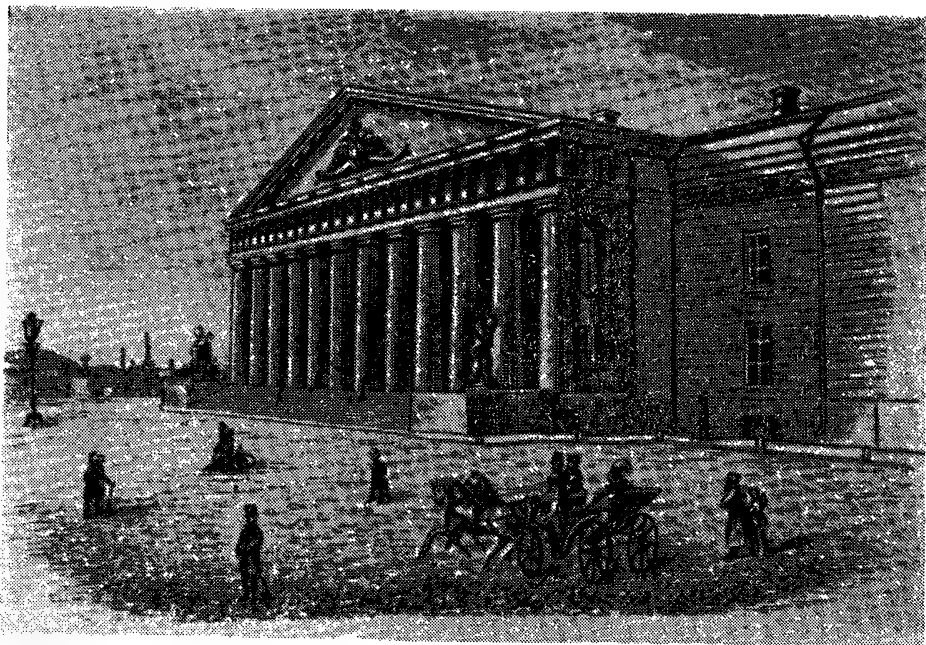
Б

Преподавание математики в специальных технических и военных учебных заведениях

Среди специальных учебных заведений, прежде всего высших, ведущее место занимали Институт корпуса инженеров путей сообщения и Горный институт. Горным институтом стал называться в 1833 г. Горный кадетский корпус. Спустя год его переименовали в Институт корпуса горных инженеров. Оба института были закрытыми заведениями. Они объединяли старшие классы кадетского корпуса с высшим учебным заведением. Воспитанники институтов, изучая расширенный и углубленный гимназический курс математики, получали твердые знания по элементарной математике, что позволяло им в дальнейшем лучше и быстрее усваивать основы высшей математики. Из последней в этих институтах читались высшая алгебра, аналитическая геометрия, дифференциальное и интегральное исчисления.

В Институте корпуса инженеров путей сообщения, как и раньше, большое внимание уделялось начертательной геометрии и ее приложениям, преподавание которых продолжал возглавлять Я. А. Севастьянов. Высшую алгебру и аналитическую геометрию читал профессор Д. С. Чижов. В 1830 г. в институт были приглашены В. Я. Буняковский и М. В. Остроградский. Буняковский читал дифференциальное и интегральное исчисления, Остроградский — аналитическую механику и астрономию. Буняковский составил для института записки по своему курсу. Остроградский, Буняковский, Базен, Дестрем, Резимон,

⁶ Они были подготовлены к печати А. Н. Крыловым перед самым началом Великой Отечественной войны. В годы войны набор текста лекций и другие связанные с ним материалы пропали.



Здание Горного института.

Севастьянов, Ламе и другие профессора института принимали участие в «Публичных чтениях об усовершенствовании в инженерных науках», организованных институтом в 1831 г. Остроградский читал лекции «Об изменении произвольных величин при решении общих уравнений динамики», Буняковский — «Исторический очерк успехов теории чисел». Из читанных в последующее время публичных лекций Остроградского по трансцендентному анализу первые две были записаны и опубликованы его ближайшими учениками по институту П. И. Собко и М. А. Агамоновым.

Остроградский преподавал в институте 30 лет. В середине 40-х годов оставил преподавание Буняковский. Курс дифференциального и интегрального исчисления перешел к И. Янушевскому. Курсы Д. С. Чиждова в 1847 г. были переданы подполковнику А. М. Докушевскому. В следующем году для преподавания математики был приглашен О. И. Сомов. Он читал главным образом интегральное исчисление. Часто при институте оставлялись в качестве репетиторов выпускники, достигшие успехов в изучении математики. Некоторые из них стали впоследствии профессорами института, видными учеными и инженерами. В их числе профессор математики И. Янушевский, Ф. Ф. Перрот, профессор практической механики Н. Ф. Ястржембский, известный ученый и инженер Д. Н. Журавский, строивший мосты и железные дороги и создавший в 50-х годах теорию расчета раскосных ферм и теорию скалывания при изгибе.

В 1843—1849 гг. царское правительство, напуганное революционным подъемом в стране, всю учебную и воспитательную деятельность института подчинило строгому контролю и регламенту. Было расширено преподавание военных дисциплин и закона божьего, в основном за счет

сокращения физико-математической подготовки. Математические науки были отнесены к предметам общего образования. Однако назначенный в 1849 г. главным наблюдателем за преподаванием математических наук в Институте корпуса инженеров путей сообщения и Строительном училище Остроградский, несмотря на большие трудности, обусловленные проведенными преобразованиями в институте, постарался сохранить достигнутый ранее в нем высокий уровень преподавания этих наук. В 1862 г. институт был переведен на гражданское положение.

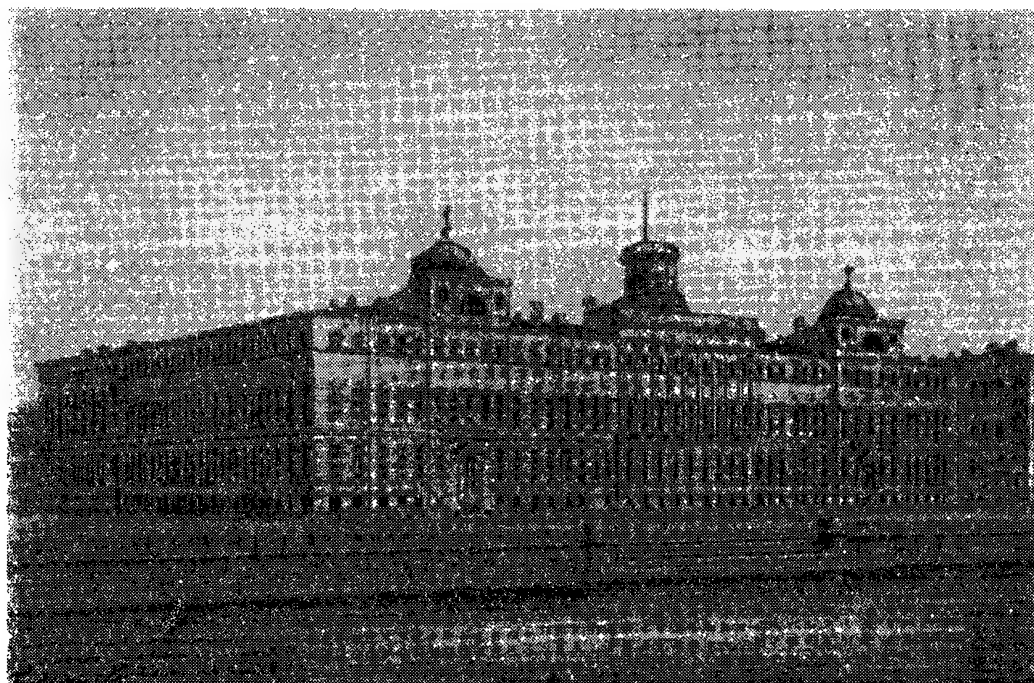
Горный институт в рассматриваемый период претерпевал аналогичные изменения. Математику в нем преподавали профессор Петербургского университета В. А. Анкудович, воспитанник института И. И. Вольгемут, П. П. Винклер, П. И. Собко, П. А. Олышев, К. А. Шелейковский. С 1832 г. в течение восьми лет профессором математики в институте был Буняковский. С 1849 до 1862 г. читал математику О. И. Сомов. Он составил для института пособия по дифференциальному и интегральному исчислениям.

В связи с возросшей в России в конце 20 — начале 30-х годов потребностью в инженерах и других специалистах в Петербурге были открыты новые специальные учебные заведения: Петербургский практический технологический институт (1828 г.), Архитектурное училище (1830 г.), Училище гражданских инженеров (1832 г.). Более или менее длительное время эти училища носили характер средних специальных учебных заведений, выпускали большей частью мастеров. По постановке преподавания наиболее приближалось к высшим учебным заведениям Училище гражданских инженеров. В нем из математических предметов кроме элементарной математики, преподаванием которой долгое время ограничивались в других названных училищах, читались курсы аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчислений, начертательной геометрии, а также теоретической и прикладной механики.

В конце 1842 г. на базе двух училищ, Гражданских инженеров и Архитектурного, было создано Строительное училище. По существу это было уже высшее учебное заведение, хотя официально его начали относить к этой категории с конца 1851 г. С 1857 г. в нем усилилось преподавание специальных и теоретических предметов, а с 1859 г. выпускники получали звание инженера-архитектора. В 40—50-х годах высшую математику в училище преподавали ученики Остроградского по Институту инженеров путей сообщения К. К. Коковцев, П. И. Собко, Ф. Ф. Перрот, а также воспитанник училища В. О. Войницкий.

В Петербургском практическом технологическом институте до 1848 г. преподавал механику К. А. Шелейковский, его преемником был инженер путей сообщения Сулема, один из лучших преподавателей своего времени. В свои лекции он включал начала дифференциального и интегрального исчислений. Его сменил в 1853 г. инженер путей сообщения А. Ф. Голубев, а через три года этот предмет перешел к И. А. Евневичу, ставшему вскоре профессором и преподававшему в институте длительное время.

В Петербургском практическом лесном институте кроме элементарной математики преподавались аналитическая геометрия и геодезия.



Здание Морского кадетского корпуса.

В 1837 г. институт был переименован в Лесной и межевой и устроен по образцу военно-учебных заведений. Чистую математику читали Петерсон, Давидов, прикладную — Грепищев.

К концу рассматриваемого периода в названных технических учебных заведениях высшей математике уделялось все больше внимания, элементарная математика переводилась, как правило, в подготовительные классы, а иногда и вовсе исключалась.

Существенно улучшилась постановка преподавания математики в военных учебных заведениях: Морском кадетском корпусе, Артиллерийском и Инженерном училищах и др. По постановке преподавания ведущее положение среди них, как и раньше, занимал Морской корпус с организованными при нем в 1827 г. офицерскими классами. Буняковский преподавал в Морском кадетском корпусе с 1827 г. Он читал дифференциальное и интегральное исчисления, а иногда и механику. В Морском корпусе осенью 1828 г. начал свою педагогическую деятельность в России Остроградский. Офицерские классы были организованы для улучшения подготовки, прежде всего математической, морских офицеров. Математические науки читались в них на уровне университетского курса. В дальнейшем совершенствовании воспитанников в математике особую роль играли также читанные в 1836—1837 гг. Остроградским в корпусе публичные лекции по алгебраическому и трансцендентному анализу, записанные и изданные, как уже отмечалось, офицерами С. А. Бурачеком и С. И. Зеленым.

Сохранилась составленная Остроградским печатная программа трехгодичного курса математических наук в офицерских классах Мор-

ского кадетского корпуса. По перечню предметов она охватывала университетский курс математики того времени, а по содержанию многих разделов даже превосходила его. Есть сведения, что в 1839 г. Остроградский приступил, по настойчивой просьбе И. Ф. Крузенштерна, директора корпуса, к написанию и печатанию курса дифференциального и интегрального исчисления для офицерского класса Морского кадетского корпуса. По свидетельству Бурачека, в этом курсе он пользовался теорией пределов, упростив ее по сравнению с изложением Коши. Отступление от таких более привычных для того времени способов изложения дифференциального исчисления, как исчисления бесконечно малых (дифференциалов) или по Лагранжу, представляет значительный интерес, однако судить о нем трудно, так как записи курса не сохранились.

Одним из преподавателей математики в корпусе был воспитанник Остроградского А. И. Зеленый (1809—1892). В 1843 г. он написал специально для слушателей корпуса «Краткое руководство начертательной геометрии с приложениями». Остроградский и Буняковский высоко оценили эту книгу. Другой ученик Остроградского и Буняковского по Морскому корпусу Ф. Ф. Веселаго (1817—1895) преподавал в офицерских классах аналитическую геометрию с 1838 г. Он издал в 1842 г. для корпуса «Начальные основания динамики и гидростатики». Незадолго до перехода на гражданскую службу Веселаго опубликовал еще одну книгу — «Начальную геометрию для Морского кадетского корпуса» (1853 г.), признанную Академией наук «классическим и наиболее приспособленным к нуждам флотского офицера» руководством.

Для преподавания в офицерских классах Морского корпуса были приглашены также А. Н. Савич (в 1843 г.) и О. И. Сомов (в 1849 г.). Сомов издал учебник для корпуса по начальной алгебре (1860 г.), «Таблицы обыкновенных логарифмов чисел и тригонометрических линий» (1860 г.) и «Начальные основания аналитической геометрии двух измерений» (1861 г.). Эти пособия отличаются сжатостью и систематичностью изложения. Таблицы были шестизначными и лучше приспособленными для учащихся, чем бывшие тогда в употреблении пятизначные таблицы Лаланда и др. Савич написал учебное пособие «Начальные основания дифференциального и интегрального исчисления» (вышло в 1861 г.).

Многим в улучшении своего математического образования были обязаны М. В. Остроградскому также артиллеристы и военные инженеры. В Главном инженерном, а также в Артиллерийском училищах в младших кондукторских (в Артиллерийском училище — юнкерских) классах читалась элементарная математика, в старшем кондукторском (двух старших юнкерских) и в младшем офицерском классах — высшая математика (аналитическая геометрия, дифференциальное и интегральное исчисления). До Остроградского математика в Главном инженерном училище считалась некоторое время второстепенным предметом. По существовавшему в училище мнению, дифференциальное и интегральное исчисления следовало преподавать не всем воспитанникам, а лишь некоторым, имеющим способности к изучению высшей математики. С приходом в 1840 г. Остроградского положение резко изменилось. Математическая подготовка слушателей намного повысилась. При его поддержке

и непосредственном участии в начале 40-х годов в училище был создан кружок молодых преподавателей.

Одним из членов этого кружка был Г. Е. Паукер (1822—1889), назначенный после окончания училища в 1842 г. репетитором по математике. Первой его работой явилась чисто математическая по своему содержанию заметка о некоторых признаках сходимости рядов. В ней показано, что признаки сходимости и расходимости рядов с положительными членами, предложенные Берtrandом (1842 г.) и де Морганом (1839 г.), представляют собой очень простое следствие общей теоремы Коши о сходимости рядов (1821 г.). В другой работе, уже прикладного характера, — «О проверке устойчивости цилиндрических сводов» — Паукер применил к расчету сводов начало возможных перемещений в предложенной (1835 г.) Остроградским форме. Специально этому началу он посвятил одно из наиболее крупных своих сочинений. В дальнейшем Паукер стал видным специалистом по строительной механике, одним из крупнейших военно-инженерных деятелей России.

Другой ученик Остроградского по Главному училищу, профессор математики и механики в военно-учебных заведениях с 1862 г., В. И. Беренс (1814—1884) известен как автор учебных пособий «Курс дифференциального исчисления» (1849 г.), «Дифференциальное исчисление» (1858 г.) и «Интегральное исчисление» (1862 г.), которые содержат немало новых для русского читателя того времени сведений, а также первого на русском языке руководства «Теория численных приближений» (1857 г.). Книги Беренса по анализу предназначались для военно-учебных заведений. В значительной степени они составлены по лекциям Остроградского, читанным в Инженерном училище, а затем в академии. Руководство Беренса по приближенным вычислениям являлось пособием для лиц, занятых практическими вычислениями. Число их к тому времени значительно возросло. На необходимость составления такого пособия Остроградский обращал внимание и других своих учеников. Беренс рассмотрел два главных вопроса теории приближенных вычислений: по данным погрешностям чисел, входящих в формулу, определить степень точности самой формулы и обратную задачу. Обе они решены для действий сложения, вычитания, умножения, деления, возвышения в степень и извлечения корней, а также их сочетаний. Особо автор останавливается на определении погрешностей при вычислениях с помощью рядов и в связи с этим в качестве примеров приводит вычисление π с точностью до 10^{-9} и e с точностью до 10^{-10} .

В 1855 г. офицерские классы Главного инженерного училища были преобразованы в Николаевскую инженерную академию⁷, в Артиллерийском училище — в Михайловскую артиллерийскую академию. Остроградский продолжал преподавать в обоих учебных заведениях. Одним из первых его учеников по Инженерной академии был Н. П. Петров (1836—1920), оставленный после окончания академии в 1858 г. репетитором по математике. Впоследствии Петров стал видным русским уче-

⁷ Вместо «Инженерных записок», издававшихся в 1826—1856 гг., с 1857 г. начал выходить «Инженерный журнал», значительное место в котором занимали оригинальные статьи.

ным и инженером, основоположником гидродинамической теории смазки. В 1857 г. Инженерную академию окончил Ц. А. Кюи (1835—1918), впоследствии известный профессор фортификации и композитор.

В Артиллерийском училище Остроградский начал преподавать с 1841 г. Сначала он читал дифференциальное и интегральное исчисления. В 1847 г. от Анкудовича к нему перешел курс аналитической механики. Анкудович же продолжал преподавать баллистику, первым систематическим и полным для того времени курсом которой была его «Теория баллистики, содержащая в себе приложение математического анализа к определению различных обстоятельств, сопровождающих движение тяжелых тел, брошенных какою-нибудь силою» (1836 г.). 35 лет преподавал математику в училище А. С. Киндерева (с начала 20-х годов), читавший некоторое время, с 1837 по 1841 г., дифференциальное и интегральное исчисления. Другим помощником Анкудовича в училище, с 1822 г. до середины 30-х годов, был А. Я. Кушакевич (1790 — 1865). Киндерева и Кушакевича издали «Курс чистой математики» (1840—1847 гг.), состоящий из пяти частей. Содержание его составляли арифметика, начальные основания алгебры, начертательная геометрия, прямолинейная и сферическая тригонометрия и аналитическая геометрия. Этот курс предназначался в качестве учебного руководства для соответствующих классов военно-учебных заведений.

Благодаря Остроградскому курсы математики и аналитической механики в училище были обновлены, подняты на более высокий уровень, соответственно развитию науки того времени, преподавание аналитической геометрии, интегрального исчисления расширено. К преподаванию широко привлекались его ученики. Из учеников Остроградского репетиторами в училище были оставлены: в 1844 г. — П. Л. Лавров, по высшей математике; в 1846 г. — О. И. Родошковский, по артиллерии и математике; в 1847 г. — Н. А. Усов, по физике и химии; в 1849 г. — С. Г. Иоганни, по артиллерии и математике; в 1852 г. — Н. Л. Чебышев, по математике, а также А. М. Беляев, по математике и механике; в 1853 г. — Н. Н. Новосельский, по математике, теории лафетов, баллистике, и др. Из них со временем высшую математику читали Лавров и Усов. Одним из основных курсов Иоганни был курс приложений математического анализа к устройству лафетов и повозок.

После преобразования офицерских классов училища в академию с одногодичными теоретическим и следующим за ним практическим отделениями в старших юнкерских классах было оставлено преподавание аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчислений. На теоретическом отделении академии по программе 1856 г. читались курс математики, включавший теорию алгебраических функций, теорию дифференциальных уравнений, исчисление конечных разностей и теорию вероятностей, а также курс теоретической механики. С 1858 г. эти курсы преподавал П. Л. Лавров (1823—1900). В 1856/57 учебном году на теоретическом отделении Остроградский читал внешнюю баллистику, на практическом — внутреннюю, уделяя при этом основное внимание дифференциальным уравнениям движения снаряда в стволе орудия и вне его, а также вопросам их интегрирования. Он специально

останавливался на началах исчисления конечных разностей, а также на началах интерполирования величин, зависящих от одной переменной, включая формулу Лагранжа, и от двух переменных. Курс баллистики Остроградского отличался теоретическим направлением.

В 1858 г. для преподавания баллистики в академию был приглашен Н. В. Маиевский (1823—1892), окончивший в 1843 г. Московский университет и в 1846 г. офицерские классы Артиллерийского училища, где он слушал лекции Остроградского по анализу. Маиевский прославился своими таблицами стрельбы для всех русских орудий того времени, таблицами для облегчения баллистических вычислений и работой по внутренней баллистике о давлении пороховых газов на стены орудий (1856 г.), появившейся в переводе на французский и немецкий языки также за границей. Курс Маиевского удовлетворял состоянию теории артиллерии того времени больше, чем курсы по этому предмету в лучших зарубежных артиллерийских школах. С конца 50-х годов Маиевский занимался теоретическими и практическими работами, связанными с переходом от гладкоствольных орудий со сферическими снарядами к нарезным орудиям с продолговатым вращающимся снарядом⁸. Его по праву считают основателем русской научной школы баллистики, одним из творцов современной баллистики.

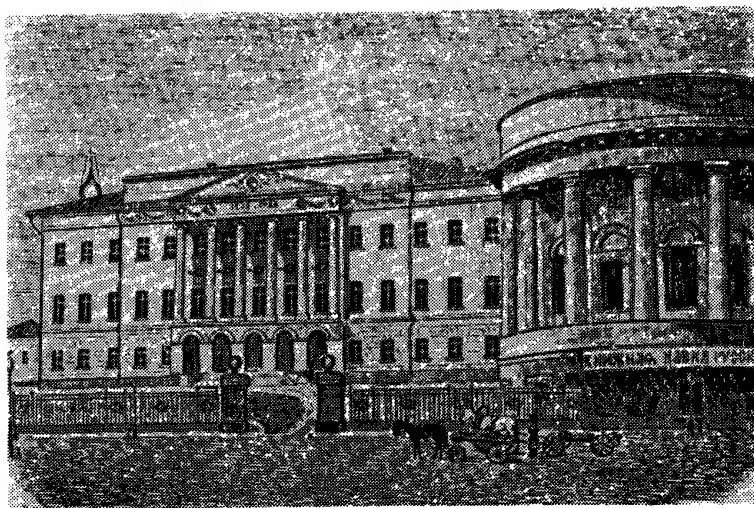
В связи с расширением преподавания математических наук к работе в Артиллерийском училище, а затем академии были привлечены ученики Остроградского по Главному педагогическому институту И. А. Вышнеградский, Н. С. Будаев и П. Е. Рощин. Продолжая совершенствоваться в математических науках под руководством Остроградского, Вышнеградский в 1854 г. защитил в Петербургском университете магистерскую диссертацию «О движении системы материальных точек, определяемой полными дифференциальными уравнениями». По представлению Остроградского Петербургская академия наук поместила в одном из своих изданий заметку Вышнеградского о радиусах кривизны конических сечений. Вышнеградский ввел в России преподавание теоретических основ машиностроения, а также при специальной подготовке будущих инженеров курсовые и дипломные проекты. Он является основателем научной школы в области конструирования машин и основоположником теории автоматического регулирования.

6

Математика в Московском университете

До 1833 г. главную роль в преподавании математики в университете играл профессор П. С. Щепкин. С 1828 г. он читал, в основном, дифференциальное и интегральное исчисления. Щепкин не был сторонником новшеств в преподавании математики. Со вре-

⁸ Важные исследования по внутренней баллистике выполнил А. В. Гадолин (1828—1892), окончивший Артиллерийское училище в 1849 г. Его результаты были включены Маиевским в курс баллистики. Впоследствии Гадолин стал видным ученым также в области кристаллографии и теории механической обработки металлов.



Здание Московского университета. 1835 г.

менем он оставил университет и перешел в гимназию, а затем — в Константиновский межевой институт⁹. Аналитическую геометрию до 1834 г. читал адъюнкт Н. В. Коцауров. Исчисление на счетах по способу Свободского преподавал воспитанник Московского университета магистр физико-математических наук П. Н. Погорельский (1800—1852). После поездки в Петербург для изучения арифметики на счетах под руководством академика П. В. Тарханова Погорельский издал (1830 г.) краткое пособие по этому вопросу. В университете он преподавал до 1836 г., затем вернулся в среднюю школу. Впоследствии стал видным деятелем народного образования. Широкую известность получили его руководства по математике для средней школы, особенно по алгебре.

В рассматриваемый период значительную роль в математической жизни университета продолжал играть профессор Д. М. Перевощиков. «Ручная математическая энциклопедия», математические книги которой переиздавались, перерабатывались и использовались с середины 30-х годов в университете, составляет важнейший его вклад в распространение математического просвещения в стране. В 1832 г. он был избран членом-корреспондентом Петербургской академии наук. В своих курсах астрономии, особенно в специальных курсах по теоретической астрономии и геодезии, теории планет и комет, Перевощиков широко использовал математику. Он занимался со слушателями упражнениями в практических вычислениях, увязывал теоретический материал с работами, проводившимися с 1830 г. в Московской астрономической обсерватории, которая была построена под его руководством и которую он возглавлял на протяжении 20 лет. После ухода профессора прикладной математики Ф. И. Чумакова Перевощиков обновил преподавание механики. Весной 1834 г. он читал также аналитическую геометрию.

⁹ Организован в 1835 г. в Москве на базе межевого училища. В 1850 г. институт получил права высшего учебного заведения.

Роль Перевощикова в математической жизни Московского университета особенно возросла с избранием его в 1833 г. деканом физико-математического отделения. На этот пост он избирался на протяжении 15 лет. Вместе с профессором И. И. Давыдовым Перевощиков организовал издание «Ученых записок Московского университета», начавших выходить с 1833 г. и вскоре ставших важным научным журналом страны. В 1834 г. он привлек для преподавания чистой математики в университете своего ученика Н. Е. Зернова, а прикладной — Н. Д. Брашмана. Ему было поручено составить проект изменения программы преподавания на физико-математических отделениях университетов перед утверждением в 1835 г. нового университетского устава.

Много внимания Перевощиков уделял вопросам преподавания математики в средней школе. Для нее он издал перевод «Курса чистой математики» Лакруа (1833—1835 гг.), свои книги — «Гимназический курс чистой математики» (1838 г.) и «Основания алгебры» (1854 г.), переиздал составленные Лаландом «Таблицы логарифмов чисел и тригонометрических линий» (1836 г.). Ему принадлежат также университетские руководства по астрономии и физике, большое число научных и научно-популярных статей по самым разнообразным вопросам физико-математических наук. Некоторые статьи Перевощикова рецензировал Н. Г. Чернышевский, отмечавший, что и по числу и по внутреннему достоинству они в русской литературе занимают первое место в ряду всех подобных произведений.

Перевощиков сыграл видную роль в распространении физико-математических знаний в России. Он отстаивал интересы русской науки, ее честь, боролся за признание заслуг русских ученых, особенно М. В. Ломоносова. Раскрытию огромного значения М. В. Ломоносова в развитии науки Перевощиков посвящал статьи, выступления. Он был его последователем, прогрессивным деятелем своего времени.

В 1834 г. начал свою деятельность в Московском университете Николай Ефимович Зернов (1804—1862). Он родился в Москве в семье служащего почтамта. Учился в Демидовском лицее в Ярославле и в Московском университете на физико-математическом отделении, которое окончил в 1822 г. со степенью кандидата. На предложенную Перевощиковым тему Зернов написал магистерскую диссертацию «Рассуждение о суточном и годовом движениях Земли» (1826 г.), которую успешно защитил в 1827 г. Для него характерно стремление к практическому применению науки. Наряду с астрономией и математикой его привлекала физика. Исследованиям в этих областях знания он посвящал свои научные работы, популярные статьи, критические заметки. Адъюнктом университета Зернов был утвержден в 1834 г., экстраординарным профессором — в следующем. В связи с требованиями нового университетского устава Зернов защитил в 1837 г. (первым в России) докторскую диссертацию по математике — «Рассуждение об интеграции уравнений с частными дифференциалами». В ней изложены известные для того времени методы интегрирования в конечном виде или с помощью бесконечных рядов уравнений, прежде всего первого порядка различных степеней и высших порядков первой степени, простейших

уравнений высших порядков и степеней. Диссертация Зернова была первым сочинением на русском языке в этой области и широко использовалась в качестве учебного пособия.

Приступив к преподаванию высшей алгебры, дифференциального и интегрального исчисления в середине учебного года, после ухода Щепкина, методы преподавания которого были устаревшими, Зернов вынужден был прочесть некоторые разделы наново. В основу коренной перестройки всего преподавания математики он положил «Ручную математическую энциклопедию» Перовошикова. Это позволило ему впервые в Московском университете сделать понятие предела рабочим понятием, ввести в употребление оценки при теоретических рассуждениях, а не только при практических вычислениях, как это было до него. Во вступительной лекции «Изложение предварительных понятий о дифференциальном исчислении» (1835 г.) Зернов много внимания уделяет понятиям бесконечно малой и производной, выяснению их роли в математическом анализе. По «Ручной математической энциклопедии» он вначале преподавал также аналитическую геометрию. С 1836/37 учебного года Зернов преподавал в университете все математические курсы: аналитическую геометрию — по «Курсу аналитической геометрии» (1836 г.) Брахмана, высшую алгебру — по «Лекциям алгебраического и трансцендентного анализа» (1837 г.) М. В. Остроградского. Свои лекции он дополнял сведениями из сочинений зарубежных ученых.

С 1835/36 учебного года Зернов читал «интеграции уравнений дифференциальных и с частными дифференциалами, способ вариаций и исчисление разностей», используя со временем свою докторскую диссертацию и извлечения из сочинений Пуассона и Лакруа. Появление этого нового курса было связано с прекращением в университете чтения отдельных курсов элементарной математики. Необходимые сведения по приложению алгебры к геометрии и по плоской тригонометрии из-за недостаточной подготовки поступающих сообщались в университете и в дальнейшем, но это делалось в виде повторения и обобщения на первом курсе и занимало немного времени. Поэтому оказалось возможным аналитическую геометрию и высшую алгебру читать только на первом курсе, дифференциальное и интегральное исчисления — на втором, а на старших курсах использовать время для других предметов.

Зернов внимательно следил за выходом новых математических сочинений, лучшие из них использовал в преподавании. В 1842 г. он издал свое сочинение «Дифференциальное исчисление с приложением к геометрии», долгое время служившее в Московском университете основным руководством по этому предмету. Кроме подробного изложения дифференциального исчисления и его применений к геометрии (теория соприкосновения кривых линий и поверхностей, способы определения особых точек) в сочинении Зернова рассмотрены вопросы нахождения корней функций по способам Фурье и Штурма, а также признаки сходимости рядов, разложение рациональных дробей, известный пример Коши функции $e^{-\frac{1}{x^2}}$, имеющей производные любого порядка при $x = 0$ и не разложимой в ряд Маклорена. Из других рассмотренных вопросов



Н. Е. Зернов.

выделяются составление дифференциальных уравнений и «образование поверхностей через движение линий», обращение рядов с формулой Лагранжа и, особо, приближенные вычисления с точной оценкой погрешностей. По отзыву Остроградского Зернову была присуждена за руководство половинная Демидовская премия (1844 г.). В 1842 г. он был утвержден ординарным профессором чистой математики. Большое просветительное значение имела его речь на торжественном собрании Московского университета «Теория вероятностей с приложением преимущественно к смертности и страхованию» (1843 г.). В ней он осветил основные положения теории вероятностей и те ее приложения, которые тогда были особенно актуальны.

Улучшение преподавания математики в Московском университете связано также с деятельностью Н. Д. Браш-

мана. С 1834 г. он читал в университете прикладную математику, а в 1835/36 учебном году кроме курса механики — также аналитическую геометрию. По этому предмету, как упоминалось выше, Брашман издал «Курс аналитической геометрии», в котором отражен его опыт преподавания в Казанском университете и в котором чувствовалось влияние Лобачевского. Книга была удостоена Демидовской премии.

В дальнейшей научной деятельности Брашмана определяющим было влияние Остроградского. В большой степени оно сказалось в его сочинении «Теория равновесия тел твердых и жидких или статика и гидростатика» (1837 г.), его первом учебном пособии по механике. При составлении этого пособия Брашман, по его замечанию, «преимущественно пользовался известными указаниями Академика Остроградского и отчасти сочинениями Лагранжа, Пуассона и Коши». В книге применены эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода. В последней главе рассмотрены поверхности однородной вращающейся вокруг оси жидкости, взаимное притяжение частиц которой подчинено закону Ньютона, в частности условия равновесия в случае трехосного эллипсоида. Влияние Остроградского заметно также в педагогической деятельности Брашмана, благодаря которой в Московском университете были «заложены первые научные основы преподавания» механики. С начала 40-х годов Брашман много внимания уделял практическому применению механики.

Интересные мысли содержатся в речи Брашмана «О влиянии математических наук на развитие умственных способностей». В частности, он говорил о полезной деятельности университетских математиков Рос-

сии: «Судя по деятельности русских университетов и других учебных заведений, можем впредь надеяться, что и наша очередь придет, что полюбостуют читать не только русских поэтов, но также геометров»¹⁰. Во время поездки летом 1842 г. за границу Брашман одним из первых успешно представлял ученых России за рубежом. На собрании Британской ассоциации содействия успехам наук в Манчестере он выступил с докладом «Замечания о принципе аналитической механики».

Изменившееся с середины 30-х годов благодаря деятельности Перевощикова, Зернова и Брашмана положение математических наук в университете прежде всего нашло отражение в количестве работ по математике, появившихся в «Ученых записках Московского университета» в первые годы их издания.

В последующие годы появились отдельные сочинения по математике воспитанников университета, в том числе диссертации. Диссертация В. Драшусова «Рассуждение о кривизне поверхностей около каждой их точки» (1838 г.) примыкает к вопросам, которыми занимался профессор Зернов. Стремлением к систематизации выводов и их обобщению отличается диссертация А. Я. Лукьянова «Рассуждение о вариациях главнейших видов функций» (1839 г.), в которой рассмотрено формальное получение выражений для вариаций различных порядков самих функций и выражений, содержащих их дифференциалы, в том числе под знаком интеграла.

Из воспитанников Московского университета по математическим наукам для преподавания в нем в 40-х годах был привлечен лишь А. С. Ершов (1818—1867). С 1844 г. он начал читать курсы практической механики и начертательной геометрии. В своих лекциях Ершов много внимания уделял прикладным вопросам.

В 1850 г. по предложению Брашмана адъюнктом университета был утвержден А. Ю. Давидов (1823—1885). Окончив в 1845 г. Московский университет со степенью кандидата, он продолжал совершенствовать свои знания под руководством Брашмана. В 1848 г. защитил магистерскую диссертацию «Теория равновесия тел, погруженных в жидкость», которая была удостоена Демидовской премии. Вопросам прикладной математики посвящена и докторская диссертация Давидова «Определение вида поверхности жидкости, заключенной в сосуде» (защитил в 1852 г.). В университете Давидов вначале читал студентам третьего



Н. Д. Брашман.

¹⁰ Н. Д. Брашман. О влиянии математических наук на развитие умственных способностей. М., 1841, стр. 24—25.

курса теории вероятностей с ее приложениями к страховому делу и обработке наблюдений. Он создал свой оригинальный курс теории вероятностей, который при сравнительно небольшом объеме отличался богатым содержанием и необычайной ясностью изложения. В своем курсе Давидов часто останавливался на приложениях к статистике. В этом же направлении написаны его математические статьи «Приложение теории вероятностей к статистике» (1855 г.), «Употребление выводов теории вероятностей в статистике» (1855 г.) и «Приложение теории вероятностей к медицине» (1854 г.). В первой из них, наиболее значительной по содержанию, использованы различные формы закона больших чисел, получаемые автором с помощью доказанной им теоремы о вероятностях. В двух других материал изложен в общедоступной форме, рассчитанной на лиц, не знакомых с высшей математикой. Для облегчения использования выводов теории вероятностей приведены специально составленные автором таблицы.

В 1853 г. Давидов получил звание экстраординарного профессора прикладной математики. Ему было поручено чтение небесной механики как самостоятельного курса на физико-математическом факультете. Основу курса составляли теория вековых возмущений движения планет и начала теории движения Луны. В этот период Давидов читал также предварительный курс механики. С 1859 г. он ординарный профессор прикладной математики, с 1862 г. — преемник Зернова по кафедре чистой математики, в области которой была сконцентрирована его дальнейшая педагогическая и научная деятельность.

С начала 50-х годов количество часов по курсам математики, включая начертательную геометрию, возросло до 12 в неделю. Студенты математического отделения слушали также курсы прикладной математики — механику и небесную механику. Кроме того, профессор физики М. Ф. Спасский читал на третьем и четвертом курсах математическую физику. Таким образом, преподавание математических наук в университете значительно расширилось.

Все большую роль в математической жизни университета играл Брашман. Был издан его курс механики, сначала литографским способом (1853 г.), а затем напечатан (1859 г.). Он очень близок к «Лекциям по аналитической механике» Остроградского. В своих лекциях Брашман освещал также вопросы теории упругости, математической оптики, теории звука, баллистики, уделял много внимания новым важнейшим исследованиям в области математики, механики и их приложения, за появлением которых он постоянно следил. Кроме того, он популяризировал привлекавшие тогда внимание ученых вопросы математики и механики. В конце 1855 г. Брашман был избран членом-корреспондентом Петербургской академии наук по физическому разряду.

В рассматриваемый период в Московском университете, прежде всего благодаря деятельности профессоров Перовошикова, Зернова и Брашмана, математика, механика и астрономия вошли в число ведущих предметов. Была начата систематическая подготовка специалистов-математиков. По числу выпускников физико-математический факультет Московского университета занял первое место среди физико-математи-

ческих факультетов страны¹¹. В нем учились О. И. Сомов и П. Л. Чебышев, а также многие другие впоследствии известные ученые в различных областях математических наук, в том числе Н. В. Маиевский — в области баллистики, И. И. Рахманинов — в области прикладной математики, М. Ф. Окатов — в области практической механики, Ф. А. Бредихин — в области астрономии. Важнейшим результатом значительных сдвигов в положении математических наук в Московском университете явилось создание в 60-х годах Московского математического общества, начало издания журнала «Математический сборник» и особенно начало плодотворной творческой деятельности московских ученых в области математики.

7

Математика в Харьковском университете

Ведущим преподавателем математических наук в Харьковском университете до 1849 г. оставался профессор А. Ф. Павловский. Его помощником вначале был ординарный профессор кафедры сельского домоводства М. А. Байков. Он читал на первом курсе высшую алгебру, прямолинейную и сферическую тригонометрию и конические сечения. Профессор Павловский читал на втором курсе дифференциальное и интегральное исчисления, высшую геометрию и др. С 1829 г. Байков преподавал счисление на счетах по способу Свободского студентам, готовившимся к преподавательской деятельности, а также другим лицам (для ознакомления с этим предметом он ездил в Петербург). В качестве пособия университет издал «Пояснение на способ генерал-майора Свободского делать вычисления на счетах, составленное вследствие распоряжения высшего начальства» (1831 г.).

После ухода из университета Байкова (1832 г.) преподавание математики на первом курсе было поручено Н. А. Дьяченко (1809—1878). Он окончил в 1829 г. физико-математическое отделение Харьковского университета со степенью кандидата. В 1832 г. выдержал экзамен на степень магистра чистой и прикладной математики, а в 1835 г. защитил магистерскую диссертацию «Рассуждение об успехах после Эйлера сделанных в нахождении интегралов определенных и об употреблении их». Диссертация в основном интересна тем, что в ней собраны формулы для определенных интегралов. В этом сочинении отражены главным образом результаты Пуассона и Коши. Идеи Коши Дьяченко использовал также в преподавании. Высшую алгебру, тригонометрию и конические сечения он читал по своим запискам, придерживаясь в основном Коши, Бурдона, Лежандра и Осиповского.

¹¹ С 1853 по 1862 г. физико-математический факультет Московского университета окончили 315 чел., Петербургского — 222, Казанского — 44, Харьковского — 142, Киевского — 136, Дерптского — 84. См. Журнал Министерства народного просвещения, 1863, ч. 118, отд. 6.



Н. А. Дьяченко.

В 1836 г. Дьяченко был утвержден адъюнктом. Кроме математики на первом курсе, включая практическую геометрию и введение в дифференциальное и интегральное исчисления, он временно преподавал технологию. Со следующего года, после увольнения профессора Н. М. Архангельского, Дьяченко читал курс прикладной математики. Вскоре после защиты докторской диссертации «Рассуждение о гидравлических колесах» (1838 г.) он был утвержден экстраординарным профессором по кафедре прикладной математики, а весной 1839 г. переведен в Киевский университет на кафедру чистой математики.

После отъезда Дьяченко всю математику преподавал Павловский. На первом курсе в 1839—1845 гг. он читал, пользуясь руководством Осиповского, алгебру, плоскую и сферическую тригонометрию и конические сечения, включая дополнительно во втором полугодии введение в теорию функций (введение в дифференциальное и интегральное исчисления) или введение в криволинейную геометрию. На втором курсе Павловский читал курс по своим запискам. Со временем он пополнил этот курс интегрированием дифференциальных уравнений, разностных функций и разностных уравнений.

В конце 1839 г. адъюнктом Харьковского университета был назначен ученик Остроградского по Главному педагогическому институту доктор философии (по математическим наукам) И. Д. Соколов. Непродолжительное время он читал аналитическую геометрию, затем механику. В начале 1841 г. Соколов был утвержден ординарным профессором прикладной математики. Его курс механики включал интегрирование дифференциальных уравнений и вариационное исчисление. Для улучшения преподавания математических наук в университете эти разделы курса механики в 1843 г. были переданы Павловскому, и Соколов смог сосредоточить свое внимание на курсах рациональной (аналитической) и прикладной механики. Сферическая тригонометрия, как и в других университетах, была отнесена к курсу астрономии, которую читал А. П. Шидловский (1818—1892). При участии Соколова состоялась в 1846 г. защита магистерской диссертации «О приложении анализа к изложению начал динамики» старшим учителем Харьковской первой гимназии Ф. Н. Королевым.

Еще в 1841 г. Павловский ходатайствовал о предоставлении возможности увеличить штат преподавателей математики. Однако лишь в 1845 г. на должность адъюкта был назначен ученик Остроградского по Главному педагогическому институту Е. И. Бейер, вернувшийся из-за

границы после совершенствования в математических науках. Сначала он преподавал только на первом курсе. Студентам-математикам он читал: в первом полугодии — алгебру по сочинениям Лагранжа, Фурье и Коши, а в дальнейшем и теорию логарифмических функций по Эйлеровскому «*Introductio in analysin infinitorum*», во втором полугодии — тригонометрию и аналитическую геометрию (последнюю — по Леруа, а затем по Брашману). В 1848/49 учебном году Бейер отводил один час в неделю на упражнения студентов в решении задач. Со следующего учебного года вместо упражнений он читал исчисление вероятностей студентам четвертого курса, положив тем самым начало преподаванию этого предмета в Харьковском университете.

В 1849 г. Бейер защитил магистерскую диссертацию «О решении определенных буквенных алгебраических уравнений» и получил степень магистра математических наук, а также был утвержден в звании адъюнкта. Диссертация осталась неопубликованной. Она начиналась подробным историческим очерком, а в основной своей части по существу сводилась к разложению в ряды алгебраической функции (без рассмотрения их сходимости). В ней развиты и детализированы способы Ньютона, Лагранжа и Фурье.

С уходом Павловского в отставку (в декабре 1849 г.) в течение почти всех 50-х годов единственным преподавателем кафедры чистой математики был Бейер. Он пополнял лекции новым материалом, а порой и своими рассуждениями. Опубликовал лишь одну свою работу — «Об интегрировании линейных дифференциальных уравнений с каким угодно числом изменяемых величин» (1858 г.). В ней изложены формальные способы интегрирования уравнения

$$Xdx + X_1dx_1 + X_2dx_2 + \dots + X_mdx_m = 0,$$

при этом использованы исследования Пфаффа и Якоби. Большой самостоятельностью исследования отличаются параграфы об уравнениях с нечетным числом переменных и уравнениях, коэффициенты которых удовлетворяют только части условий интегрируемости. В прибавлении дан способ интегрирования уравнений

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

где M и N — многочлены второй степени относительно x и y . Представляет интерес также исторический очерк.

В 1858 г. Бейер был назначен на должность экстраординарного профессора. В университет был приглашен еще один преподаватель математики — М. Г. Котляров (1834—1904), ученик Бейера, окончивший университет со степенью кандидата в 1857 г. В 1859/60 учебном году Котляров читал на первом курсе аналитическую геометрию и высшую алгебру студентам-математикам, а также алгебру, прямолинейную тригонометрию и начала конических сечений студентам-естественникам. Бейер оставил за собой математику на втором курсе, а также теорию определителей и теорию чисел (последнюю читал по «Арифметическим исследованиям» Гаусса) на третьем и четвертом курсах.

В рассматриваемый период Харьковский университет в развитии математических наук отстал от других университетов страны. Математическая деятельность в нем почти полностью сводилась к одному преподаванию. Даже составление учебных пособий не получило должного развития. Университет постоянно испытывал недостаток в преподавателях математики, подготовка же их из числа своих воспитанников велась слабо. Вместе с тем преподавание математических наук в университете постепенно расширялось и обновлялось.

8

Математика в Киевском университете

Уже с конца XVIII в. обсуждался вопрос об открытии университета в Киеве. Однако открыт он был только в 1834 г. на базе Волынского лицея, который был закрыт в 1831 г. в связи с польским восстанием. Большинство его преподавателей составили профессора лицея, в прошлом воспитанники главным образом Виленского университета.

Первыми преподавателями чистой и прикладной математики в новом университете были ординарный профессор С. С. Выжевский (1783—после 1850), возглавивший второе отделение философского (с 1850 г. физико-математического) факультета, и адъюнкт Г. В. Гречина (1796—1840). Выжевский в первом учебном году читал «приложения алгебры к высшей геометрии, заключающие науку о конических сечениях и о поверхностях второго порядка» по руководству Био. Со следующего учебного года этот предмет назывался аналитической геометрией. Лекции Выжевского для студентов второго курса охватывали дифференциальное и интегральное исчисления (включая приложения к геометрии и интегрирование дифференциальных уравнений), а на третьем курсе — вариационное исчисление, статику и динамику. Гречина в 1834/35 учебном году преподавал алгебру, пользуясь своим сочинением, изданным в 1830 г. для воспитанников Волынского лицея, а затем и руководством по алгебре Бурдона. С уходом (в 1837 г.) Выжевского в отставку алгебру и аналитическую геометрию сначала читал Н. М. Гренков, затем А. Н. Тихомандрицкий (1810—1888), ученик Остроградского по Главному педагогическому институту. В своем курсе алгебраического анализа Тихомандрицкий придерживался сочинений Остроградского, Коши и Лагранжа. Ему было передано в 1839 г. также преподавание начертательной геометрии, которую до него читал профессор архитектуры Ф. И. Мехович.

Гречина в 1837 г. был утвержден экстраординарным профессором, а в следующем году защитил рукописное сочинение «Рассуждение о капиллярном действии» и получил степень доктора математических наук. Его лекции уступали лекциям Выжевского в точности и обширности материала, однако превосходили их живостью изложения.

В связи с проявлением революционных настроений студентов в 1839 г. в университете на несколько месяцев лекции были прекращены.

Некоторые студенты были арестованы, многие переведены в другие университеты или определены на службу. Перемещения коснулись также преподавателей. Гречина был переведен в Харьковский университет. Здесь его избрали ординарным профессором прикладной математики. Здесь же, будучи уже тяжело больным, он закончил перевод на русский язык курса механики Пуассона (остался ненапечатанным). Из Харьковского университета в Киевский, как отмечалось выше, был переведен Н. А. Дьяченко.

Дьяченко длительное время возглавлял преподавание математических наук в Киевском университете. В 1839/40 учебном году он читал на втором курсе дифференциальное и интегральное исчисления с приложениями к геометрии, на третьем курсе — интегрирование дифференциальных уравнений и вариационное исчисление, статику и динамику, на четвертом — гидростатику и гидродинамику, со следующего года — также приложение алгебраического анализа к геометрии по Леруа и аналитическую геометрию. Этот перечень охватывал предметы, которые до Дьяченка читали Выжевский и Гречина. Дьяченко пополнил его новыми предметами — теорией определенных интегралов, исчислением разностным и вычетов, теорией кривых поверхностей и кривых линий в пространстве, теорией алгебраических уравнений. Новые курсы — теорию рядов и теорию чисел — ввел также Тихомандрицкий. Изменения в преподавании были связаны с разделом второго отделения философского факультета на два разряда, математических и естественных наук. При этом оказалось возможным расширить математическую подготовку студентов-математиков. В конце 1842 г. в самостоятельную кафедру была выделена кафедра прикладной математики. На нее перешел Тихомандрицкий. На кафедре чистой математики остался Н. А. Дьяченко. В 1847—1856 гг. он был деканом факультета.

Тихомандрицкий защитил докторскую диссертацию (сочинение «Решение двучленных уравнений», 1841 г.; в нем главное внимание уделено изложению предложенного Якоби способа решения двучленных уравнений). В 1843 г. он был утвержден ординарным профессором прикладной математики. В этот период до самого переезда (1848 г.) в Петербург, в Главный педагогический институт, Тихомандрицкий читал курс механики. Его лекции отличались глубоким содержанием, интересным изложением. То же можно сказать и о читанных им в 1845 г. лекциях по математической физике, которые касались вопросов притяжения эллипсоидов.

Помощником Н. А. Дьяченко в Киевском университете в 1846—1852 гг. был его брат А. А. Дьяченко (1814—1852), также воспитанник Харьковского университета. В 1847 и 1848 гг. он читал теорию алгебраических уравнений и теорию рядов по Коши, Фурье и Дробишу, затем начертательную геометрию и механику. Научные интересы А. А. Дьяченко отражены в его рукописных сочинениях «Об особенных решениях дифференциальных уравнений» (это сочинение он защитил в 1850 г. как магистерскую диссертацию) и «О кривизне поверхностей» (за эту работу в 1851 г. ему была присуждена степень доктора математики и астрономии).

Другим помощником Н. А. Дьяченко был П. Э. Ромер (1835—1899). В 1858 г. он начал свою преподавательскую деятельность с чтения курса алгебраического анализа. В этом же году Дьяченко впервые ввел в университете в качестве самостоятельного предмета теорию эллиптических функций.

Курсы прикладной математики и начертательную геометрию с 1853 г. читал воспитанник Московского университета И. И. Рахманинов (1826—1896). Своим преподаванием, включавшим новые начала и методы, научными исследованиями в области механики Рахманинов сыграл значительную роль в повышении математической культуры в университете.

Основу развития математики в Киевском университете в первые десятилетия его существования составляло совершенствование преподавания. По математике были опубликованы считанные работы. Например, в 50-е годы опубликована лишь одна работа по математике — исследование Н. А. Дьяченко «О влиянии дифференциального и интегрального исчисления на успехи геометрии и механики» (1852 г.). И все же положение, хотя и медленно, улучшалось. Непосредственным результатом развития математических знаний в университете в течение рассмотренного периода было значительное оживление математической деятельности университетских ученых в 60-е годы.

9

Математика в Дерптском университете

Ведущим математиком в Дерптском университете до 1836 г. был М. Ф. Бартельс. Кроме основных своих курсов — элементарной математики и алгебры — он читал также часто дифференциальное и интегральное исчисления, а иногда и отдельные курсы геометрических приложений этих исчислений, в 1836 г. — вариационное исчисление и теорию вероятностей. Опубликованный его курс лекций использовался в университете в качестве руководства по анализу.

Из воспитанников Дерптского университета наиболее выдающимися учениками Бартельса были братья К. Ю. Зенфф (1804—1832) и К. Э. Зенфф (1810—1850). К. Ю. Зенфф перед окончанием университета написал под руководством Бартельса конкурсное сочинение об основных предложениях аналитической геометрии в пространстве. В конце 1827 г. оно было удостоено серебряной медали, а затем напечатано. Деятельность К. Ю. Зенффа в области геометрии с большим успехом продолжил его младший брат. При окончании университета (1830 г.) К. Э. Зенфф получил золотую медаль за обширное сочинение на латинском языке «Основные теоремы теории кривых и поверхностей» (1831 г.), в котором впервые в мировой литературе систематически изложена теория кривых и поверхностей, находившаяся тогда в стадии становления. Он написал его также под руководством Бартельса. В предисловии

Зенффе особо замечает, что новые результаты, особенно по теории пространственных кривых, принадлежат не ему, а Бартельсу.

Как отмечалось выше, в методическом отношении новым в трактовке Бартельсом аналитической геометрии в пространстве было систематическое использование направляющих косинусов (по его терминологии, детерминантов). Эту методику дерптские математики применили и к теории пространственных кривых. Тем самым впервые была введена в употребление подвижная система осей, ныне называемая трехгранником Френе. Но Бартельс не ограничился этим. Он исследовал изменение системы осей при движении точки по кривой и вывел формулы, вполне эквивалентные формулам Френе. Свои формулы Бартельс записывает, естественно, в координатной форме. В современных обозначениях их можно записать так:

$$\bar{n}d\bar{t} = -\bar{t}d\bar{n} = d\sigma; \quad \bar{b}d\bar{n} = -\bar{n}d\bar{b} = d\sigma'; \quad \bar{t}d\bar{b} = -\bar{b}d\bar{t} = 0.$$

Здесь $\bar{t}$, $\bar{n}$ и $\bar{b}$ — единичные направляющие векторы соответственно касательной, главной нормали и бинормали, $d\sigma$ и $d\sigma'$ — дифференциалы дуги сферических индикатрис, т. е.

$$d\sigma = |\bar{t}d\bar{t}| = kds, \quad d\sigma' = |\bar{b}d\bar{b}| = \kappa ds,$$

где k и κ — соответственно кривизна и кручение в современном их значении. Сравнение с общеизвестными формулами Френе

$$\frac{d\bar{t}}{ds} = k\bar{n}; \quad \frac{d\bar{n}}{ds} = -k\bar{t} + \kappa\bar{b}; \quad \frac{d\bar{b}}{ds} = -\kappa\bar{n}$$

показывает, что в формулах Бартельса определяются не производные векторов $\bar{t}$, $\bar{n}$, $\bar{b}$, как в формулах Френе, а дифференциалы (причем не контравариантно, а ковариантно). Однако по содержанию формулы Бартельса и Френе совершенно эквивалентны. Френе получил свои формулы в 1847 г., формулы же Бартельса были опубликованы в работе Зенффа в 1831 г. Новые формулы дали Бартельсу возможность значительно проще получить ранее известные результаты — уравнение Ланкре, выводы о кривизне и кручении пространственных эволют и др. Примененные им для их доказательств способы поразительно близки к способам, используемым ныне. Сочинение Зенффа было единственным в мире руководством по дифференциальной геометрии. В Дерпте им пользовались на протяжении десятилетий.

Из воспитанников Профессорского института при Дерптском университете ближе всех к Бартельсу был П. И. Котельников (1809—1879). Он окончил в 1828 г. Харьковский университет со степенью кандидата физико-математических наук. После трех лет напряженных занятий в институте Котельников представил Бартельсу три рукописные работы на латинском языке. В первой из них рассмотрен вопрос о притяжении однородных сферических и эллиптических тел, во второй — вопросы вариационного исчисления, в третьей — вопросы о нормальной и средней кривизне поверхностей. К экзамену по астрономии Котельников представил работу о применении теории вероятностей к обработке результатов наблюдений. В 1833 г. он защитил диссертацию по небесной

механике ¹² и ему были присуждены степени доктора философии и магистра свободных наук. Затем два года он слушал лекции Штейнера и Дирихле в Берлине. В 1835 г. был направлен в Казанский университет, где со временем стал профессором прикладной математики и ближайшим сотрудником Н. И. Лобачевского.

У Бартельса совершенствовались в математике В. И. Лапшин, впоследствии профессор физики в Харьковском университете, А. Н. Савич, впоследствии профессор астрономии и геодезии Петербургского университета и академик, и другие воспитанники Профессорского института. На формирование их как ученых в области точных наук большое влияние оказывал также профессор астрономии Дерптского университета В. Я. Струве.

С 1834 г. Бартельсу в преподавании математики помогал К. Э. Зенфф. Он же через два с половиной года стал его преемником по кафедре чистой и прикладной математики. В 1832—1834 гг. Зенфф посетил несколько германских университетов. Дольше всего он был в Кенигсберге, где в это время преподавали математик К. Г. Якоби, астроном Ф.-В. Бессель, физик Ф. Э. Нейман. Здесь Зенфф увлекся геометрической оптикой. В одной из работ Неймана (1835 г.) излагается способ Зенффа для получения уравнения поверхности волны при прохождении света в двоякопреломляющем кристалле. Этот способ Нейман назвал в высшей степени простым и изящным. Зенфф достиг успехов также в области физики и астрономии. В 1837 г. он был утвержден экстраординарным профессором, а в следующем защитил докторскую диссертацию (на латинском языке), посвященную началам вариационного исчисления, и в 1839 г. был утвержден ординарным профессором. Преподавательскую и научную работу Зенфф совмещал с исполнением в разное время обязанностей директора астрономической обсерватории (после переезда Струве, в 1839 г., в Пулкову до назначения в 1840 г. на кафедру астрономии Г. Медлера), заведующего физическим кабинетом, декана и проректора.

В конце 30-х годов в Дерптском университете были защищены еще две докторские диссертации по физико-математическим наукам, в частности диссертация А. Н. Савича, посвященная определению уровня Каспийского моря и высоты главных вершин Кавказских гор. В ней изложены результаты больших вычислений автора. Вопросам математики посвящена магистерская диссертация В. Петровского «Об определенных интегралах» (1839 г.), представляющая собой обзор учения об определенных интегралах, прежде всего его общих методов и теорий. Петровский был одним из последних воспитанников Профессорского института. С 1840 г. он профессор прикладной математики Ришельевского лицея в Одессе.

Стараниями Зенффа в 1842 г. была осуществлена давнишняя мечта математиков Дерптского университета: получила право на самостоятельное существование кафедра прикладной математики. Зенфф остался

¹² P. K o t e l n i k o w. Exponuntur formulae analyticae, quibus perturbatio motus gyratorii terrae determinatur. Dorpat, 1832.

на кафедре чистой математики, на кафедру прикладной математики в 1843 г. был приглашен из Берлина видный ученый Фердинанд Миндинг (1806—1885).

С 1837 по 1843 г. К. Э. Зенфф был единственным преподавателем математических наук в университете. Он увеличил число и объем математических курсов. Кроме дифференциального и интегрального исчисления Зенфф читал теорию чисел, теорию вероятностей, аналитическую геометрию, теорию кривых линий и поверхностей (по своему сочинению), алгебраический анализ, начертательную геометрию, элементарную математику, а также курсы прикладной математики. С приездом Миндинга Зенфф получил возможность чаще читать названные математические курсы, обновить пособия по ним, а также ввести новые курсы — вариационное исчисление, высшую геометрию, историю математики, методику математического обучения. Миндинг как при Зенффе, так и в дальнейшем, особенно в 1850—1852 гг., когда он был единственным преподавателем математических наук в университете, также читал многие курсы чистой математики. Он впервые читал в виде самостоятельных курсов высшую алгебру (теорию алгебраических уравнений высших степеней), интегрирование дифференциальных уравнений, обыкновенных и в частных производных (в 40-х годах), теорию эллиптических функций (в 1853 г.), ввел практические занятия по интегральному исчислению, а также читал теорию вероятностей, теорию кривых линий и поверхностей и начертательную геометрию.

Миндинга с полным правом можно считать наиболее крупным математиком Дерптского университета. Родился он в польском городе Калише, принадлежавшем тогда Пруссии, в семье заседателя городского суда. Слушал лекции в университетах Галле и Берлина, в основном по гуманитарным наукам. Как математик Миндинг был самоучкой. В 1829 г. он защитил в Галле докторскую диссертацию о приближенном вычислении двойного интеграла, а в 1831 г., будучи уже автором нескольких ценных исследований, начал преподавать математику в Берлинском университете в качестве приват-доцента. В Берлине Миндинг написал и опубликовал примерно половину своих научных исследований, а также издал пособия по теории чисел (1832 г.), по дифференциальному и интегральному исчислениям и их применениям в геометрии и механике (1836—1838 гг.). Этими пособиями пользовались преподаватели и воспитанники Дерптского университета.

К Берлинскому периоду деятельности Миндинга относится ряд его статей первостепенной важности по теории поверхностей, теории абелевых функций и абелевых интегралов, статике. Почти все они были напечатаны в журнале Крелле. В 1840 г. Миндинг опубликовал заметку, в которой показал, в частности, что тригонометрические формулы на поверхности постоянной отрицательной кривизны можно получить из формул сферической тригонометрии заменой обычных тригонометрических функций сторон гиперболическими. Эта заметка сыграла важную роль в истории распространения идей Лобачевского. В 1837 г. Н. И. Лобачевский опубликовал в этом же журнале Крелле статью, в которой



Ф. Г. Миндинг.

установил, что такое же отношение к формулам сферической тригонометрии имеют соотношения между элементами треугольника в его «воображаемой» геометрии. Надо было только сопоставить эти две статьи, чтобы сразу получился ответ на волновавший Лобачевского вопрос о непротиворечивости и реальной значимости его геометрии. Лобачевский, по-видимому, чисто случайно не читал тот том журнала, где напечатана статья Миндинга. Миндинг же, возможно, не овладев идеями Лобачевского, просто не углубился в его статью, чтобы заметить аналогию. Поэтому так и случилось, что связь между геометрией Лобачевского и геометрией на поверхностях постоянной отрицательной кривизны установил впервые только в 1868 г. Э. Бельтрами, прямо указывая на статью Миндинга. Работы Миндинга по теории

поверхностей вошли в золотой фонд дифференциальной геометрии. Они составляют наиболее существенную часть его творчества.

В Дерпте в творчестве Миндинга появляются новые черты, оно становится еще более многогранным. Свои исследования Миндинг проводит теперь большей частью в классических областях, дополняя их многими существенными результатами. Значительное внимание он уделяет при этом вопросам прикладной математики. Большинство своих работ, выполненных в Дерпте, Миндинг опубликовал в «Бюллетене Петербургской академии наук». Иногда параллельно он печатал их в журналах, выходивших за рубежом.

Новой областью в исследованиях Миндинга в Дерпте было интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. К этому направлению относятся его заметка 1845 г.¹³, письмо к Лиувиллю, напечатанное в журнале Лиувилля в 1859 г., и большое сочинение «Исследования об интегрировании дифференциальных уравнений первого порядка с двумя переменными» (1862 г.), развивающее и дополняющее ранее полученные им результаты. Оно было издано Петербургской академией наук. Рукопись сочинения высоко оценил М. В. Остроградский, по отзыву которого оно было удостоено Демидовской премии. Остроградский считал, что эти исследования Миндинга являются самым важным шагом в интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений после Эйлера. Продолжая исследования Эйлера о возможности использования частных интегралов при решении дифференциальных уравнений первого порядка, Миндинг упростил

¹³ F. M i n d i n g. Bemerkungen zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen.— Bull. de la cl. phys.-math., 1845, t. 4, col. 378—382.

и обобщил его приемы, выразил через частные интегралы интегрирующие множители для некоторых видов уравнений. Преимущественно — это уравнение вида $Mdx + Ndy = 0$, где M и N — многочлены как по x , так и по y . Способ Миндинга особенно успешно применяется, когда легко найти частное решение в виде линейной функции $y = \alpha x + \beta$. Его исследования впоследствии были развиты русскими учеными.

Миндинг возвращался и к своей любимой области — теории поверхностей. В 1849 г. он опубликовал статью, тесно связанную с высшей геодезией¹⁴. Формула Бесселя для вычисления элементов геодезического треугольника на земном сфероиде в ней обобщается на случай произвольной поверхности. Доказывается также, что ортогональная сеть (непосредственное обобщение географической сети) среди сетей, составленных из линий так, что при отображении на сферу они переходят в меридианы и параллели, имеется только на минимальных поверхностях с цилиндрическими эволютными поверхностями (в частности, на поверхностях вращения). Тем самым обобщен результат о конформности отображения на сферу минимальных поверхностей и сфер.

Вопросы теории определенных интегралов и вариационного исчисления привлекали внимание многих ученых. Миндинг также не остался в стороне от этих исследований. В одной из статей он вычислил значение

интеграла $\int_0^{\infty} \frac{\sin x^m}{x^n} dx$ при m и n целых положительных и $m > n$ или

$m = n$, в другой — исследовал преобразования второй вариации определенного интеграла, служащие для выяснения его значения: будет оно наибольшим или наименьшим¹⁵. К 40—50-м годам относятся также его статьи по вопросам диоптрики, динамики, статики.

В середине прошлого столетия, благодаря заделу, подготовленному Бартельсом, ценные методы которого в теории кривых были освещены К. Э. Зенффом, и особенно благодаря Миндингу, Дерптский университет начал играть роль небольшого центра дифференциально-геометрических исследований. Здесь получил математическое образование выдающийся геометр Карл Петерсон, ученик Зенффа и Миндинга.

В математической жизни университета при Миндинге значительную роль играли Фома Клаузен (1801—1885) и Петер Гельмлинг (1817—1901). Клаузен более 20 лет был астрономом-наблюдателем университета. Он пользовался особым уважением кенигсбергских ученых. К. Г. Якоби привлек Клаузена к своим астрономическим вычислениям и высоко оценил его способности. По предложению Бесселя Кенигсберг-

¹⁴ F. Minding. Über einige Grundformeln der Geodäsie.— Bull. de la cl. phys.-math., 1849, t. 8, col. 89—92.

¹⁵ F. Minding. Über den Wert des Integrals $\int_0^{\infty} \frac{\sin x^m}{x^n} dx$, wenn m und n positive ganze Zahlen sind und $m > n$ oder $m = n$ ist.— Grunert's Arch. für Math., 1858, Bd 30, S. 171—184; Über die Transformationen, welche in der Variationrechnung zur Nachweisung grösster oder kleinster Werte dienen.— Journ. für die reine und ang. Math. 1858, Bd 55, S. 300—309.

ский университет присвоил Клаузену в 1844 г. степень доктора философии. Из первых математических работ Клаузена большой интерес представляют статьи по теории рядов и некоторым геометрическим построениям. В 1829 г. он решил задачу построения вписанного в коническое сечение треугольника, стороны которого проходят через три заданные точки. В одной из работ 1840 г. Клаузен высказал предположение, что в случае рационального отношения угловых мер дуг не существует новых quadriremes луночек Гипократа кроме пяти известных к тому времени, определяемых отношениями $2:1$, $3:1$, $3:2$, $5:1$ и $5:3$. Предположение Клаузена было строго доказано с помощью методов теории Галуа лишь в работах Н. Г. Чеботарева (1936 г.) и его ученика А. В. Дороднова (1947 г.).

До переезда в Дерпт Клаузен занимался также вопросами теории рядов (1828—1832 гг.), интерполяцией (1830 г.), дал свое доказательство основной теоремы алгебры (1840 г.), рассматривал решение алгебраического уравнения третьей степени в неприводимом случае с помощью цепных дробей (1842 г.). В 1841—1844 гг. в журнале Шумахера он опубликовал работы по вопросам теории эллиптических функций и их применений в аналитической механике. Значительная часть его работ дерптского периода посвящена геометрии. Он изучал вопросы теории поверхностей (1843, 1847 гг.)¹⁶, кривые третьего порядка (1844, 1850 гг.)¹⁷. Имея большой опыт в астрономических вычислениях, Клаузен занялся вычислением числа π с 250 десятичными знаками¹⁸. Его работа о нахождении значения цепной дроби $a + \frac{b}{a+1+\frac{b+1}{a+2+\dots}}$ при

b (целом) больше, чем $a+1$ (a — дробь) опубликована в журнале Петербургской академии наук¹⁹. В ней Клаузену удалось пополнить результаты Эйлера, который ограничивался лишь целыми положительными a и b , и исправить выводы Штерна. Сведя задачу к решению линейного разностного уравнения второго порядка

$$(b + \lambda - 1) \Psi(\lambda - 1) - (a + \lambda) \Psi(\lambda) - \Psi(\lambda + 1) = 0$$

(λ — целое), он нашел выражение для значения рассмотренной цепной дроби через несобственные интегралы и гамма-функцию. В 1856 г. Клаузен был избран членом-корреспондентом Петербургской академии наук по математическому разряду. Он был также членом Геттингенского научного общества.

¹⁶ T. Clausen. Neuer Beweis des von Gauss gefundenen Theorems in der Trigonometrie auf beliebigen krümmen Flächen. — Astronom. Nachr., 1843, Bd 20; Zwei Theoreme über Krümmungshalbmesser der Flächen 2. Grades. — I b i d e m, 1847, Bd 25.

¹⁷ T. Clausen. De linearum tertii ordinis proprietatibus. — Astronom. Nachr., 1844, Bd 21; Ueber Curven 2. und 3. Ordnung. — Grunert's Arch. für Math., 1850, Bd 15.

¹⁸ T. Clausen. Berechnung von π auf 250 Decimalstellen. — Astronom. Nachr., 1847, Bd 25.

¹⁹ T. Clausen. Ueber den Werth des Kettenbruchs... — Bull. de la cl. phys.-math., 1851, t. 9, col. 353—358.

Гельмлинг — сын крестьянина, родился в германском городе Эрбахе. Окончил университет в Гейдельберге. В качестве домашнего учителя приехал в Прибалтику, в 1846 г. выдержал при Дерптском университете испытание на старшего учителя гимназии по математическим предметам. В 1850 г. в Гейдельберге получил степень доктора философии, затем возвратился в Дерпт и в 1851 г. защитил магистерскую диссертацию, посвященную преобразованию и вычислению определенных интегралов. По этим же вопросам он вскоре опубликовал еще одно сочинение. В дальнейшем Гельмлинг сосредоточил свое внимание на изучении линейных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков. Этим вопросам посвящена его докторская диссертация «Исследования о линейных дифференциальных уравнениях второго и третьего порядков» (защитил в Дерпте в 1859 г.).

В Дерптском университете Гельмлинг начал свою деятельность с чтения лекций в качестве приват-доцента в 1852 г., в 1854 г. он уже был экстраординарным, а в 1859 г. — ординарным профессором чистой математики. Работал в университете 35 лет, вел математические курсы, которые ранее читал Зенфф, вслед за Миндингом читал теорию эллиптических функций. В 1858 г. прочел курс о рядах Фурье и об интегралах.

Итак, Дерптский университет в 30—50-е годы играл видную роль в развитии математики в России. Благодаря деятельности таких ученых, как Бартельс, Зенфф, Миндинг, Клаузен, Гельмлинг, в нем был достигнут высокий уровень преподавания большого числа математических наук, постоянно велись научные исследования в области математики, результаты которых являлись заметным вкладом в математическую науку.

10

Преподавание математики во Львовском университете и Львовской технической академии

После Ф. Кодеша математику во Львовском университете, в пределах элементарного курса, временно читали его помощник В. М. Залеский и физик А. Кунцек. На замещение вакантной кафедры претендовало 10 человек. Среди них был профессор Пражского университета Я. Ф. Кулик, уроженец Львова и воспитанник Львовского лицея, известный своими обширными таблицами простых чисел и делителей составных чисел до 100 330 201. Однако получил кафедру молодой математик Леопольд Шульц фон Страшницкий (1803—1852), один из наиболее видных австрийских ученых того времени. Он родился в Кракове, в семье крупного чиновника. Учился в Венском университете. С 1823 г. был адъюнктом математики и физики в Венской технической академии, с 1827 г. — профессором математики в Люблянском лицее, с 1834 по 1838 г. — профессором Львовского университета (в 1838 г. перешел в Венскую техническую академию). Во Львовском университете Шульц читал математику, в том числе и практическую геометрию, пользуясь своим руководством по началам чистой математики. Среди

других пособий такого рода это руководство выделяется многими полезными сведениями. Учитель Шульца Литтров, известный астроном, называл его пособие лучшей математической книгой. Оно представляет собой настоящее научное сочинение и далеко выходит за пределы элементарной математики. В нем много внимания уделено применениям теории к практике, приведено большое количество поучительных упражнений. Очень ценными являются краткие исторические обзоры различных отделов математики. На таком же уровне написаны и другие пособия Шульца: по специальной (числовой) и общей (буквенной) арифметике, по геометрии (для практиков и самообучения) и по основам высшего анализа. Они отличаются живостью изложения материала, много внимания в них уделено вопросам использования логарифмической линейки при проведении вычислений.

Научные свои интересы Шульц сосредоточил, главным образом, на вопросах геометрии. Ему принадлежит одно из первых сочинений по геометрии треугольника (1827 г.). В 1835 г. в журнале Крелле Шульц опубликовал статью об ограниченности применения теоремы Эйлера о многогранниках только для выпуклых тел. В работе по алгебре, о нахождении действительных корней уравнений (1842 г.), он изложил забытый метод для численного решения алгебраических уравнений, предложенный Горнером (1819 г.). Благодаря Шульцу феноменальный вычислитель З. Дазе (1824—1861) получил значение π с 200 десятичными знаками, пользуясь формулой

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8}.$$

С именем Шульца связано начало преподавания во Львовском университете высшей математики.

После Шульца некоторое время преподавал математику в университете опять Кунцек, а затем адъюнкт Куделька. В 1840 г. начал свою деятельность на кафедре математики чех Игнац Лемох (1802 — после 1870). До 1848 г. Лемох читал математику в установленном еще во время Кодеша объеме. В качестве пособий он использовал руководства Аппельтауера по математике и Кестнера по практической геометрии. Практической геометрии Лемох уделял особое внимание. Он издал по этим вопросам свое руководство, включив в него начала маркшейдерства. В 1848 г. Лемох разбил курс математики на отдельные предметы: прямолинейную и сферическую тригонометрию с применениями к черчению карт и построению солнечных часов, аналитическую геометрию, высшую алгебру, дифференциальное и интегральное исчисления, вариационное исчисление, курсы механики и астрономии. Это было связано с реформами, проведенными в Австрии после революции 1848 г. Университеты стремились освободиться от схоластических порядков. В них был создан философский факультет. Основной задачей являлась подготовка учителей по всем предметам школьной программы. На философском факультете вводилось преподавание высшей математики.

В 1844 г. была открыта Львовская техническая академия, созданная на базе Львовской реальной школы. На основном (техническом)

ее отделении обучение первоначально было двухгодичным, а с 1847 г. — трехгодичным. Курс академии включал высшую математику, механику, геодезию (практическую геометрию), архитектуру, черчение, техническую химию, строительство дорог и водных сообщений. Практическую геометрию несколько лет преподавал Лемох (он принимал участие в организации академии).

Первым профессором математики во Львовской технической академии был Александр Райзингер. Он читал элементарную математику, как «подготовку ко всем последующим техническим дисциплинам», и высшую математику «с особенным вниманием к ее применениям в технических специальностях». В курс высшей математики входили плоская и сферическая тригонометрия, учение о функциях, аналитическая геометрия, дифференциальное и интегральное исчисления. Однако объем сообщавшихся по высшей математике сведений был небольшим.

Для дальнейшего развития математики во Львове большое значение имела деятельность Лаврентия (Вавжинца) Жмурко (1824—1889). Он родился в Галиции, в г. Яворове. Учился на философском факультете во Львовском университете, а затем в Вене — в университете и в технической академии. Еще будучи студентом, Жмурко написал работу по интегральному исчислению, опубликованную Венской академией наук. За эту работу ему была присуждена степень доктора философии. В 1850 г. Жмурко получил должность доцента в Венской технической академии. С 1851 г. он профессор Львовской технической академии. Курс математики, который читал Жмурко во Львовской академии, был рассчитан на два года и читался по шесть-восемь часов в неделю. На первом году обучения обычно изучали алгебру, аналитическую геометрию, дифференциальное и интегральное исчисления, на втором — применения дифференциального и интегрального исчислений к геометрии, интегрирование дифференциальных уравнений, начала вариационного исчисления.

Введение систематического преподавания высшей математики сначала в технической академии, а затем и в университете сыграло большую роль в повышении уровня развития математики во Львове. Математическая деятельность, сводившаяся раньше лишь к преподаванию элементарной математики и проявлениям интереса к практическим ее приложениям, начала расширяться, в области математики появились первые самостоятельные исследования.

11

Преподавание математики в средней школе и учебная литература

С введением нового школьного устава 1828 г. в гимназиях было усилено классическое начало: преподавание чистой математики ограничено курсом до конических сечений включительно, прикладной — исключено из учебных планов. Кроме того, вводилось преподавание начал начертательной геометрии. Для учеников, изучав-

ших кроме латинского также греческий язык, курс математики был сокращен и включал только арифметику, алгебру, геометрию.

Пересмотр и обновление учебников и учебных пособий прежде всего коснулись «Начальных оснований чистой математики» Н. И. Фусса. Профессор Д. С. Чижев, в то время член ученого комитета Министерства народного просвещения, предложил заменить руководство Фусса. Для временного пользования в гимназиях были рекомендованы «Курс чистой математики» (составленный по поручению генерала Беллавена профессорами Аллезом, Пюиссаном и другими, в переводе с французского П. Н. Погорельского, с его дополнениями и изменениями), пособия по арифметике Ф. И. Буссе и П. С. Гурьева²⁰, а также изданные Буссе семизначные «Логарифмические таблицы для гимназий по руководству Вега» (1835 г.). «Курс чистой математики» охватывал алгебру, геометрию, прямолинейную тригонометрию с приложением к практическим задачам и приложения алгебры к геометрии, включая конические сечения. Выполненный Погорельским перевод-переработка оказался очень удачным, хорошо приспособленным к гимназической программе по математике, полнота содержания в нем сочеталась с ясностью и сжатостью изложения. Эта книга была принята в качестве руководства для гимназий и выдержала несколько изданий. Особенно удачно Погорельский переработал алгебраическую часть курса, которая служила руководством для гимназий в большинстве учебных округов России до 50-х годов. Перевод «Курса чистой математики», выполненный к 1836 г. преподавателями Артиллерийского училища А. Я. Кушакевичем и А. С. Киндеревым по предложению Д. С. Чижева, не был утвержден в качестве руководства для гимназий. Профессора Московского университета Д. М. Перевошиков и Н. Д. Брашман дали отрицательный отзыв на книгу. В этой обработке лишь геометрическая часть курса была рекомендована для временного пользования, до появления лучшего пособия. «Гимназический курс чистой математики» (1837 г.) Перевошикова полностью соответствовал гимназической программе. По существу, это переработка первых шести книг «Ручной математической энциклопедии».

Хорошими руководствами для гимназий являлись упоминавшаяся уже «Арифметика» Буняковского, «Руководство начальной геометрии» Буссе, появившиеся почти одновременно в 1844 г. В последнем элементарная геометрия впервые была представлена в том виде, в каком она в основной своей части изучается до настоящего времени. Буссе ввел привычное ныне деление материала на две части — планиметрию и стереометрию. До него отдельно рассматривалась, как еще одна часть, лонгиметрия.

Продолжая свою линию на усиление классической основы в гимназическом обучении, министр народного просвещения С. С. Уваров отме-

²⁰ П. С. Гурьев (1807—1884) — сын академика С. Е. Гурьева, автор пособия «Арифметические листки, постепенно расположенные от легчайшего к труднейшему» (СПБ, 1832), разработал методику преподавания арифметики в России.

нил в конце 1845 г. преподавание в гимназиях начал аналитической и начертательной геометрии. Буссе было поручено составить примерную программу по математике. По сравнению с учебным планом 1828 г. новая программа 1846 г. предусматривала небольшое расширение арифметики за счет вопроса о периодических дробях и дополнение алгебры теорией соединений с биномом Ньютона и возвышением в степень многочленов, а также вопросами приложений алгебры к решению геометрических задач. Особое внимание в программе 1846 г. уделялось решению задач и вообще вопросам приложения теоретических сведений к практике. Эта программа была первой общей для всех русских гимназий программой по математике, определявшей не только содержание преподавания в целом, но и последовательность преподавания и распределение материала по классам. Более продуманной в отношении распределения материала является общая программа по математике 1852 г. В этом году гимназии были разделены на гимназии с естественными науками и законоведением, гимназии с одним законоведением и гимназии с латинским (в большом объеме) и греческим языками.

Программа по геометрии соответствовала «Руководству начальной геометрии» Буссе. Трудности в сообщении дополнительных сведений по алгебре из-за отсутствия подходящих пособий были вскоре устранены изданием «Приложения алгебры к решению определенных геометрических задач» А. Н. Больмана (1847 г.). Замена «Алгебры» П. Н. Погорьельского «Начальными основаниями алгебры» А. Н. Тихомандрицкого (1853, 1855, 1860 гг.) проходила негладко: при несомненных научных достоинствах пособие Тихомандрицкого оказалось трудным для понимания учащихся, на некоторые вопросы в нем обращалось недостаточно внимания.

По своим научным и математическим достоинствам близкими к руководству Тихомандрицкого были «Начальные основания алгебры с таблицами степеней чисел от 1 до 1000» Н. Т. Щеглова (1853 г.) и «Курс начальной алгебры» К. Д. Краевича (1853 г.). Книга Щеглова являлась пособием повышенного типа, в ней давалось много дополнительных сведений (например, наряду с теорией уравнений высших степеней, численное их решение по способам Ньютона, Фогеля и других, начала теории вероятностей). Щеглов, очевидно, первым из русских авторов включал в курс алгебры теорию соединений («синтетика») ²¹. Начала теории вероятностей и другой дополнительный материал излагались также в пособии Краевича.

К середине 50-х годов руководство по тригонометрии Перевощикова несколько устарело. На смену ему пришло пособие И. Д. Соколова «Элементарная теория тригонометрических линий и прямолинейная тригонометрия» (1853 г. и последующие издания). Это пособие П. Л. Чебышев считал одним из лучших курсов тригонометрии. Как член ученого комитета Министерства народного просвещения, он одобрил его в ка-

²¹ Из других учебных пособий Щеглова известны «Таблицы бригговых логарифмов чисел и тригонометрических линий» (1856 г.).

честве пособия для гимназий. Меньшей известностью пользовалась составленная по «Конспекту тригонометрии» М. В. Остроградского «Тригонометрия» Ф. И. Симашко, второе издание которой (1857 г.) было также одобрено Чебышевым в качестве руководства для гимназий. Известный интерес представляет пособие Симашко «Вычисление по приближению» (1857 г.).

В рассматриваемый период русская учебная математическая литература была представлена большим количеством руководств по арифметике, алгебре, геометрии и тригонометрии. Преподаватели гимназий имели возможность выбирать те из них, которые больше соответствовали их личным взглядам. С 40-х годов выбор стал еще богаче: руководства Погорельского, Буссе, Гурьева, Буняковского, Перовщикова, Тихомандрицкого, Соколова и другие по своим научным и методическим достоинствам не уступали лучшим зарубежным руководствам по математике того времени.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ И МАТЕМАТИКА В КАЗАНСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

1

Очерк жизни Н. И. Лобачевского

Особое место в истории отечественной математики занимает Казанский университет, в котором подъем математических исследований прежде всего связан с деятельностью Николая Ивановича Лобачевского.

Николай Иванович Лобачевский родился 1 декабря (20 ноября) 1792 г. в Нижнем Новгороде (ныне г. Горький) в семье мелкого чиновника. Его отец, «уволенный за болезнью от межевых дел Иван Максимов сын Лобачевский», губернский регистратор, жил случайными заработками. В 1795 г. он вновь поступил на службу, а в 1798 г. уехал из Нижнего Новгорода. Трое сыновей — Александр, Николай и Алексей остались на попечении матери. В 1801 г. Лобачевская с детьми переехала в Казань, где вскоре определила их в местную гимназию на казенное содержание.

В гимназии Лобачевский учился с осени 1802 г. до конца 1806 г. Учитель математики Г. И. Карташевский пробудил у него интерес к этой науке. В январе 1807 г. Лобачевский был допущен к слушанию лекций в Казанском университете. В научной подготовке на него наибольшее влияние оказали профессор чистой математики М. Ф. Бартельс и профессор астрономии И. А. Литтров. Литтров весной 1810 г. привлек его к проведению астрономических наблюдений. Осенью 1811 г. Лобачевский вместе со студентом И. М. Симоновым наблюдал большую комету. В сообщении Литтрова об этой комете впервые в печати было упомянуто имя Лобачевского. Под руководством Бартельса Лобачевский глубоко изучил сочинения Эйлера, Лагранжа, Монжа, Лапласа, Гаусса.

При окончании университета, в июле 1811 г., по представлению профессоров Бартельса, Германа, Литтрова и Броннера Лобачевский был удостоен степени магистра. Окончив университет, он продолжал совершенствоваться в математике под руководством Бартельса. В июне 1812 г. Лобачевский закончил свою первую работу «Теория эллиптического движения небесных тел» (не была опубликована), представлявшую собой обработку одной из задач «Небесной механики» Лапласа. В апреле 1814 г. был утвержден в звании адъюнкта чистой математики



Н. И. Лобачевский (портрет 20-х годов XIX в. работы В. Щеголькова).

и начал преподавать в университете. Первоначально читал прямолинейную тригонометрию и теорию чисел. Изучая теорию чисел по «Арифметическим исследованиям» Гаусса, Лобачевский еще за год до начала работы в университете написал вторую, также не дошедшую до нас, работу — «О разрешении алгебраического уравнения $x^n - 1$ » (1813 г.), в которой, по данным впоследствии опубликованных его работ, предложил общее выражение для понижения степени в двучленном уравнении, если показатель без единицы делится на 4.

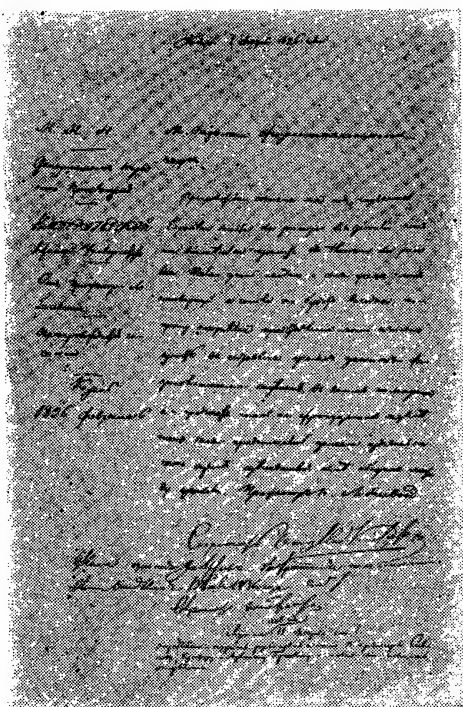
В июле 1816 г. Лобачевский и Симонов были утверждены в звании экстраординарных профессоров. В 1818 г. Лобачевский начал читать дифференциальное и интегральное исчисления, а в 1819 г., в связи с уходом Симонова в кругосветное плавание, к нему перешло преподавание астрономии и заведование астрономической обсерваторией университета. Он читал также физику, в том числе для желающих — математическую физику.

После отъезда в конце 1820 г. Бартельса в Дерптский университет Лобачевский становится ведущим математиком Казанского университета. В феврале 1822 г. его избирают ординарным профессором чистой ма-

тематики «с препоручением кафедры физики». Он заменил Бартельса на посту декана отделения физических и математических наук. С 1818 г. ряд лет Лобачевский был членом училищного комитета, руководившего деятельностью всех училищ Казанского учебного округа. С 1819 г. проводил большую работу по устройству астрономической обсерватории университета, физического кабинета, по упорядочению университетской библиотеки и пополнению ее литературой. В 1822 г. был избран членом, а в 1825 г. председателем строительного комитета университета и принимал деятельное участие в разработке и осуществлении планов строительства обширных университетских зданий. Административную деятельность в университете совмещал с разносторонним преподаванием, с подготовкой, особенно с середины 20-х годов, учебных пособий по геометрии и алгебре и напряженной научной работой.

К подготовке пособий по геометрии и алгебре Лобачевский приступил еще в те годы, когда читал начала математики. Его «Геометрия», представленная в 1823 г. в качестве учебного пособия, получила отрицательный отзыв академика Н. И. Фусса. Не получило одобрения и представленное в 1825 г. в качестве учебника для гимназий сочинение Лобачевского по алгебре. Оно появилось в переработанном виде лишь в 1834 г. «Геометрия» так и не была напечатана при его жизни. Несмотря на это, она, как и сочинение по алгебре, использовалась в преподавании в Казанском университете. Вскоре Лобачевский закончил первую работу, в которой сообщал о своем открытии новой геометрии, — «Краткое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных». Доклад об этой работе Лобачевский прочел 23 (11) февраля 1826 г. на заседании отделения физических и математических наук Казанского университета. Однако Лобачевский встретил непонимание со стороны своих коллег. На свою работу, переданную для рассмотрения профессорам Симонову, Купферу и адъюнкту Брашману, он не получил отзыва. Больше того, она была утеряна. О ее содержании можно судить лишь по научной работе Лобачевского «О началах геометрии», напечатанной в 1829—1830 гг. в журнале «Казанский вестник». Появление этой работы закрепило приоритет Лобачевского в открытии неевклидовой геометрии. Разработка и развитие основных ее положений составили главное содержание дальнейшей жизни Лобачевского.

Выступление Лобачевского с новой геометрией относится ко времени, когда в Казанском университете наступили большие перемены к лучшему. В 1826 г. М. Магницкий был отстранен от управления Казанским учебным округом. В мае 1827 г. Лобачевского избирают ректором университета. На этом посту он был почти 20 лет и всегда пользовался уважением и доверием профессорской коллегии. Он положил начало процветанию и славе университета. Вместе с тем научная деятельность Лобачевского в области неевклидовой геометрии не находила признания. Его работа «О началах геометрии» получила в 1832 г. отрицательный отзыв академика М. В. Остроградского. В 1834 г. в петербургском журнале «Сын отечества» появилась оскорбительная для Лобачевского рецензия на это сочинение, подписанная буквами «С. С.». Лобачевский



Сопроводительная записка Лобачевского к его докладу, прочитанному 23 (11) февраля 1826г .

мужественно перенес несправедливую и жестокую критику. Убежденный в правильности своих идей, он публикует следующие работы по неевклидовой геометрии, давая в них развернутое изложение своей геометрической системы. Наряду с этим Лобачевский занимается исследованиями в области математического анализа, алгебры, механики, физики и астрономии. В частности, к середине 30-х годов относится работа по механике «Условные уравнения для движения и положение главных осей в твердой системе» (1835 г.), единственная его работа, напечатанная в «Ученых записках Московского университета». В ней, ссылаясь на Эйлера и Лагранжа, он дает свои доказательства двух основных положений механики твердого тела. В опубликованном через семь лет его отчете «Полное затмение Солнца в Пензе 26 июня 1842г.» высказана забытая к тому времени мысль Ньютона об объединении эмиссионной и волновой теорий света, что было при-

нято в физике через несколько десятилетий (для наблюдения затмения Лобачевский ездил в Пензу вместе с профессором физики Казанского университета Э. А. Кнорром и своим учеником молодым астрономом-наблюдателем университета М. В. Ляпуновым).

Большинство работ Лобачевского опубликовано в «Ученых записках Казанского университета», основанных в 1834 г. при его непосредственном участии. Некоторые работы Лобачевского по неевклидовой геометрии были напечатаны за границей, где привлекли внимание Гаусса, высоко оценившего творения «остроумного математика» России. Гаусс еще в юности интересовался идеями неевклидовой геометрии, но, боясь быть непонятым, публично не выступил по этим вопросам. По предложению Гаусса, Лобачевский, как один «из превосходнейших математиков русского государства», был избран в 1842 г. членом-корреспондентом Геттингенского общества наук. Это, пожалуй, единственное официальное признание при жизни Лобачевского его научных заслуг по созданию неевклидовой геометрии. Современникам Лобачевского она оставалась недоступной. Непризнанным был и венгерский математик Я. Бойяи, также самостоятельно пришедший к открытию неевклидовой геометрии, но опубликовавший свою работу в 1832 г., уже после появления в печати первой работы Лобачевского.

Тяжелыми были последние годы Лобачевского. В 1846 г. его уволили с поста ректора университета и назначили помощником попечителя Казанского учебного округа. Ему, ректору и профессору университета,

пришлось выполнять обязанности чиновника при попечителе. Однако он пользовался большим авторитетом у своих коллег по университету, студентов, дорожил связями с университетом и, как заслуженный профессор университета, часто присутствовал на испытаниях, на диспутах по защите диссертаций, читал публичные лекции. В январе 1852 г. Лобачевского постигло большое горе — умер старший его сын, студент университета. К тому же ухудшилось материальное положение семьи, здоровье. За год до смерти Лобачевский ослеп. Уже слепой, он продиктовал последнюю свою работу «Пангеометрия», подготовленную им к пятидесятилетию Казанского университета. Умер Лобачевский 24 (12) февраля 1856 г. До конца своей жизни он был твердо убежден в правильности своих новых математических идей. Открытием неевклидовой геометрии он способствовал коренным преобразованиям, происшедшим в математике во второй половине XIX в.

2

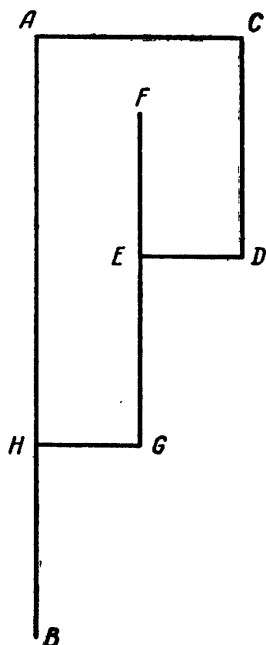
Открытие неевклидовой геометрии

Исследования по теории параллельных линий Лобачевский начал с попыток доказательства пятого постулата. Свое доказательство он излагал студентам в лекциях по теории параллелей в марте 1817 г. Основывалось оно на строго доказанной им теореме о том, что если сумма углов в каком-нибудь треугольнике равна двум прямым, то такой же она будет и во всяком другом треугольнике¹. В дальнейших рассуждениях Лобачевский использует утверждение: если $AC \perp AB$, $CD \perp AC$, $ED \perp CD$, $FE \perp ED$ (см. рисунок), то EF по продолжении должна пересечь либо AB , либо AC . При доказательстве этого утверждения он считал, что «линия EF будет заключаться в ограниченном пространстве $ACDEGHA$ »² ($GH \perp AB$), а это всегда верно только в евклидовой геометрии.

Для выяснения произвольности этого допущения Лобачевскому потребовались тонкие и глубокие рассуждения. К весне 1819 г. он закончил сочинение «Основания геометрии», в котором изложил основные начала геометрии. В 1823 г. Лобачевский представил это сочинение в переработанном виде под названием «Геометрия» к напечатанию в качестве учебного пособия. В нем он принимает постулат параллельности Евклида в формулировке, которой пользовался и Лежандр: линии AB и CD должны сходиться по достаточном продолжении, если одна из них AB перпендикулярна к BC , а другая CD наклонена к BC под острым углом C , обращенным к перпендикуляру AB (см. рисунок). При этом Лобачевский отмечает: «Строгого доказательства сей истины до сих пор не могли сыскать.

¹ Лобачевскому, как и Лежандру, изложившему эту теорему в 1833 г., через 16 лет после Лобачевского, оставалось неизвестным, что она была доказана иначе уже Саккери (1733 г.). Внимание к исследованиям Саккери было привлечено лишь в конце XIX в.

² Иными словами, в многоугольнике $ACDEGHA$ не может быть самопересечения.



Чертеж Н. И. Лобачевского к его попытке доказательства пятого постулата Евклида.

Какие были даны, могут назваться только пояснениями, но не заслуживают быть почтены в полном смысле Математическими доказательствами»³.

Сочинение «Геометрия» написано Лобачевским в основном в соответствии с положениями геометрической части его «Обозрения преподавания чистой математики на 1822/23 год». В этом обозрении, в частности, отмечено, что в геометрии параллелизм линий представляет «трудность до сих пор непобедимую». Впоследствии (1835 г.) Лобачевский писал: «Напрасные старания со времен Евклида, в продолжении двух тысяч лет, заставили меня подозревать, что в самых понятиях еще не заключается той истины, которую хотели доказывать и которую проверить, подобно другим физическим законам, могут лишь опыты, каковы, например, Астрономические наблюдения. В справедливости моей догадки будучи наконец убежден, и почитая затруднительный вопрос решенным вполне, писал об этом я рассуждение в 1826 году»⁴. Это рассуждение — сочинение «Краткое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных» — было итогом напряженной работы по перестройке всех начал геометрии и созданию новой теории параллелей, которой занимался Лобачевский уже в 1824 г. О судьбе сочинения рассказывалось выше. Следующая работа Лобачевского «О началах геометрии», его первое опубликованное сочинение, печатавшееся в журнале «Казанский вестник» с февраля 1829 г. по август 1830 г., свидетельствует о том, что в 1826 г. он свободно владел глубоко разработанной им новой геометрией.

Изложению основ новой геометрии в сочинении «О началах геометрии» Лобачевский предпосылает общие замечания о своем подходе к установлению начал геометрии. Единственным исходным геометрическим свойством тела у него является прикосновение. Пользуясь этим понятием, он вводит понятия тела, поверхности, линии, точки. Затем, введя расстояние между двумя точками, определяет сферу, круг, с их помощью — плоскость, далее — прямую линию как линию, «которая между двух точек сама себя покрывает во всех положениях». За рассмотрением углов линейных, плоскостных (двухгранных) и телесных и определением всех видов правильных многогранников следует сводка свойств прямолинейных и сферических треугольников. Далее Лобачевский излагает основы новой геометрии. Начинается изложение так: «Мы видели, что сумма углов прямолинейного треугольника не может

³ Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч. Т. 2. Гостехиздат, М.—Л., 1949, стр. 70. В этом издании приведены историко-библиографические сведения о сочинениях Лобачевского.

⁴ Там же, стр. 147.

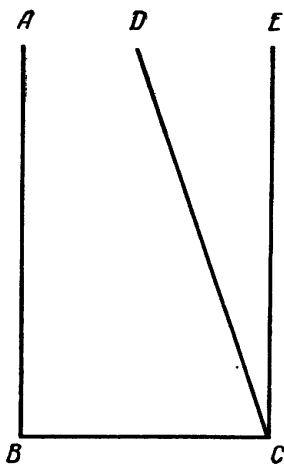
Чертеж к формулировке постулата параллельности.

быть $> \pi$. Остается предполагать эту сумму $= \pi$ или $< \pi$. То и другое может быть принято без всякого противоречия впоследствии, от чего и происходит две Геометрии: одна — *употребительная* до ныне по своей простоте, соглашается со всеми измерениями на самом деле; другая — *воображаемая*, более общая и потому затруднительная в своих вычислениях, допускает возможность зависимости линий от углов. Если в одном прямолинейном треугольнике посчитать сумму углов π , то она будет такой уже и во всех.

Напротив, допуская ее в одном менее π , легко доказать, что она уменьшается с возрастанием боков треугольника. Всякий раз, следовательно, две линии встречаться на плоскости не могут, когда они с третьей составляют углы, которых сумма π . Они могут не пересекаться и в том случае, когда эта сумма $< \pi$, если к тому предположить сумму углов в треугольнике $< \pi$. Итак, все линии на плоскости в отношении к одной могут быть разделены на *сходящиеся* и *несходящиеся*. Последние будут называться *параллельными*, если они представляют границу, или, иначе сказать, переход от одних к другим между всеми, выходящими из одной точки.

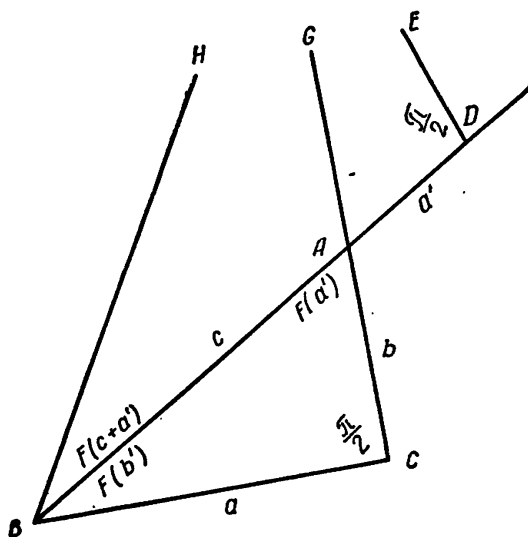
Воображаем из точки опущенный перпендикул a на данную линию и к этой параллельную из той же точки; означаем $F(a)$ угол между a и параллельной. Легко доказать, что для всякой линии a угол $F(a) = \frac{\pi}{2}$, если сумма углов в треугольнике $= \pi$; но в другом предположении угол $F(a)$ меняется с a , уменьшаясь до нуля с увеличением a и оставаясь постоянно $< \frac{\pi}{2}$ ⁵. Далее отмечены свойства параллельных линий. Введя понятия предельной (линии) круга и предельной (поверхности) сферы, определяемых как предельное положение окружности, соответственно — сферы, при неограниченном увеличении их полуперпендикула (радиуса), Лобачевский так же сжато продолжает: «Геометрия на предельной сфере совершенно та же, в каком виде мы ее знаем на плоскости. Предельная круга заменяет в последней прямую линию, а углы между плоскостями, в которых предельные лежат, заступают, место углов между прямыми линиями... Если в природе существующая Геометрия такова, что две параллельные линии должны быть наклонены к третьей линии под углами, которых сумма $< \pi$, то Геометрия употребительная нами, будет Геометрия чрезвычайно малых линий в сравнении с теми, при которых сумма углов треугольника может приметно разниться от π » ⁶.

Отмеченное свойство геометрии на предельной сфере позволяет Лобачевскому понимать под прямолинейными треугольниками также



⁵ Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч. Т. 1, стр. 194—195.

⁶ Там же, стр. 196.



Чертеж к выяснению зависимостей между элементами прямоугольного треугольника.

треугольники на предельной сфере, составленные из дуг предельной круга. Пользуясь прямоугольным треугольником, обычным прямолинейным в случае евклидовой геометрии и прямоугольным треугольником на предельной сфере в случае своей геометрии, он определяет основные тригонометрические функции. Дальнейшее изложение более подробно и сопровождается доказательствами.

Отметив, что в прямоугольном треугольнике острые углы против катетов a , b должны быть $F(a')$, $F(b')$, где a' , b' — некоторые отрезки (см. рисунок), Лобачевский прежде всего доказывает соотношение $F(c + a') + F(b') = F(a)$, а также другие, аналогичные ему. Эти соотношения представляют в различных видах зависимость сторон и углов прямоугольного треугольника, они позволяют определить зависимость линии a от угла $F(a)$. Лобачевский показывает, что $\tan \frac{1}{2} F(a) = e^{-\alpha}$, где e — неопределенное число, в качестве которого при соответствующем выборе единицы длины для измерения прямых можно принимать основание неперовых логарифмов. Это основная формула геометрии Лобачевского, она определяет связь между данным отрезком α и отвечающим ему углом (параллельности) $F(a)$. С ее помощью Лобачевский выводит тригонометрические соотношения для прямоугольного прямолинейного треугольника. Именно в таком треугольнике с катетами a , b , противоположными углами A , B , гипотенузой c выполняются соотношения

$$\sin F(c) = \sin F(a) \sin F(b); \quad \tan F(c) = \tan F(a) \sin A;$$

$$\cos F(b) = \cos F(c) \cos A;$$

$$\sin F(c) = \tan A \tan B; \quad \tan A = \cos F(a) \tan F(b);$$

$$\sin B = \sin F(a) \cos A.$$

Таково содержание первой части сочинения «О началах геометрии», являющейся извлечением из сочинения Лобачевского 1826 г. В ней даны все основные положения новой геометрии.

В начале второй части записаны тригонометрические соотношения для всякого прямолинейного треугольника и отмечено, что с точностью до членов высшего порядка малости относительно сторон треугольника

a , b , c эти соотношения являются соотношениями прямолинейной тригонометрии в геометрии Евклида. Лобачевский останавливается на естественно возникающем при этом вопросе о том, какая геометрия существует в природе: «По крайней мере, наблюдения астрономические убеждают в том, что все линии, которые подлежат нашему измерению, даже расстояния между небесными телами, столько малы с линией, принятой в теории за единицу, что употребительные до сих пор уравнения прямолинейной Тригонометрии без чувствительной погрешности должны быть справедливы»⁷. К такому выводу он приходит, пытаясь выяснить поставленный им вопрос опытным путем, на основании данных наблюдений. Лобачевский рассматривает прямоугольный треугольник, за основание которого принимает диаметр земной орбиты, а в качестве противоположной вершины — неподвижную звезду, и, пользуясь данными о параллаксах звезд, подсчитывает сумму углов такого треугольника. По его вычислениям, эта сумма для одного треугольника разнится от двух прямых менее чем на $0'',000372$, что намного меньше погрешностей наблюдения. «...Очень вероятно, — отмечает Лобачевский, — что Евклидовы положения одни только истинные, хотя и останутся навсегда недоказанными. Как бы то ни было, новая Геометрия, основание которой уже здесь положено, если не существует в природе, тем не менее может существовать в нашем воображении и, оставаясь без употребления для измерений на самом деле, открывает новое обширное поле для взаимных применений Геометрии и Аналитики»⁸.

Лобачевский выводит уравнения прямой, окружности, предельной линии, вычисляет длину прямолинейного отрезка, дуги окружности и предельной линии, затем получает общее выражение для элемента дуги

$$dS = \sqrt{dy^2 + \frac{dx^2}{\sin^2 F(y)}},$$

в котором x и y являются обобщением декартовых координат для «воображаемой геометрии». Это выражение дает основную квадратичную форму плоскости, в которой осуществляется геометрия Лобачевского. Применение этой формулы, по существу, составляет все дальнейшее содержание работы, посвященное вычислению площадей различных фигур и объемов различных тел. При выводе формулы используется четырехугольник с тремя прямыми углами — важная и интересная во многих отношениях фигура новой геометрии⁹. Получены также выражения для элементов площади и объема.

⁷ Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч. Т. 1, стр. 207.

⁸ Там же, стр. 209—210. Вместо значения $0,000372$, приведенного Лобачевским, должно быть $0,0000037273$. При проведении геодезической съемки Ганноверского королевства Гаусс в 20-х годах с той же целью вычислял сумму углов достаточно больших треугольников на земной поверхности. Результаты были аналогичны результатам вычислений Лобачевского: в самом большом треугольнике сумма углов оказалась равной 180° с точностью до $0,00001$.

⁹ Впоследствии ее стали называть, следуя Д. Д. Мордухай-Болтовскому, три-прямоугольником.

Изучение вопросов измерения площадей начинается с рассмотрения площади треугольника. Показано, что в новой геометрии она пропорциональна (равна при соответствующем выборе единицы площади) недостатку в сумме углов треугольника до π , а площадь многоугольника с n сторонами — недостатку в сумме его углов до $(n - 2)\pi$. Сопоставление такого выражения для площади с ее выражением через определенные интегралы открывает путь к установлению значений определенных интегралов. Этот путь Лобачевский использовал позднее. В рассматриваемом сочинении при вычислении площади плоских фигур, ограниченных прямыми, дугами окружностей или предельными линиями, при нахождении площади кривых поверхностей, в частности, сферы, при вычислении объемов различных тел — конусов, шара, пирамид и других он пользуется разными способами: разбиением различными путями на элементы, употреблением различных систем координат, в том числе полярных и сферических, разбиением на другие более простые фигуры или тела. Это позволяет ему получать разные соотношения между многими определенными интегралами, преобразования одних интегралов в другие, выражения интегралов в конечном виде. Рассматривая геометрические образы новой геометрии, Лобачевский иным путем находит значения ранее известных интегралов. Это служит для него подтверждением логической правильности (непротиворечивости) созданной им геометрии. Он находит также новые определенные интегралы. Так, при вычислении поверхности сферы получена формула, из которой следует для функции Лежандра

$$E(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2 \varphi}$$

такое соотношение:

$$\frac{\pi\alpha}{2\sqrt{1-\alpha^2}} = \int_0^{\alpha} \frac{x dx E(x)}{(1-x^2)\sqrt{\alpha^2-x^2}}.$$

Из нее же вытекает, что

$$\int_0^{\infty} \frac{(e^x - e^{-x}) x dx}{e^{2x} + e^{-2x} + 2 \cos 2\alpha} = \frac{\pi\alpha}{4 \sin \alpha}. \quad (1)$$

Наиболее интересные формулы из полученных во второй части сочинения Лобачевский сопоставляет в третьей его части. Рассматривая свойства интеграла

$$L(x, \omega) = \int_0^x \frac{x dx}{e^x + e^{-x} - 2 \cos \omega},$$

играющего большую роль в вычислении объема пирамид, он показывает, что

$$\sin 2\omega \cdot L(x, 2\omega) = \Phi(\omega + \xi) + \Phi(\omega - \xi) - 2\Phi(\omega).$$

где

$$\Phi(x) = - \int_0^x \log \cos x dx,$$

и тем самым сводит первый интеграл ко второму. Заканчивая этим аналитические рассуждения, Лобачевский отмечает, что в них не может быть противоречия, если его нет в принятых им началах новой геометрии. Это противоречие, пишет он, могло скрываться только в формулах, выражающих тригонометрические соотношения для треугольников в новой геометрии. Но они «как скоро вместо боков a, b, c ставим $a\sqrt{-1}, b\sqrt{-1}, c\sqrt{-1}$ » становятся соотношениями сферической тригонометрии, следовательно, «обыкновенная Геометрия, Тригонометрия и эта Геометрия всегда будут согласны между собой»¹⁰. Упоминая о механике, Лобачевский указывает, какие прежде всего следует ожидать изменения в ней от введения в нее воображаемой геометрии.

Как отмечалось выше, открытие Лобачевского было непонято его соотечественниками. М. В. Остроградский, первый математик России того времени, рассмотрев в ноябре 1832 г. по поручению Петербургской академии наук работу Лобачевского, писал: «Все, что я понял в геометрии г-на Лобачевского, ниже посредственного. Все то, что я не понял, было, по-видимому, плохо изложено по той же самой причине, что в нем трудно разобраться»¹¹. В своем отзыве Остроградский особо останавливался на двух интегралах, вычисленных Лобачевским. Об одном из них он писал, как об известном, о другом — как о новом, но неверном. Остроградский указывал, что интеграл (1) является периодической функцией α , и, следовательно, приведенное Лобачевским его значение неточно: этот интеграл имеет своим значением $\frac{\pi\alpha}{4 \sin \alpha}$ от $\alpha = 0$ до $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi(\pi - \alpha)}{4 \sin \alpha}$ от $\alpha = \frac{\pi}{2}$ до $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ и т. д.¹²

Работа Лобачевского не была признана заслуживающей внимания Академии наук. Отзыв Остроградского Лобачевскому не был сообщен, но, как уже упоминалось, два года спустя в печати появилась оскорбительная для него рецензия на эту работу, местами перекликавшаяся

¹⁰ Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч. Т. 1, стр. 261.

¹¹ Материалы для биографии Н. И. Лобачевского. Собр. и ред. Л. Б. Модзалевский, стр. 333.

¹² Хотя, по существу, это замечание справедливо, нельзя не отметить, что в первоначальной записи рассматриваемого интеграла в других обозначениях параметр имеет значение угла параллельности и, следовательно, не превосходит $\frac{\pi}{2}$. Это неявное предположение, особо не оговариваемое Лобачевским, Остроградский не заметил. С другой стороны, как показал Н. А. Колмогоров, если в качестве основного периода функции, определяемой интегралом, взять промежуток не от 0 до π , к чему склонялся Остроградский, а от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$, то данное Лобачевским значение интеграла полностью сохраняет свою силу и замечание Остроградского оказывается несостоятельным. Подробнее об этом см. в кн.: В. Ф. Каган. Лобачевский. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1948, стр. 254—259.

с отзывом Остроградского. Несмотря на это, Лобачевский продолжал отстаивать и развивать свое открытие. Именно он, а не Гаусс, так и не решившийся в течение всей своей жизни на публичное выступление о новой геометрии из-за боязни быть непонятым, и не Я. Бойяи, ограничившийся лишь первыми шагами в ее разработке, является подлинным творцом новой геометрии.

3

„Алгебра или вычисление конечных“

В круг научных интересов Лобачевского, особенно с начала 30-х годов, входили вопросы алгебры и математического анализа. Сочинение «Алгебра или вычисление конечных» (1834 г.) отличается оригинальностью как изложения, так и содержания. В значительной степени это научное сочинение, содержащее много нового, своеобразного, представляет интерес также в настоящее время.

Большое внимание в сочинении уделено решению уравнений первой и высших степеней, двучленных, а также неопределенных уравнений. Лобачевский первым включил в собственно алгебраическое руководство начала общей теории определителей, придав ей своеобразный вид. При рассмотрении вопросов о степенях и корнях, логарифмах и тригонометрических функциях широко использованы разложения в ряды. На этой основе дано чисто аналитическое изложение тригонометрических функций, не зависящее от геометрии. Чисто аналитически также рассмотрены действия над «воображаемыми» (комплексными) числами, подчеркнуто их большое значение в математике. Особое место занимает предложенный Лобачевским способ приближенного решения алгебраических уравнений, основанный на составлении уравнения, корни которого являются степенями с некоторым показателем корней данного уравнения, например, для простоты, квадратами их. Приведены формулы для вычисления коэффициентов уравнения при последовательном возвышении корней в квадрат. Это — один из лучших до настоящего времени способ нахождения корней алгебраических уравнений. Основную идею способа в XIX в. использовали независимо один от другого Данделен (1826 г.), Лобачевский (1834 г.) и Греффе (1837 г.). Изложение этого способа его первооткрывателями Данделеном и Лобачевским сразу не привлекло внимания математиков, и он длительное время был известен как способ Греффе, хотя его введение в математику непосредственно связано в первую очередь с именами Данделена и Лобачевского.

В рассматриваемом сочинении Лобачевский первым в России оригинально, на высоком математическом уровне изложил курс алгебры. Он отмечал, что «Алгебра первая начинает Математику со всею точностью понятий и со всей обширностью взгляда».

По охвату научного материала по высшей алгебре «Алгебра или вычисление конечных» Лобачевского уступала «Лекциям алгебраического и трансцендентного анализа» Остроградского и «Теории опреде-

ленных алгебраических уравнений высших степеней» Сомова. Однако она превосходила их в идейном отношении. Более, чем полнотой содержания, отмечал А. В. Васильев, она интересна замечательной для своего времени строгостью изложения основных начал. К тому же в известном смысле она завершила разработку круга идей Ньютона в области алгебры, для которого основным здесь было численное решение алгебраических уравнений.

К «Алгебре» непосредственно примыкает статья «Понижение степени в двучленном уравнении, когда показатель без единицы делится на 8» (1834 г.). В ней Лобачевский развивает учение Гаусса о двучленных уравнениях по его «Арифметическим исследованиям». Он показывает, что в рассматриваемом им случае понижение степени двучленного уравнения можно довести до показателя $\frac{1}{8}(n - 1)$. Одним из примеров является уравнение с $n = 257$, решением которого занимался Ришело (1832 г.). Из своих результатов Лобачевский выводит частный случай закона взаимности Лежандра.

«Статья Лобачевского представляет собой великолепный образец выкладки в классическом вкусе... В этой статье Лобачевский высказал свою многогранность: если в своих геометрических исследованиях он был первоклассным мыслителем, то здесь, в теории чисел, весьма далекой от предмета его постоянных занятий, он проявил себя как блестящий мастер вычислительной техники»¹³.

4

Работы по математическому анализу

Основными работами Лобачевского по математическому анализу являются его статьи «Об исчезании тригонометрических строк» (1834 г.), «Способ уверяться в исчезании бесконечных строк и приближаться к значению функций от весьма больших чисел» (1835 г.) и резюмирующее эти статьи сочинение о сходимости рядов на немецком языке «О сходимости бесконечных рядов» (1841 г.). Выше упоминалось, что бесконечные ряды Лобачевский широко использовал в сочинении по алгебре, а также придавал им большое значение в строгом обосновании основных понятий математического анализа. Именно поэтому он уделил теории рядов так много внимания.

Прежде всего Лобачевского интересовали вопросы сходимости тригонометрических рядов. После знаменитых работ Фурье по аналитической теории тепла тригонометрические ряды привлекли внимание многих выдающихся ученых. Доказательства сходимости этих рядов, данные Коши (1823 г.), Дирихле (1829 г.) и Дирксеном (1829 г.), Лобачевского не удовлетворяли. Из недостатков рассуждений Коши и Дирксена он явно отмечает отсутствие обоснования сходимости ряда

¹³ Н. Г. Чеботарев. Обзор статьи «Понижение степени в двучленном уравнении». — В кн.: Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч. Т. 4, стр. 443—444.

$\sin \omega + \frac{1}{2} \sin 2\omega + \frac{1}{3} \sin 3\omega + \dots$; Дирихле же в своем, вообще-то строгом, доказательстве пользовался без всякого обоснования

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

В основе доказательства сходимости тригонометрических рядов у Лобачевского лежит соотношение

$$\begin{aligned} \int_0^1 \cos(i\pi x - i\omega) f(x) dx &= -\frac{\sin i\omega}{i\pi} \{(-1)^i f(1) - f(0)\} + \\ &+ \frac{\cos i\omega}{i^2 \pi^2} \{(-1)^i f'(1) - f'(0)\} - \frac{1}{i^2 \pi^2} \int_0^1 \cos(i\pi x - i\omega) f''(x) dx, \end{aligned}$$

получаемое интегрированием по частям¹⁴. Чтобы доказать сходимость общего тригонометрического ряда, общим членом которого является выражение, стоящее в левой части записанного соотношения, Лобачевский доказывает сходимость рядов, общим членом которых являются члены правой части этого соотношения. При доказательстве сходимости

ряда $\sum_1^{\infty} \frac{1}{i} \sin i\omega$, он вводит в рассмотрение ряд $L = \sum_1^{\infty} \frac{1}{2i(2i-1)}$, сходимость которого устанавливает с помощью своего признака сходимости, примененного ранее в сочинении по алгебре при рассмотрении сходимости ряда с общим членом $\frac{2}{(2r+1)(2r+3)}$, и именно путем разложения общего члена ряда в двоичную дробь показывает, что $L < \sum_1^{\infty} 2^{-\frac{r-1}{2}} = 2 + \sqrt{2}$, а также получает оценку остатка ряда. Ана-

логично Лобачевский доказывает сходимость ряда $\sum_1^{\infty} \frac{1}{i^2}$, что позволяет доказать сходимость рядов, общим членом которых является соответственно первое и второе слагаемые правой части приведенного выше соотношения, и получить для них оценку. Рассмотрению ряда $\sum_1^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{i^2} \times \cos(i\pi x - i\omega) f''(x) dx$ предшествует большое отступление о дифференцировании и интегрировании вообще, представляющее значительный интерес, так как в нем Лобачевский высказывает свое понимание основных понятий анализа.

¹⁴ Таким образом, в своем доказательстве Лобачевский предполагает, что $f(x)$ имеет производные первого и второго порядков. Кроме того, $f(x)$ предполагается в рассматриваемом промежутке равномерно ограниченной, имеющей не более чем конечное число точек разрыва первого рода, $f'(x)$ — непрерывной, можно также допустить, что она в конечном числе точек становится бесконечно большой; $f''(x)$ может быть бесконечно большой в конечном числе точек. Эти условия Лобачевский выявляет по ходу рассуждений, но не все из них явно оговаривает.

Под $\frac{df(x)}{dx}$, пишет Лобачевский, следует понимать функцию $\varphi(x)$, которая получается в уравнении $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \varphi(x) + H$, когда с уменьшением h исчезает H . Обратно: $f(x) = \int \varphi(x) dx$. Устанавливая, что $f(x)$ определяется при этом с точностью до произвольной постоянной, он рассматривает самое понятие функции: «Общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано или аналитическим выражением, или условием, которое подает средство испытывать все числа и выбирать одно из них; или наконец зависимость может существовать и оставаться неизвестной...». В качестве примера последнего названа введенная им в сочинении «О началах геометрии» функция $F(x)$, чтобы обозначить только, что «угол $F(x)$ всякий раз дан вместе с расстоянием x », и лишь в дальнейшем, после изучения свойств этой функции, для нее устанавливается аналитическое выражение. «Кажется нельзя сомневаться, — пишет далее Лобачевский, — ни в истине того, что все в мире может быть представлено числами, ни в справедливости того, что всякая в нем перемена и отношение выражается аналитической функцией. Между тем обширный взгляд теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа, одни с другими в связи, принимать как бы данными вместе. Лагранж в своем вычислении функций (*Calcul des fonctions*), которым хотел заменить дифференциальное, столько же, следовательно, повредил обширности понятия, сколько думал выиграть в строгости суждения»¹⁵. Второе предложение содержит ставшее общепринятым определение понятия функциональной зависимости. Его обычно связывали лишь с именем Дирихле, давшего определение функции, равносильное определению Лобачевского, тремя годами позже, в 1837 г. Дирихле строго доказал теорему о сходимости тригонометрического ряда (теорема Дирихле). К такому определению пришел также Больцано (1830 г., опубликовано в 1930 г.), менее четко его высказывал еще раньше Лакруа (1810 г.). Дирихле дал свое определение в развернутом виде, но лишь для непрерывной функции. У Лобачевского определение носит совершенно общий характер, следовательно, его приоритет не вызывает сомнений. Лобачевский первым начал разграничивать понятия дифференцируемой, которую он называл непрерывной, и непрерывной, которую он называл постепенной, функций. Правда, из содержания рассматриваемой работы неявно следует, что он фактически предполагал недифференцируемость непрерывной функции только в отдельных точках.

Лобачевский доказывает существование определенного интеграла для непрерывной функции и близко подходит к понятию равномерной непрерывности. Он рассматривает также интеграл для функции, которая несколько раз становится бесконечно большой. Переход к пределу, как и в других случаях, специально им не отмечается, а лишь оговаривается,

¹⁵ Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч. Т. 5, стр. 43—44. В построении математического анализа Лагранж ограничивался аналитическими функциями — функциями, представимыми в виде (степенного) ряда.

причем иногда недостаточно четко. Сведения об определенных интегралах Лобачевский использует при получении оценки для общего члена последнего ряда, позволяющей установить сходимость этого ряда и тем самым закончить доказательство сходимости исходного тригонометрического ряда. По существу, он приходит к так называемому принципу локализации, высказанному почти 20 лет спустя Риманом (1853 г.) в виде утверждения, что сходимость и значение суммы тригонометрического ряда при данном значении переменной связаны с поведением функции лишь при значениях, достаточно близких к рассматриваемому. Этот принцип встречается у Остроградского.

Далее Лобачевский излагает другое свое доказательство. Он основывает его на разложении $\frac{1}{2} (\pi - \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \sin i\omega$. В ходе рассуждений

получает соотношение, содержащее утверждение, что при почленном интегрировании ряда Фурье функции $f(x)$ получается сходящийся ряд, сумма которого равна интегралу от $f(x)$; исходный ряд может быть расходящимся, $f(x)$ предполагается (абсолютно) интегрируемой. К этому доказательству Лобачевский возвращается во второй статье по теории рядов и с большим успехом доводит его до конца. Налагаемые им условия на функцию $f(x)$ шире известных условий Дирихле в том смысле, что они допускают наличие у функции, разлагаемой в ряд Фурье, бесчисленного множества максимальных и минимальных значений. Лишь в 1906 г. эту теорему вновь доказал Лебег.

Вторая статья Лобачевского по теории рядов начинается с подробного рассмотрения предложенного им признака сходимости знакоположительных рядов, которому он отдает преимущество перед признаком Дирксена (1832 г.), считая, что последний не является общим. Разложив общий член такого ряда $S = \sum_{i=1}^{\infty} f(i)$ по степеням числа 2, Лобачевский

получает $S = \sum_0^{\infty} L \cdot 2^{a-\lambda}$, где L — целые положительные числа, a — постоянное для всех членов число, λ — нуль или целое положительное число. Если взять μ таким, что $f(\mu) \geq 2^{a-\lambda}$, $f(\mu+1) \leq 2^{a-\lambda}$, то $L \leq \mu$ и $S < \sum_0^{\infty} \mu \cdot 2^{a-\lambda}$. Таким образом, из сходимости последне-

го ряда не только вытекает сходимость исходного ряда, но и получается оценка для него¹⁶. Подтвердив это примерами, Лобачевский переходит к вопросу о нахождении функции $F(x)$ при весьма больших x в виде $F(x) = Ax^{ax+b}e^{cx}\varphi(x)$, где A , a , b , c — постоянные, а $\varphi(x)$ становится единицей для $x = \infty$. Способ Лапласа (1812 г.) представляется ему очень искусственным, весьма далеким от существа задачи.

¹⁶ Пользуясь видоизмененной формой признака, данной Лобачевским в его третьей работе по теории рядов, Г. Л. Лунц показал, что этот признак является не только достаточным, но и для знакоположительных рядов с монотонно невозрастающим общим членом необходимым.

Он отдает предпочтение формуле суммирования, предложенной Эйлером и Маклореном, а также способу непосредственного последовательного выделения основных членов представления путем использования разложений в ряды, что позволяет указать границы приближений. Свой способ Лобачевский со всеми подробностями применяет к функции

$$(x + \alpha)^{\infty} = (\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + x).$$

Положив

$$(x + \alpha)^{\infty} = (x + \alpha)^{x+\alpha} + \frac{1}{2} e^{-x} f(x, \alpha),$$

он показывает, что

$$2 \log \frac{f(x-1, \alpha)}{f(x, \alpha)} = \sum_1^{\infty} \frac{i}{(i+2)(i+1)(x+\alpha)^{i+1}}.$$

При неограниченном увеличении x существует предел $f(x, \alpha)$, обозначенный Лобачевским $\psi(\alpha)$. Если положить далее

$$\log X(x + \alpha) = \sum_1^{\infty} \log \frac{f(x+i-1, \alpha)}{f(x+i, \alpha)},$$

то

$$(x + \alpha)^{\infty} = \psi(\alpha)(x + \alpha)^{x+\alpha} + \frac{1}{2} e^{-x} X(x + \alpha).$$

Эта формула позволяет определить $(x + \alpha)^{\infty}$ и для значений x , не являющихся целыми положительными числами. В частности, она дает

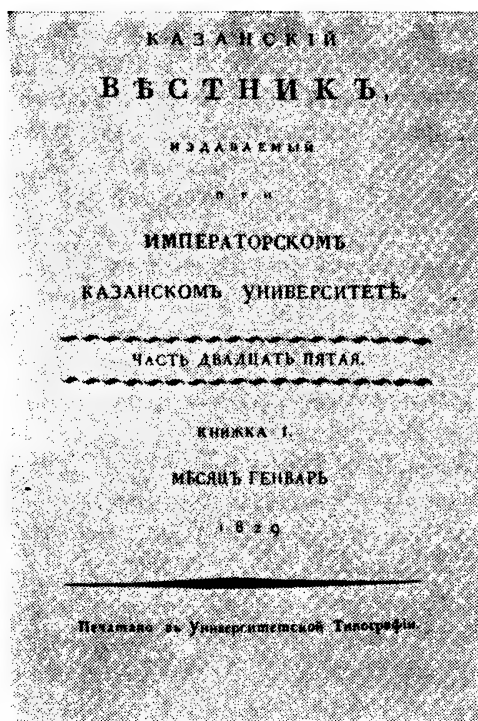
$$x^{\infty} = \sqrt{2\pi} x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x} X(x).$$

Для X Лобачевский находит выражение $e^{\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3} + \frac{1}{1260x^5} - \dots}$. С помощью формулы Эйлера — Маклорена получает также

$$\log X = \frac{M_1}{2x} - \frac{M_2}{3 \cdot 4x^3} + \frac{M_3}{5 \cdot 6x^5} - \frac{M_4}{7 \cdot 8x^7} + \dots$$

(у Лобачевского $M_k = (-1)^{k+1} B_{2k}$, где B_{2k} — числа Бернулли, находить которые он предлагает по предложенной им рекуррентной формуле, быстрее приводящей к цели, чем другие известные в то время). Разложения, связанные с формулой Эйлера — Маклорена, являются расходящимися, но разность между разлагаемой в ряд функцией и суммой n первых членов ряда неограниченно уменьшается при постоянном n (и стремлении независимой переменной к некоторому значению). Лобачевский допускает использование именно таких расходящихся рядов, которые он, вслед за Лапласом называет предельными. Лежандр называл их, в частности приведенное разложение для $\log X$, полусходящимися, в настоящее время их называют асимптотическими.

Функция x^{∞} Лобачевского есть не что иное, как эйлеров интеграл второго рода $\int_0^{\infty} t^x e^{-t} dt$, названный Лежандром (1814 г.) гамма-



Титульный лист журнала «Казанский вестник».

деленных интегралов. Среди последних — интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x \sqrt{-1} dx}{(p + x \sqrt{-1})^n} = \frac{2\pi e^{-p}}{(n-1)^{n-1}}$$

($p > 0$, $n > 0$ и даже $\operatorname{Re} n > 0$), частные случаи которого рассматривали Лаплас ($p = n$) и Пуассон (n — целое). Одновременно с Лобачевским, но недостаточно строго, этот интеграл вычислил Лиувилль. Затем появились доказательства Куммера (1837 г.), Коши (1841 г.) и др.

В третьей статье по теории рядов резюмировано содержание первых двух работ, а также тех глав «Алгебры или вычисления конечных», в которых рассмотрено определение степеней, логарифмов и показательных функций с помощью рядов. Рассмотрение Лобачевским разложения $\sin x$ в бесконечное произведение может служить образцом строгости рассуждений. В нем фактически использовано понятие равномерной сходимости. В другом случае это понятие Лобачевский использовал при обосновании предельного перехода под знаком интеграла. Понятие равномерной сходимости в явном виде появилось в печатных работах несколько позднее, а именно в работах Зайделя (1848 г.) и Стокса (1849 г.), с начала 40-х годов им пользовался в своих лекциях Вейерштрасс.

¹⁷ Позднее этот круг вопросов был рассмотрен в статье: А. Савинов. О свойствах аналитических факториалов и способах вычислять эту функцию. — Ученые записки Казанского университета, 1851, кн. 4, стр. 43—105.

функцией $\Gamma(x+1)$. Приведенная формула для $x^{\infty x}$ является, по сути, так называемой формулой Бине, получившего ее лишь в 1839 г., четырьмя годами позже Лобачевского; несколько раньше Бине, как уже упоминалось, такую формулу нашел и давал в своих лекциях Остроградский. Лобачевский, пользуясь установленным им основным соотношением $(x+\alpha)^{\infty x+\alpha} = (x+\alpha)^{\infty x} \alpha^{\infty \alpha}$, подробно изучает функции $x^{\infty x}$ и $(x+\alpha)^{\infty x}$, рассматривает многочисленные их приложения. При этом он определяет другим путем многие важные свойства гамма-функции, установленные ранее Эйлером, Лежандром, Гауссом, Лапласом¹⁷, и тем самым дает новое, достаточно полное построение теории гамма-функции, а также ее обобщение. Исследование содержит разнообразные разложения в ряды, в том числе тригонометрические, вычисление большого количества опре-

В исследованиях по теории рядов Лобачевский касался многих важных вопросов, находившихся тогда в центре внимания выдающихся математиков. Однако полученные им весьма ценные результаты до недавнего времени оставались, по существу, неизвестными. В определенной степени это связано с отрицательным отношением Остроградского к третьей работе Лобачевского по теории рядов, которую, как и его работу «О началах геометрии», он не считал заслуживающей одобрения Академии наук. Работы Лобачевского по математическому анализу оставались неизученными даже после того, как его геометрия получила всеобщее признание. Последней его работой в этой области является сочинение «Значение некоторых определенных интегралов» (1852 г.), изданное также на немецком языке в Берлине (1855 г.). Оно состоит из двух статей. В отличие от работ по теории рядов в нем основное внимание уделено формальному изложению полученных результатов, а не их обоснованию. В первой статье выведены интересные интегральные преобразования, в том числе преобразование, содержащее как частные случаи интегральные формулы Фурье, и преобразование, обобщающее преобразования Лапласа. Во второй статье вычислены интегралы вида

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx \cdot \sin x}{e^x - 1} \cdot \frac{dx}{x}; \quad \int_0^{\infty} e^{-ax} \left(\frac{\sin bx}{x} \right)^m dx \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} \left(\frac{\sin bx}{x} \right)^m dx$$

(m — целое положительное) с помощью гамма-функции. Много интегралов Лобачевский вычислил также в работах по геометрии. Автор первых весьма обширных таблиц определенных интегралов (1858 г.) Биеренс де Хаан ¹⁸ ссылается на работы Лобачевского как на один из основных использованных им источников. Он включил в свои таблицы свыше 200 определенных интегралов, взятых им из второй статьи Лобачевского по теории рядов и из его работ по геометрии. Формулы Лобачевского из таблиц Биеренса де Хаана переходили в другие справочники и таблицы определенных интегралов вплоть до современных.

5

Дальнейшие исследования Н. И. Лобачевского по неевклидовой геометрии

С середины 30-х годов свои основные научные интересы Лобачевский снова сосредоточивает на неевклидовой геометрии. В 1835 г. он публикует сочинение «Воображаемая геометрия», а в 1836 г. его продолжение — «Применение воображаемой геометрии к некоторым интегралам». Первое из них с некоторыми сокращениями было напечатано также на французском языке в журнале Крелле (1837 г.). Поскольку сочинение «О началах геометрии» осталось непонятым, Лобачевский находит другой способ увериться самому в истине им доказанного, чтобы еще раз представить свои исследования на суд ученых.

¹⁸ B i e r e n s d e H a a n. Tables d'intégrales définies.— Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Deel IV. Amsterdam, 1858.

Он оставляет синтетическое построение новой геометрии, данное в первой работе, и идет по обратному пути: исходя из основных тригонометрических уравнений прямолинейного прямоугольного треугольника, чисто аналитически дает новое построение неевклидовой геометрии. Лобачевский связывает угол a' , $0 \leq a' \leq \frac{1}{2}\pi$ с положительным числом a соотношением $\cot \frac{1}{2} a' = e^a$ и допускает, что в прямолинейном прямоугольном треугольнике с гипотенузой r , катетами p и q и противоположными углами P и Q , в предположении $P + Q < \frac{1}{2}\pi$, выполняются соотношения

$$\sin r' = \sin p' \sin q'; \quad \sin r' = \tan P \tan Q; \quad \tan r' = \tan p' \sin P.$$

В первой работе эти соотношения были доказаны, теперь они принимаются за исходные положения. Из них Лобачевский выводит все остальные соотношения между сторонами и углами для прямоугольного, а затем и все соотношения для произвольного прямолинейного треугольника. Из полученных таким образом соотношений следует, что во всяком треугольнике сумма трех его углов меньше π . При весьма малых сторонах треугольника эти соотношения переходят в соотношения для прямолинейных треугольников евклидовой геометрии, что позволяет пользоваться последними в дальнейшем при нахождении элементов длин, площадей и объемов. Так Лобачевский убеждается в том, что положения воображаемой геометрии не могут вести к ложным заключениям. Вместе с тем он отмечает: «Предположение, что сумма углов треугольника менее двух прямых, может быть допущено только в применении к Аналитике, потому что измерения в природе не открывают нам в этой сумме ни малейшего отклонения от половины окружности... Предположение употребительной Геометрии надобно, следовательно, почитать как бы строго доказанным, а вместе быть убеждену и в том, что, независимо от опыта, напрасно было бы искать доказательства на такую истину, которая еще не заключается сама собою в нашем понятии о телах»¹⁹.

Далее Лобачевский переходит к аналитическим приложениям воображаемой геометрии, рассматривая сначала интегралы, распространенные на плоские фигуры или выражающие их площади, а затем вычисляя объемы тел. Формулы для элементов дуги, площади и объема в различных координатах, прежде всего прямоугольных и полярных, он выводит другим путем, не с помощью чисто геометрических соображений, как раньше, а пользуясь лишь принципом тождества элементарных частей пространства в обеих геометриях, евклидовой и новой. При вычислении интегралов часто пользуется заменами переменных, выражающими переход от одних координат к другим. В работе найдено большое количество интегралов, в том числе другим путем интеграл из сочинения «О началах геометрии», который вызвал не вполне обоснованные замечания Остроградского. Значительная часть вычислен-

¹⁹ Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч. Т. 3, стр. 26—27.

ных интегралов сопоставляется с соответствующими результатами Лежандра, Пуассона, Лиувилля.

Еще больше интегралов вычислено в названном выше продолжении рассмотренной статьи. Строение их определяется прежде всего теми геометрическими задачами неевклидовой геометрии, которые приводят к ним. Кратко изложив основные метрические соотношения воображаемой геометрии ²⁰, Лобачевский рассматривает сначала функцию

$$L(x) = - \int_0^x \log \cos x dx,$$

которая в первой работе была обозначена через $\Phi(x)$. Приводит главные свойства этой функции, дает ее разложение в тригонометрический ряд

$$L(x) = x \log 2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i^2} \sin 2ix,$$

с помощью которого $L(x)$ определяется при любом действительном x (с помощью интеграла она определена лишь в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$). Посредством этой функции выражаются многие интегралы, в том числе, как показывает Лобачевский, интегралы, определяющие объемы пирамид в новой геометрии. Далее получены формулы приведения двойных, а также тройных интегралов с помощью преобразования полярных координат соответственно на плоскости и в пространстве. В виде двойных интегралов представлены решения уравнения ²¹ с частными производными

$$\frac{d^2V}{dt^2} = \frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}$$

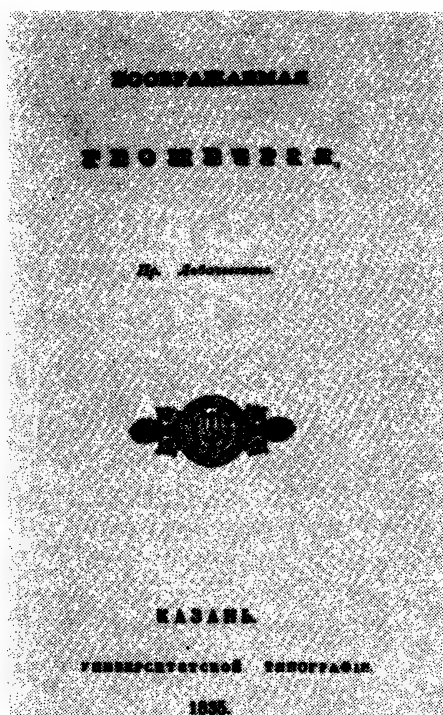
и уравнения (Лапласа)

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0.$$

В этой части работы изложены новые собственно аналитические результаты. Они представляют значительный интерес. Основное же содержание исследования составляют вычисления объемов конусов и треугольных пирамид. Приводимые о них сведения дают новый геометрический материал. Некоторые интегралы Лобачевский получает сначала путем

²⁰ Лобачевский попутно отмечает, что введенная им под названием угла параллельности новая функция заменяет циклогиперболические функции Г. Гудермана. После появления работ Гудермана (1829, 1830 гг.) эти функции под названием гиперболических начали широко применять в математике, хотя намного ранее они были известны В. Риккати (1757 г.) и И. Г. Ламберту (1768, 1770 гг.). Впоследствии оказалось целесообразным применять их в геометрии Лобачевского, при этом выводы становятся более простыми, результаты — легче обозримыми.

²¹ Решение, найденное Лобачевским, является аналогом решения (того же уравнения), полученного Пуассоном, который вел рассуждения в рамках евклидовой геометрии.



Титульный лист отдельного издания «Воображаемой геометрии».

напечатанной в «Ученых записках Казанского университета» за 1835—1838 гг. Это самый обширный геометрический труд Лобачевского, более полно, по сравнению с другими сочинениями, характеризующий развитие его идей. Стремясь внести ясность и строгость в начала геометрии, Лобачевский дает оригинальное изложение основных начальных геометрических сведений, которое коренным образом отличается от изложения в «Началах» Евклида, затем строит более общую, чем у Евклида, теорию параллельных линий и на основе последней дает систематическое построение новой, «воображаемой», геометрии, одновременно получая из нее как предельный случай «употребительную», евклидову, геометрию. При этом он следует в основном тому же плану, который был кратко очерчен в сочинении «О началах геометрии», возвращается к синтетическому построению своей геометрии.

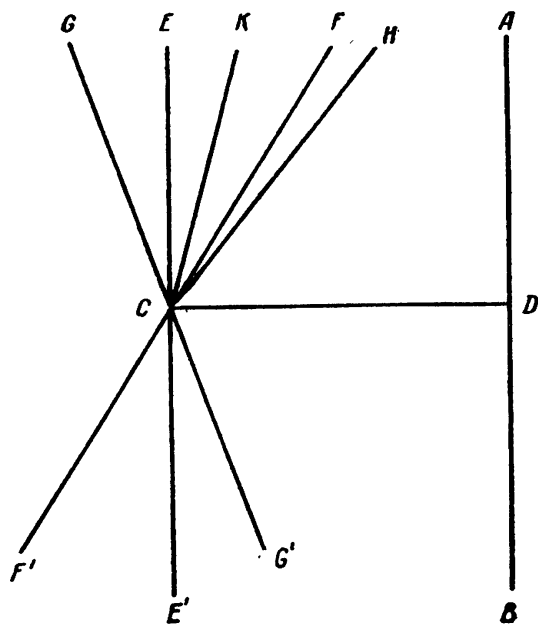
Во вступлении Лобачевский упоминает о предыдущих своих геометрических работах, указывает на несостоятельность попыток доказательства постулата параллельных Евклида, изложенных Лежандром в его обзорном мемуаре по этим вопросам (1833 г.), прежде всего попыток самого Лежандра (1800, 1823 гг.) и Л. Бертрана, как самых распространенных в учебной литературе того времени, затем освещает в общих чертах значение и содержание своих исследований по геометрии, излагает план перестройки начал геометрии, подчеркивая важность синте-

геометрических рассуждений, а затем чисто аналитически, чтобы показать, что преимущество принадлежит геометрическому способу. Заканчивается сочинение словами: «Так-то все построения ведут всегда к согласным заключениям и доказывают верность принятых начал в Воображаемой Геометрии»²². В конце работы приведена сводка вычисленных в ней 50 интегралов; некоторые из них были найдены Лобачевским ранее, в сочинениях «О началах геометрии» и «Воображаемая геометрия». В рассмотренном исследовании Лобачевский поставил воображаемую геометрию на службу математическому анализу и показал, что она непосредственно практически применима в самой математике, тем самым отстаивая право на существование самой воображаемой геометрии.

Наиболее подробно свои геометрические идеи Лобачевский изложил в работе «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных»,

²² Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч. Т. 3, стр. 278.

тического способа и останавливаясь на общих вопросах измерения геометрической величины. В первых шести главах изложены сведения, не зависящие от постулата параллельных, иными словами, выделенная им особо еще в 1823 г. в сочинении «Геометрия» абсолютная геометрия, включая вопросы измерения величины фигур и учение о равенстве треугольников, как прямолинейных, так и сферических. Первоначальные понятия Лобачевского носят топологический характер — это геометрическое тело, прикосновение и сечение его. Изложение ведется скорее генетически, оно не является строго аксиоматическим, многие допущения явно не указываются. В конце шестой главы рассмотрены теоремы о сумме углов прямолинейного треугольника со



Чертеж к теореме о параллельных прямых.

следующим выводом: такая сумма или в каждом треугольнике равна π , или в каждом треугольнике меньше π . Для второго предположения Лобачевский доказывает одинаковость прямолинейных треугольников по трем углам. Это утверждение принадлежит уже лишь «воображаемой» геометрии.

Седьмая глава посвящена параллельным линиям и начинается так: «Линии, выходя из одной точки, либо пересекают данную прямую в той же плоскости, либо никогда с ней не встречаются, сколько бы ни продолжались. Надобно, следовательно, различать между такими линиями в отношении к одной данной: *встречные* или *сводные* и *не встречающиеся* или *не сводные*, к которым принадлежат *параллельные*, составляя переход от одних к другим — *разводным*. Две параллельные к данной разделяют плоскость на четыре части: в двух противоположных заключаются сводные, в двух остальных — разводные линии»²³. Это положение Лобачевский разъясняет с помощью рисунка. Прямая AB и точка C находятся в одной плоскости. CD пересекает AB , как перпендикуляр к ней, CE не встречается AB , как перпендикуляр к CD . CD при вращении вокруг точки C переходит от сводных (сходящихся) в угле FCG' линий к несводным (расходящимся) в угле FCG , затем в угле GCF' — к таким, продолжение которых за точку C пересекает AB , и, наконец, в угле $F'CG'$ — к не встречающим AB . FF' и GG' , представляя переход от сводных к несводным линиям, будут параллельны с AB . «Под этим видом параллельность уже рассматривается во всей обширности. Евклид, не будучи в состоянии дать удовлетворительное доказательство, допускал

²³ Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч. Т. 2, стр. 266.

в Употребительной Геометрии тот частный случай, когда две параллельные должны быть вместе перпендикулами к одной прямой... следовательно, все линии, кроме параллельной, должны пересекать AB , достаточно продолжаясь в ту, либо в другую сторону. Евклидовы последователи затруднили только предмет дополнительными положениями, либо произвольными, либо совсем темными, стараясь убеждать в справедливости принятой истины, которую по существу самой Геометрии доказывать невозможно»²⁴.

Далее рассмотрены свойства параллельных линий и угла параллельности — угла DCF между CF , параллельной с AB , и CD , перпендикулярной к AB , который обозначается здесь, как и в дальнейшем, через $\Pi(x)$, где x — длина CD . Сначала рассмотрены свойства параллельных, общие для употребительной и воображаемой геометрий, затем свойства, присущие параллельным либо в употребительной геометрии, когда угол параллельности является постоянно прямым, либо в воображаемой геометрии, когда угол параллельности является переменным; при этом выявляются утверждения, характерные для каждой из этих геометрий.

В следующей, восьмой, главе изложены свойства предельных линий и предельных поверхностей. Показано, что в треугольниках, составленных из предельных линий на предельной поверхности, сумма углов равна π , т. е. геометрия предельных линий на предельной поверхности является геометрией Евклида. Этот принципиально важный сам по себе факт Лобачевский использует в следующих главах при геометрическом введении тригонометрических функций, при подробном рассмотрении свойств угла параллельности с выводом основной формулы новой геометрии $\tan \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x}$, в которой в качестве e можно брать «для простоты в вычислениях» основание натуральных логарифмов, а также для построения тригонометрии в своей геометрии. Из формул последней он, как и раньше, получает в предельном случае формулы евклидовой тригонометрии. Формулы сферической тригонометрии им выведены дважды: с помощью рассуждений в одной лишь новой геометрии и в одной лишь евклидовой геометрии. Тем самым Лобачевский установил независимость сферической тригонометрии от постулата параллельных.

Последние две главы (12 и 13), по существу, не связаны с предыдущими. Они посвящены соответственно решению прямолинейных треугольников в евклидовой геометрии и решению сферических прямоугольных треугольников. Скорее всего, эти главы должны были служить подготовительным материалом для намечавшейся Лобачевским опытной проверки на основе астрономических наблюдений справедливости созданной им геометрии. Здесь он особо останавливается на теоретическом рассмотрении вопроса об определении вероятности ошибки вычислений. Считая, что ошибки при каком-либо вычислении (наблюдении) равновозможны и являются целыми числами, заключенными

²⁴ Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч. Т. 2, стр. 267—268.

между $+a$ и $-a$, Лобачевский для вероятности $B_r(m)$, что сумма результатов r (независимых) повторений вычисления (наблюдения) заключается между $+m$ и $-m$, получает формулу

$$B_r(m) = \frac{1}{(2a+1)^r} \sum_{-m}^{+m} C_r(m),$$

где

$$C_r(m) = \sum (-1)^{\lambda} r_c^{\omega \lambda} \{ (r-2\lambda)a - m + r - 1 - \lambda \}_c^{\omega r-1}$$

(сумма берется по целым λ от $\lambda = 0$ до $\lambda \leq \frac{ra-m+1}{2a+1}$). Он рассматривает также случай $a = \infty$, получая весьма удобную формулу, выражающую вероятность, что ошибка среднего результата, полученного при r повторениях, не выходит за границы $+x$, $-x$, когда наибольшая ошибка каждого повторения не выходит за пределы $+1$ и -1 ; вычисляет значения вероятностей и их таблицы при конкретных данных. Это исследование проведено исключительно просто, на уровне лучших работ того времени по теории вероятностей²⁵. Его результаты и ныне представляют известный интерес, в них проявилось стремление Лобачевского получить точные количественные выводы на основе небольшого числа повторных вычислений (наблюдений).

Сочинение «Новые начала геометрии с полной теорией параллельных», хотя и было намного доступнее для понимания, чем ранее написанные работы Лобачевского, все же представляло значительные трудности для первоначального ознакомления с новой геометрией. К тому же оно было большим по объему, так как включало много не связанных с новой геометрией сведений, печатание его растянулось на несколько лет. И Лобачевский как геометр продолжал оставаться непонятым. Тогда он приступил к подготовке более доступного изложения своей геометрии. Это было небольшое сочинение на немецком языке «Геометрические исследования по теории параллельных линий», изданное в Берлине в 1840 г. В нем с большим искусством изложены начала новой геометрии, сущность исследований.

В начале сочинения перечислены важнейшие не зависящие от постулата параллельных предложения, которые больше всего необходимы в дальнейшем изложении. Затем излагается общая теория параллельных линий и указываются ее разветвления, ведущие соответственно к обыкновенной и к воображаемой геометриям. Устанавливаются понятия предельной линии и предельной поверхности, доказывается принципиально важная теорема о том, что на предельной поверхности осуществляется евклидова геометрия. В заключение рассмотрены тригонометрические соотношения новой геометрии и выведена основная ее формула $\tan \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x}$. Указано, что в бесконечно малом новая геометрия переходит в обыкновенную, а формулы ее тригонометрии

²⁵ В несколько измененном виде отдельной статьей под названием «Вероятность средних результатов, полученных из повторных наблюдений» оно было напечатано на французском языке в журнале Крелле (1842 г.).

переходят при замене сторон a , b , c соответственно на $a\sqrt{-1}$, $b\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$ в формулы сферической тригонометрии. Отмечено также, что, как было показано ранее, на основании астрономических наблюдений, точность вычислений в обыкновенной геометрии простирается далеко, поэтому, например, в треугольниках, стороны которых доступны измерениям, сумма углов не отличается от двух прямых даже на сотую долю секунды.

Таковы основные положения сочинения, которым Лобачевский еще раз попытался привлечь внимание современников к своей геометрии. Однако и оно не изменило сложившегося у соотечественников Лобачевского отношения к новой геометрии. Издававшийся в Берлине библиографический журнал уже в 1840 г. сообщил о выходе сочинения Лобачевского. В сообщении писалось, что лежащий в его основе принцип и вытекающее из него предложение достаточно характеризуют «это сочинение», чтобы освободить референта от дальнейшей его оценки. Правда, вскоре нашелся читатель, который назвал этот отклик чрезвычайно глупым и смог по достоинству оценить работу Лобачевского. Это был Гаусс, им «овладело большое желание побольше прочесть об этом остроумном математике»²⁶. Сравнивая другие геометрические работы Лобачевского с сочинением 1840 г., Гаусс писал в начале 1844 г. своему ученику Герлингу: «С тех пор как мне представилась возможность самому познакомиться с этим маленьким сочинением, я должен произнести *весьма выгодное* суждение о нем. А именно, оно заключает в себе гораздо больше сжатости и точности, чем более крупные сочинения Лобачевского, которые напоминают скорее запутанный лес, через который трудно пройти и который трудно обозреть, не познакомившись предварительно с каждым отдельным деревом»²⁷. В ноябре 1846 г., еще раз перечитав сочинение Лобачевского 1840 г., Гаусс писал своему другу Шумахеру, что Лобачевский дает изложение «мастерски в истинно геометрическом духе». Эти высказывания Гаусса не были известны Лобачевскому. Он не знал также, что его работа дошла в 1848 г. до Я. Бойяи, который очень ревниво, придирчиво отнесся к ней. Бойяи считал, что ее автором является Гаусс, скрывшийся под именем казанского профессора Лобачевского, чтобы лишить его, Бойяи, приоритета в открытии новой геометрии. Обширные примечания Бойяи к сочинению Лобачевского свидетельствуют о том, что он изучил его с чрезвычайной тщательностью. По словам Бойяи, сочинение «Геометрические исследования по теории параллельных линий» отмечено печатью гения. Оно служило первоисточником в изучении великого творения Лобачевского не только для Гаусса и Бойяи. По этому сочинению, по его неоднократным переизданиям на нескольких языках впервые знакомились впоследствии ученые с новой геометрией. По нему в основном строится синтетическое изложение начал неевклидовой геометрии и в настоящее время.

²⁶ Материалы для биографии Н. И. Лобачевского. Собр. и ред. Л. Б. Модзалевский, стр. 415—416.

²⁷ Там же, стр. 484—485.

Пятидесятилетнему юбилею родного университета Лобачевский посвятил свой последний труд — «Пангеометрию». Она была издана в Казани на русском (1855 г.) и на французском (1856 г.) языках. Свою геометрию, названную ранее воображаемой, Лобачевский именует теперь пангеометрией (всеобщей геометрией), «потому что это название означает геометрию в обширном виде, где обыкновенная геометрия будет частный случай»²⁸. Сочинение представляет собой сжатое обзорное изложение содержания его предыдущих работ. Сначала, ссылаясь на «Геометрические исследования по теории параллельных линий», он останавливается на наиболее важных положениях новой геометрии, включая основную ее формулу для $\Pi(x)$, а также формулы для $\Pi(x \pm y)$, затем излагает прямолинейную тригонометрию, начала аналитической геометрии на плоскости и, наконец, вычисление длин, площадей и объемов, главным образом путем интегрирования дифференциальных выражений для них.

Существенно новых результатов «Пангеометрия» не содержит, в основном она дает новую, причем весьма удачную, обработку изложенного ранее материала. Это особенно касается вывода основного уравнения новой геометрии, формул для площади треугольника и вопроса о выборе единицы длины, в отношении которого ранее оставалась недосказанность²⁹. Лобачевский установил, что отношение двух параллельных дуг s и s' предельных линий, заключенных между одними и теми же осями, является показательной функцией расстояния x между этими дугами. В качестве основания этой показательной функции он брал (за счет выбора единицы длины в новой геометрии) основание натуральных логарифмов: $s' = se^{-x}$. С другой стороны, в основном уравнении $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \Pi(x) = e^{-x}$ в качестве основания показательной функции взято (также за счет выбора единицы длины в новой геометрии) число e — основание натуральных логарифмов. Лобачевский показал совместимость такого выбора единицы длины в обоих случаях: ее можно выбрать так, чтобы в обеих формулах одновременно основанием показательных функций было основание натуральных логарифмов.

В конце работы Лобачевский пишет: «Пангеометрия, как она здесь изложена, основанная на началах несомненных, подает, как мы видели, средства к вычислению значения различных геометрических величин и доказывает вместе, что принятое в обыкновенной геометрии явно или скрытно предположение, что сумма трех углов всякого прямолинейного треугольника постоянна, не есть необходимое следствие наших понятий о пространстве. Один опыт только может подтвердить истину этого предположения»³⁰. Он убежден, как и раньше, в логической правильности новой геометрии. Различными путями приходит он к одним и тем же результатам, многие из которых получаются как без привлечения, так

²⁸ Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч. Т. 3, стр. 437.

²⁹ На нее резко нападал Я. Бойяи в своих примечаниях к работе Лобачевского 1840 г. См. Янош Бойяи. Appendix... Гостехиздат, М.—Л., 1950, стр. 215—220.

³⁰ Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч. Т. 3, стр. 521.

и с привлечением новой геометрии. Как и раньше, Лобачевский считает возможным провести опытную проверку своей геометрии путем использования астрономических наблюдений. «Пангеометрия», хотя и уступает «Геометрическим исследованиям» в доступности изложения, стала одной из наиболее известных работ Лобачевского, выдержала несколько изданий на многих языках.

Лобачевский не ограничился синтетическим построением геометрии. Как уже отмечалось, в «Воображаемой геометрии» он дал аналитическое построение своей геометрии на основе конечных соотношений между сторонами и углами прямолинейного треугольника, из которых непосредственно получал линейный элемент плоскости — дифференциал дуги кривой, и близко подошел к созданному позже Риманом методу построения геометрических систем на основе задания определенного соотношения аналитического характера, линейного элемента в виде дифференциальной квадратичной формы. Тем самым был открыт путь к построению многих геометрий, в том числе неевклидовых. Среди последних нашла свое место в системе Римана и геометрия Лобачевского.

Естественно, что пока единственной в математике была геометрия Евклида, она считалась геометрией окружающего нас мира. За свою двухтысячелетнюю историю геометрия Евклида настолько упрочилась в сознании ученых, что казалась для них образцом научной истины. Так, в частности, смотрел на евклидову геометрию известный немецкий философ И. Кант, использовавший ее в своем философском учении. Появление же геометрических сочинений Лобачевского, материалистическое толкование основных понятий геометрии в них опровергало идеалистические установки Канта.

Материализм является основной чертой мировоззрения Лобачевского. Благодаря передовому мировоззрению он смог вести длительную мужественную борьбу за признание созданного им нового геометрического учения. Лобачевский был продолжателем материалистической линии в русском естествознании, ведущей начало от Ломоносова. В геометрии он видел прежде всего науку о реальном пространстве. Из опыта выводил основные понятия геометрии и именно опыт считал средством проверки истинности геометрических знаний, правильности отражения ими свойств реального пространства, средством установления границ применимости геометрии. Придя к выводу о невозможности доказательства постулата параллельных Евклида, Лобачевский материалистически объяснил ее тем, что истинность этого постулата не определяется одними лишь геометрическими свойствами, а зависит также от физических условий. Проверить это, как и другие физические факты, можно лишь опытным путем. «...В нашем уме, — писал он, — не может быть никакого противоречия, когда мы допускаем, что некоторые силы в природе следуют одной, другие своей особой Геометрии», и, далее, что созданной им геометрии «может быть, следуют молекулярные силы», что она может существовать «либо за пределами видимого мира, либо в тесной сфере молекулярных притяжений»³¹.

³¹ Н. И. Лобачевский. Полн. собр. соч. Т. 2, стр. 159, 160.

После опубликования в 50-х годах научного наследия и переписки Гаусса, давшего, как уже отмечалось, высокую оценку геометрическим исследованиям Лобачевского, и установления Э. Бельтрами в 1868 г. осуществимости геометрии Лобачевского в евклидовом пространстве на поверхности псевдосферы открытие великого русского ученого быстро нашло широкое признание. В России особенно большую роль в этом сыграл профессор Казанского университета А. В. Васильев.

Лобачевский впервые правильно поставил вопрос о геометрических свойствах реального пространства. Он был революционером в науке. Это отмечалось уже в 70-х годах XIX в., вслед за признанием его геометрии: «Чем Везалий был для Галена, чем Коперник был для Птолемея, тем Лобачевский был для Евклида. У Коперника и Лобачевского имеется интересная общая черта — оба они славяне по происхождению. Каждый из них произвел революцию в научных воззрениях, и обе эти революции имеют одинаково громадное значение — это революции в нашем понимании Космоса»³². Дальнейшее выяснение геометрических свойств реального пространства шло по пути, указанному Лобачевским. Оно полностью подтвердило его правоту.

6

Ученики Н. И. Лобачевского. Преподавание математики в Казанском университете

С именем Лобачевского неразрывно связаны постановка преподавания и развитие физико-математических наук в Казанском университете на протяжении нескольких десятилетий. Как уже отмечалось, Лобачевский преподавал и механику, и физику, и многие курсы математики. Основным его курсом в 30—40-х годах было интегральное исчисление. Этот курс он читал на весьма высоком уровне, постоянно расширяя и обновляя его содержание.

Лобачевский оказывал большое влияние на преподавателей физико-математического факультета. До 1839 г. профессором математики университета оставался Г. Б. Никольский, в 1830—1839 гг. декан физико-математического факультета. До 1834 г. продолжал преподавать в университете адъюнкт математики и астрономии Н. Д. Брашман. Он читал кроме курсов математики, прежде всего аналитической геометрии, дифференциального и интегрального исчислений, также сферическую астрономию и механику. В этот период своей деятельности написал несколько математических работ. Одна из них, «О теории особых решений», была одобрена М. В. Остроградским. Брашман отрицательно относился к новой геометрии Лобачевского, однако в преподавании математики он испытывал определенное его влияние. Это влияние особенно заметно в работе Брашмана «Курс аналитической геометрии».

Длительное время математические курсы в Казанском университете преподавал ученик Лобачевского М. И. Мельников (1807—1885). Он

³² W. K. Clifford. Lectures and Essays. V. 1. London, 1879, p. 298—299.

окончил университет в 1826 г., в 1829 г. получил степень кандидата. С 1829 по 1831 г. преподавал в университете алгебру, с 1832 г. — начертательную геометрию, с 1833 г. — теорию высших (алгебраических) уравнений. После перехода Брашмана в Московский университет Мельников читал аналитическую и начертательную геометрию, теорию высших уравнений и дифференциальное исчисление, а с 1838 г. — алгебраический анализ и теорию чисел. В начале 1841 г. защитил магистерскую диссертацию «Об интегрировании уравнений с частными производными второго порядка» и был избран адъюнктом.

К чтению математических курсов привлекался также профессор прикладной математики Казанского университета П. И. Котельников, он читал некоторое время алгебру и дифференциальное исчисление. Много лет подряд, с 1839 по 1862 г., Котельников был деканом физико-математического факультета, помогал Лобачевскому в управлении университетом, был его ближайшим сотрудником. В своей речи «О предубеждении против математики», произнесенной на торжественном собрании университета 31 мая 1842 г. и изданной в этом же году в Казани, Котельников отмечал: «Тысящелетние тщетные попытки доказать со всею математическою строгостью из основных теорем геометрии, равенство суммы углов в прямоугольном треугольнике двум прямым, побудило достопочтенного заслуженного профессора нашего университета предпринять изумительный труд построить целую науку, геометрию, на новом предположении: сумма углов в прямоугольном треугольнике менее двух прямых — труд, который рано или поздно найдет своих ценителей»³³. Этот отзыв, хотя и остался почти незамеченным современниками, несомненно, был в некоторой степени моральной поддержкой для Лобачевского. В дальнейшем Котельников писал, что геометрия Лобачевского остается непонятой только из-за недостатка ясности в изложении. Котельникову принадлежит работа собственно математического содержания «О численном значении сумм» (1848 г.).

Преемником Лобачевского по кафедре чистой математики был воспитанник Казанского университета А. Ф. Попов (1815—1878). Работая после окончания университета (1835 г.) со степенью кандидата учителем математики в Казанской гимназии, Попов продолжал совершенствовать свои знания. В 1843 г. он защитил магистерскую диссертацию — «Теория волнения каплеобразных жидкостей», в 1845 г. — докторскую — «Об интегрировании дифференциальных уравнений гидродинамики, приведенных к линейному виду». Попытка Лобачевского передать ему кафедру физики не удалась. Считая, что Попов «не замедлит показать себя достойным профессором и встать в кругу самых известных европейских ученых», Лобачевский в 1846 г. уступил ему свою кафедру. Попов был избран экстраординарным, а через три года, в сентябре 1849 г., ординарным профессором. Сложившиеся между Лобачевским и Поповым дружеские отношения способствовали совершенствованию последнего как преподавателя и ученого. К пятидесятилетию Казан-

³³ Материалы для биографии Н. И. Лобачевского. Собр. и ред. Л. Б. Модзалевский, стр. 440.

ского университета Попов подготовил и опубликовал свою работу «Основания вариационного исчисления» (1856 г.). Она написана на уровне состояния предмета в то время. Вопросы, касающиеся интегралов с двумя и многими переменными, изложены по Пуассону и Саррюсу, а не по Остроградскому, как можно было ожидать.

Попов читал те же курсы, которые до него вел Лобачевский. С течением времени он расширял и обновлял их содержание. Курсы же Лобачевского были для него образцом систематичности и строгости изложения. Он неоднократно высказывался о необходимости теснейшей связи между теоретическими и опытными знаниями (в частности, в речи «Об ученых заслугах Пуассона», произнесенной 5 июля 1849 г. на собрании Казанского университета). Глубокое понимание такой связи проявилось и в его научной деятельности, основным направлением которой была математическая физика.

В математической физике Попова больше всего интересовали задачи гидродинамики. Этим задачам, особенно теории волн на поверхности жидких тел, кроме магистерской и докторской диссертаций он посвятил значительную часть своих статей (1850—1860 гг.). В них изложены интересные и важные для математической физики того времени результаты, большей частью тесно связанные с соответствующими исследованиями Пуассона и Остроградского. Теоретические выводы Попов сопоставлял с опытными данными, полученными как им самим, так и другими учеными. К его докторской диссертации непосредственно примыкают статьи по теории звука (1848, 1850 гг.).

Еще в 1845 г. внимание Попова привлекла теория упругости. Однако его статьи по вопросам этой теории появились значительно позднее (1852, 1853 гг.). Во второй из них Попов более простым путем пришел к полученным ранее Остроградским и Пуассоном результатам. Он несколько видоизменил способ решения, примененный Остроградским во втором мемуаре по теории упругости, а также весьма просто провел рассмотрение полученных интегралов, устанавливающее наличие продольных и поперечных волн.

К работам Попова по математической физике примыкают его статьи собственно математического содержания (1848—1857 гг.). В них Попов изучает главным образом различные определенные интегралы, чему он уделял много внимания и в работах по математической физике. Среди изученных им интегралов особое место занимают

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{1+x} e^{-gx} dx \text{ и } \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{(x^2+bx)^{-1}} dx.$$

Последний рассмотрен Пуассоном в мемуаре о температуре земного шара, атмосферы и окружающего Землю пространства (1837 г.). Попов провел его изучение «со всей требуемой точностью». В вопросах исследования определенных интегралов он оказался ближе всего к Лобачевскому. Связанные же с геометрией статьи Попова (1850, 1859, 1861 гг.) были лишь небольшим эпизодом в его жизни. В них рассматривались весьма частные вопросы, не имеющие непосредственного отношения к геометрии Лобачевского.

Работы Попова печатались не только в Казани, а и в журналах Петербурга, Москвы, Парижа, Берлина. Его имя стало известным. С большой честью Попов был принят в Париже в 1861 г. Дюамелем, Бертраном, Эрмитом и другими известными французскими учеными. Тогда же в «Докладах Парижской академии наук» была напечатана его работа об остаточном члене ряда Лагранжа. Этот вопрос изучал уже П. Л. Чебышев (1857 г.). Он пользовался видоизмененной формулой интегрирования по частям. Попов получил выражение для остатка ряда Лагранжа с помощью обычного интегрирования по частям, причем так же просто, как это делается для ряда Маклорена.

В 1858/59 учебном году Попов пополнил свои лекции специальными вопросами теории определенных интегралов. Вероятно, это было связано с его поездкой в 1857 г. в Гельсингфорский университет, во время которой он лично познакомился с П. Л. Чебышевым. Частично лекции Попова были опубликованы (1865 г.). Они мало похожи по своему стилю на лекции Остроградского 1858/59 г., влияние которых можно заметить в освещении лишь отдельных вопросов.

Вместе с Лобачевским Попов подготовил себе преемника по преподаванию в гимназии, а затем помощника в университете. Это был И. А. Больцани (1818—1876). Молодого приказчика нотной и эстампной торговли Больцани, имевшего лишь первоначальное образование, Попов случайно застал за чтением курса механики Пуассона. Это не могло не обратить на себя внимания. Лобачевский также заинтересовался математическими способностями Больцани и руководил его занятиями³⁴. Вскоре в переводе Больцани вышло на русском языке сочинение Клазиуса «О потенциальной функции и потенциале» (1843 г.). В начале 1845 г. он получил степень кандидата. За диссертацию «Математические исследования о распределении гальванических токов в телах дайнного вида», представлявшую в основном обзор работ немецких ученых по этому вопросу, в 1854 г. Больцани была присуждена степень магистра математических наук. В апреле этого же года его назначают адъюнктом на кафедру чистой математики вместо ушедшего в отставку М. И. Мельникова, затем — на кафедру физики, где вскоре избирают профессором. В 1856 г. Больцани опубликовал работу «Теория якобиевых функций и эллиптических функций и интегралов», в которой изложил теорию тэта-функций Якоби как основы построения теории эллиптических функций и интегралов. На этом свои научные исследования в области математики он прекратил, однако оставался незаменимым в

³⁴ Лобачевский оказал также определенное влияние на Н. Н. Зинина (1812—1880), получившего в Казанском университете прекрасную подготовку по математике, астрономии и механике, и Н. Яковлева. За сочинение «Теория пертурбаций» по отзыву Лобачевского Зинин при окончании университета в 1833 г. получил степень кандидата и золотую медаль. В течение следующего учебного года Зинин преподавал в Казанском университете аналитическую механику, гидростатику и гидродинамику. Затем занялся химией и стал известным ученым.

Яковлев, используя работу Лобачевского «Способ уверяться в исчезании бесконечных строк...», написал сочинение «О разложении в тригонометрические строки функций $\sin^p x$, $\cos^p x$, x^p в случае p иррационального», которое было напечатано в «Ученых записках Казанского университета» (1857, кн. 4, стр. 84—152).

университете советником и руководителем молодых математиков, делился со всеми своими почти энциклопедическими познаниями по самым разнообразным отраслям знания.

В 1855 г. курсы алгебраического анализа, аналитической геометрии, тригонометрии и теории элементарных трансцендентных функций, дифференциального исчисления, а также математики для студентов естественного отделения перешли к Э. П. Янишевскому (1829—1906). Он окончил Казанский университет в 1850 г. со степенью кандидата. В феврале 1854 г. был удостоен степени магистра за диссертацию «Формулы для повышения степени дуги под знаком $\sin$ или $\cos$ ». Диссертация посвящена вычислению несобственных интегралов. В ней Янишевский следует способу Лиувилля, использует дифференцирование по параметру, переход к мнимым величинам, а также одну формулу Эйлера для гамма-функции. Он нашел, в частности, формулы, из которых при $n = 2$ получаются формулы, весьма удачно использованные Поповым (1848 г.) в теории звука.

Итак, математическая деятельность Казанского университета в рассматриваемое время продолжала развиваться под непосредственным влиянием творчества Лобачевского. Однако основные научные интересы в университете постепенно переместились в область математической физики, где значительные результаты были получены Поповым. Математические исследования, правда, в гораздо меньшем масштабе, вели также Мельников, Больцани, Янишевский, которые в своем преподавании, как и Попов, использовали научное наследие, опыт, пособия своего великого предшественника.

ГЛАВА ПЯТАЯ

ТВОРЧЕСТВО П. Л. ЧЕБЫШЕВА

1

Очерк жизни и педагогическая деятельность. Создание петербургской математической школы

С середины XIX в. ведущая роль в развитии отечественной математики принадлежит великому русскому ученому Пафнутию Львовичу Чебышеву.

Чебышев родился 16 (4) мая 1821 г. в с. Окатово Боровского уезда Калужской губернии в дворянской семье. Грамоте, французскому языку и арифметике научился дома. В 1832 г. Чебышев вместе с родителями переехал в Москву, где продолжил домашнее образование. Математике его обучал преподаватель Московского университета П. Н. Погорельский. В 1837 г. Чебышев поступил на математическое отделение философского факультета Московского университета. Здесь он слушал лекции по чистой математике Н. Е. Зернова, по прикладной — Н. Д. Брашмана, по астрономии — Д. М. Перевощикова, по физике — М. Ф. Спасского. При переходе на второй курс написал работу «Вычисление корней уравнений», которая была удостоена серебряной медали. Окончил университет в 1841 г. «отличнейшим кандидатом». В 1845 г. защитил магистерскую диссертацию «Опыт элементарного анализа теории вероятностей» (1845). В мае 1847 г. защитил в Петербургском университете диссертацию «Об интегрировании помощью логарифмов» на право преподавания и был утвержден адъюнктом этого университета.

Сразу по приезде Чебышева в Петербург Буняковский привлек его к работе по подготовке к изданию Академией наук неопубликованных теоретико-числовых работ Эйлера. В 1849 г. Чебышев защитил диссертацию «Теория сравнений» и был удостоен степени доктора математики и астрономии. Через два года он экстраординарный, а с 1860 г. — ординарный профессор Петербургского университета.

В 1853 г. Чебышева избирают адъюнктом Петербургской академии наук, в 1856 г. — экстраординарным и в 1859 г. — ординарным академиком. К этому времени вышли его знаменитые работы о простых числах (1849, 1852 гг.), об интегрировании иррациональных дифференциалов (1853 г.), о функциях, наименее уклоняющихся от нуля (1854, 1859 гг.), по теории интерполирования (1855, 1859 гг.). В 1860 г. Чебышев был избран членом-корреспондентом Парижской академии наук. В связи с этим Эрмит писал ему: «Это должная и вполне заслуженная дань

уважения, воздаваемая Вам как за Ваши прекрасные открытия в арифметике, так и Ваши важные работы по теории интерполирования»¹.

В Петербургском университете Чебышев читал высшую алгебру, теорию чисел, аналитическую геометрию и сферическую тригонометрию, теорию эллиптических функций, интегрирование дифференциальных уравнений, практическую механику, интегральное исчисление, теорию вероятностей и изредка некоторые другие математические курсы. Аудитория для него «имела всегда неотразимую притягательную силу и преподавательские обязанности не были для него отягощающим трудом, а напротив — источником удовольствия»². Его курсы были небольшими по объему, доступными, понятными и богатыми по содержанию.

Преподавательскую деятельность Чебышев сочетал с научными исследованиями, а также с организаторской работой, имевшей большое значение для развития русской науки и техники, образования и просвещения. С 1855 г. он член Артиллерийского отделения военно-ученого комитета (и в это время проводит исследование по устойчивости цилиндрико-конических снарядов). С 1856 г. (по 1873) — член ученого комитета Министерства народного просвещения, где представляет математические науки. Своей деятельностью в комитете Чебышев оказал значительное влияние на постановку и уровень преподавания математики в начальных и средних учебных заведениях. В 1859 г. его назначают «правителем дел комиссии по математическим артиллерийским вопросам и опытам, относящимся до теории стрельбы», в 1867 г. — членом технического комитета Главного артиллерийского управления. Видную роль сыграл Чебышев в становлении и дальнейшей деятельности Московского математического общества.

Чебышев был активным участником съездов русских естествоиспытателей и врачей, где выступал с докладами, демонстрировал изобретенные механизмы и счетную машину с непрерывным движением, принимал участие в обсуждении докладов и сообщений. Непосредственное общение участников съездов с Чебышевым благотворно сказывалось на их дальнейшей деятельности. Его выступления в 1873—1882 гг. на сессиях Французской ассоциации содействия преуспеванию наук, а также научные поездки за границу способствовали ознакомлению зарубежных ученых с достижениями русской математики и механики.

В 1882 г. Чебышев оставил преподавание в Петербургском университете и всецело посвятил себя научной деятельности в Академии наук, которую не прекращал до самой кончины — 8 декабря (26 ноября) 1894 г.

Научные интересы Чебышева с начала 60-х годов значительно расширились. Из многочисленных его работ этого периода особенно широкую известность получили «Об интерполировании» (1864 г.), «Об

¹ [Ш. Эрмит. Письма к П. Л. Чебышеву]. — В кн.: П. Л. Чебышев. Полн. собр. соч. Т. 5. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1951, стр. 430.

² С. А. Венгеров. Критико-библиографический словарь русских писателей и ученых. Т. 6. СПб, 1897—1904, стр. 20.



П. Л. Чебышев (60-е годы XIX в.).

одном арифметическом вопросе» (1866 г.), «О средних величинах» (1867 г.), «О параллелограммах» (1869 г.), «О предельных величинах интегралов» (1874 г.). Исследования Чебышева в области интегрирования функций, теории вероятностей, теории чисел, теории наилучшего приближения функций, теории интерполирования охватывали много новых важных вопросов. Видное место в его научном творчестве занимали прикладные вопросы, относящиеся, прежде всего, к теории механизмов.

Чебышев становится почетным членом почти всех университетов России, ряда русских и зарубежных ученых обществ, избирается членом Берлинской (1871 г.), Болонской (1873 г.), Парижской (1874 г.) академий наук, Лондонского Королевского общества (1877 г.), Итальянской Королевской академии (1880 г.), Французского математического общества (1882 г.), Шведской академии наук (1893 г.). По ходатайству Парижской академии наук, возбужденному Эрмитом, в 1890 г. президент Франции наградил Чебышева Командорским крестом Почетного легио-

на. Эрмит писал, что Чебышев является «гордостью науки в России, одним из первых геометров Европы, одним из величайших геометров всех времен»³. Слава Чебышева ширилась по мере выхода его блестящих работ, по мере появления вокруг него все большего числа учеников, продолжавших и развивавших его исследования, по мере становления и роста созданной и возглавляемой им петербургской математической школы.

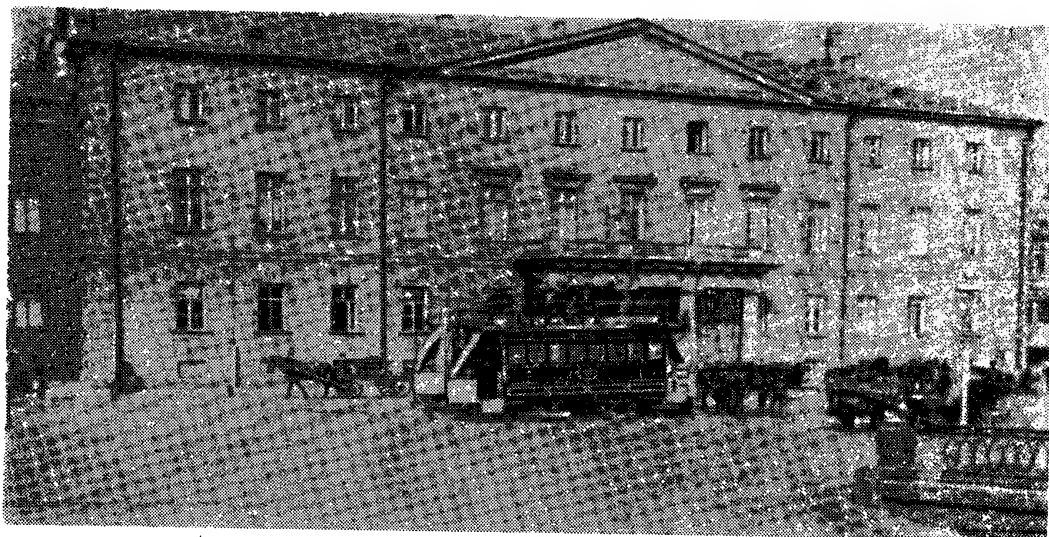
Тематика исследований ученых петербургской математической школы во многом определялась творчеством Чебышева. Чебышев, его ученики и последователи проявляли интерес к конкретным научным задачам, имевшим важное практическое значение. Они ставили перед собой цель — строго решить их путем построения алгоритмов, которые позволяли бы получить точное решение через конечное число шагов или же найти приближенное решение с установлением пределов погрешности. Большое внимание уделяли доведению решения до числового результата, до возможности его непосредственного использования. Характерным для петербургской математической школы являлось постоянное обращение к практике как источнику теоретических исследований. В вопросах взаимосвязи теории и практики проявились материалистические взгляды Чебышева. В речи «Черчение географических карт» на торжественном акте Петербургского университета в 1856 г. Чебышев говорил: «Сближение теории с практикой дает самые благоприятные результаты, и не одна только практика от этого выигрывает, сами науки развиваются под влиянием ее: она открывает им новые предметы для исследования или новые стороны в предметах давно известных... Если теория много выигрывает от новых приложений старой метóды или от новых развитий ее, то она еще более приобретает открытием новых метóд, и в этом случае науки находят себе верного руководителя в практике»⁴.

Тесная связь теории и практики нашла в творчестве Чебышева конкретное выражение в разработке таких важных для приложений вопросов, как теория наилучшего приближения функций, теория интерполирования, теория вероятностей, а также в исследованиях прикладного характера. Под влиянием Чебышева в петербургской математической школе сложился общий подход к математике. Ляпунов характеризовал его следующими словами: «П. Л. Чебышев и его последователи остаются постоянно на реальной почве, руководствуясь взглядом, что только те изыскания имеют цену, которые вызываются приложениями (научными или практическими), и только те теории действительно полезны, которые вытекают из рассмотрения частных случаев.

Детальная разработка вопросов, особенно важных с точки зрения приложений и в то же время представляющих особенные теоретические трудности, требующие изобретения новых методов и восхождения к принципам науки, затем обобщение полученных выводов и создание

³ [Ш. Эрмит. Письма к П. Л. Чебышеву]. — В кн.: П. Л. Чебышев. Полн. собр. соч. Т. 5, стр. 434.

⁴ П. Л. Чебышев. Полн. собр. соч. Т. 5, стр. 150.



Дом в Петербурге на Васильевском острове, где жил П. Л. Чебышев.

этим путем более или менее общей теории — таково направление большинства работ П. Л. Чебышева и ученых, усвоивших его взгляды»⁵. Наиболее ярко эти особенности проявились в научных исследованиях самого П. Л. Чебышева.

2

Труды по теории чисел

Теория чисел являлась важнейшим направлением научных исследований П. Л. Чебышева и созданной им математической школы. Как уже упоминалось, появлением интереса к этой отрасли математики молодой Чебышев был обязан Буняковскому, который привлек его к составлению указателя к работам Л. Эйлера по теории чисел. Указатель Буняковского и Чебышева значительно облегчал ознакомление с теоретико-числовыми работами Эйлера, впервые давал их научную классификацию.

Самый большой труд Чебышева по теории чисел — «Теория сравнений» (1849 г.), ставшая одним из лучших руководств по теории чисел. В качестве дополнений Чебышев включил в сочинение свои новые результаты по теории чисел. В одном из дополнений — мемуаре «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины» — изложены результаты, принесшие Чебышеву мировую славу. О его содержании он докладывал Петербургской академии наук еще 24 мая 1848 г. Мемуар был опубликован на французском языке в журнале Петербургской академии наук в 1851 г., а также в журнале Луивилля в 1852 г.

⁵ А. М. Ляпунов. Жизнь и труды П. Л. Чебышева. — В кн.: П. Л. Чебышев. Избранные математические труды. Гостехиздат, М.—Л., 1946, стр. 20.

Простые числа — важнейший и труднейший для исследования предмет в математике. В древности Евклид установил, что нет наибольшего простого числа; Эратосфен указал способ выделения простых чисел в ряду натуральных чисел (решето Эратосфена). После этого лишь Эйлеру удалось достигнуть значительных успехов в теоретическом изучении вопросов, связанных с простыми числами. Установленное им тождество

$$\prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \sum_n \frac{1}{n^s} \quad (s > 1),$$

из которого непосредственно вытекает теорема Евклида о бесконечности множества всех простых чисел, явилось основой дальнейших теоретических исследований по теории чисел, составивших важнейший ее раздел — аналитическую теорию чисел. Многих выдающихся математиков привлекал вопрос о числе простых чисел, не превосходящих данного числа, но лишь Чебышеву удалось после Евклида получить первые существенные результаты в этом направлении.

Результаты Чебышева выражены в следующих доказанных им теоремах. Первая из них утверждает: если $\varphi(x)$ — число простых чисел, меньших x , n — какое-либо целое число, $\rho > 0$, то сумма

$$\sum_{x=2}^{x=\infty} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \frac{1}{\log x} \right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}}$$

с приближением ρ к нулю стремится к конечному пределу. Доказывая эту теорему, Чебышев, вслед за Эйлером, изучает функцию, определенную при действительных $s > 1$ как $\sum_n \frac{1}{n^s}$ (у Чебышева $\sum_m \frac{1}{m^{1+\rho}}$ при $\rho > 0$). Эта функция была распространена Риманом (1859 г.) на комплексную область и получила название функции Римана $\zeta(s)$. Он явно оперирует в действительной области этой функцией, ее логарифмом и их производными, рассматривает важные их свойства⁶, т. е. исследует эту функцию до Римана.

В качестве следствия из первой теоремы Чебышев получает утверждение о том, что выражение

$$\sum_{x=2}^{x=\infty} \left[\varphi(x+1) - \varphi(x) - \int_x^{x+1} \frac{dx}{\log x} \right] \frac{\log^n x}{x^{1+\rho}} dx$$

с приближением ρ к нулю приближается к конечному пределу. Затем, используя рассуждение от противного, он доказывает, что в пределах от $x = 2$ до $x = \infty$ $\varphi(x)$ удовлетворяет бесчисленное множество раз неравенству

$$\varphi(x) > \int_2^x \frac{dx}{\log x} - \frac{ax}{\log^n x}$$

⁶ С точки зрения современной теории функций Чебышев исследует поведение этой функции вблизи ее полюса.

и неравенству

$$\varphi(x) < \int_2^x \frac{dx}{\log x} + \frac{\alpha x}{\log^n x},$$

как бы α , оставаясь количеством положительным, ни было мало, а n — велико. Вторая теорема легко приводит к третьей, по которой выражение

$$\frac{x}{\varphi(x)} - \log x$$

при $x = \infty$ не может иметь пределом величину, отличную от -1 . Третья теорема Чебышева противоречит эмпирической формуле Лежандра

$$\varphi(x) = \frac{x}{\log x - 1,08366},$$

из которой для предела выражения

$$\frac{x}{\varphi(x)} - \log x$$

при $x = \infty$ получается $-1,08366$, а не -1 . О точности при замене $\varphi(x)$ какой-нибудь данной функцией $f(x)$ говорится в следующих двух теоремах.

Если выражение

$$\frac{\log^n x}{x} \left(f(x) - \int_2^x \frac{dx}{\log x} \right)$$

при $x = \infty$ имеет пределом количество конечное или бесконечность, то $f(x)$ не может представить $\varphi(x)$ верно до количества порядка $\frac{x}{\log^n x}$ включительно (теорема 4).

Если функция $\varphi(x)$ может быть выражена верно до количества порядка $\frac{x}{\log^n x}$ включительно алгебраически в x , $\log x$, e^x , то такое выражение ее есть

$$\frac{x}{\log x} + \frac{1 \cdot x}{\log^2 x} + \frac{1 \cdot 2 \cdot x}{\log^3 x} + \dots + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1) x}{\log^n x}$$

(теорема 5).

На основании четвертой теоремы Чебышев показывает, что формула Лежандра не может выражать $\varphi(x)$ верно до количеств порядка $\frac{x}{\log^2 x}$ включительно; из функций вида $\frac{x}{A \log x + B}$ лишь функция $\frac{x}{\log x - 1}$ может давать такое выражение. Пятая теорема позволяет установить

что $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$ выражает $\varphi(x)$ точнее, чем формула Лежандра или подобные ей⁷. Чебышев отмечает, что преимущество

$$\int_2^x \frac{dx}{\log x}$$

перед

$$\frac{x}{\log x - 1,08366}$$

обнаруживается при $x > 10\,000\,000$, что далеко выходило за пределы известных в то время таблиц простых чисел. В заключение он дает необходимые уточнения в соответствующих формулах Лежандра, если при

выводе их определять приближенно $\varphi(x)$ не по Лежандру, а как $\int_2^x \frac{dx}{\log x}$.

Дальнейшие свои результаты по исследованию простых чисел Чебышев изложил в работе «Мемуар о простых числах», опубликованной в журнале Лиувилля в 1852 г., а также в журнале Петербургской академии наук в 1854 г. Появление этого мемуара непосредственно связано с так называемым постулатом Ж. Бертрана — утверждением, что при $a > 3$ существует всегда простое число, большее a и меньшее $2a - 2$. Это утверждение понадобилось Ж. Бертрону при доказательстве одной теоремы теории подстановок (1845 г.), однако он не смог его доказать и вынужден был постулировать⁸.

Чебышев вводит в рассмотрение функцию $\Theta(x)$, означающую сумму логарифмов простых чисел, не превышающих x . Изучение этой функции позволило ему не только доказать постулат Бертрана, но и получить важные результаты о поведении функции $\varphi(x)$, о сходимости рядов по простым числам. В основу рассуждений легло выведенное Чебышевым тождество

$$\psi(x) + \psi\left(\frac{x}{2}\right) + \psi\left(\frac{x}{3}\right) + \psi\left(\frac{x}{4}\right) + \dots = T(x)$$

и установленное им неравенство

$$\psi(x) \geq T(x) + T\left(\frac{x}{30}\right) - T\left(\frac{x}{2}\right) - T\left(\frac{x}{3}\right) - T\left(\frac{x}{5}\right) \geq \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right);$$

при этом положено:

$$\Theta(x) + \Theta(x)^{\frac{1}{2}} + \Theta(x)^{\frac{1}{3}} + \Theta(x)^{\frac{1}{4}} + \dots = \psi(x);$$

$$\log(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots [x]) = T(x).$$

⁷ В письме Энке от 24 декабря 1851 г. Гаусс вспоминал, что в молодости, занимаясь задачей о простых числах, он пришел к мысли об интегральном логарифме. Однако он не пошел дальше эмпирических проб. Совершенно независимо от этого Чебышев теоретически установил и обосновал асимптотический закон распределения простых чисел.

⁸ Постулат у Бертрана изложен в такой форме: если $n > 7$, то существует по крайней мере одно простое число, содержащееся между $\frac{n}{2}$ и $n - 2$. До недавнего времени оставалось неизвестным, что это утверждение было почти за 100 лет до Бертрана сформулировано и проверено на различных примерах Эйлером, но оставалось неопубликованным.

Переход к функции $\Theta(x)$ приводит к неравенствам

$$\begin{aligned} \frac{6}{5}Ax - Ax^{\frac{1}{2}} + \frac{5}{4\log 6}\log^2 x + \frac{5}{2}\log x + 2 > \\ > \Theta(x) > Ax - \frac{5}{8\log 6}\log^2 x - \frac{15}{4}\log x - 3, \end{aligned}$$

в которых

$$A = \log \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}} = 0,92\,129\,202\dots$$

С помощью последних неравенств Чебышев доказывает постулат Бертрана для всех $a > 160$ (для остальных a он проверяется непосредственно при помощи таблиц простых чисел). Из этих же неравенств следует, что отношение $\varphi(x) : \frac{x}{\log x}$ заключено между 0,92129 и 1,10555, иными словами, что функция $\frac{x}{\log x}$ дает истинный порядок роста $\varphi(x)$. Этот замечательный результат впервые показывает, как именно возрастает $\varphi(x)$ с ростом x . Следуя Чебышеву, Сильвестр нашел, что вместо указанных пределов для $\varphi(x) : \frac{x}{\log x}$ можно взять 0,95695 и 1,04423. В 1896 г. Валле-Пуссен и Адамар доказали, что это отношение стремится к единице при бесконечном возрастании x . Для доказательства они использовали общую теорию аналитических функций применительно к функции Римана $\zeta(s)$ ⁹.

Эти же неравенства позволили Чебышеву доказать во второй части рассматриваемого мемуара теорему, устанавливающую связь между сходимостью рядов по всем натуральным числам и сходимостью рядов по всем простым числам. В заключение мемуара он указывает, что при вычислении по предложенным им формулам числа простых чисел, не превосходящих очень большого данного предела, погрешность меньше $\frac{1}{10}$ искомого числа. Первая часть этого мемуара была полностью включена Ж. Серре в «Cours d'Algèbre supérieure» (t. II, 1866) с приложением к выводу теоремы Бертрана.

К рассмотренному мемуару Чебышева о простых числах примыкает его «Заметка о некоторых рядах», появившаяся в 1851 г. в журнале Лиувилля. Здесь также рассматриваются ряды по простым числам. Чебышев предлагает принцип обращения рядов. Этот принцип носит весьма общий характер. По существу, иной формой записи одного частного случая принципа Чебышева является принцип обращения рядов, опубликованный Дедекиндом в 1857 г. и обычно связываемый с его

⁹ Основным пунктом в этом круге вопросов, продолжающим привлекать внимание многих ученых, является известная гипотеза Римана (1859 г.) — утверждение, что все нетривиальные нули $\xi(s)$ ($s = \sigma + ti$) лежат на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$.

именем, что исторически не оправдано, так как работа Чебышева появилась шестью годами раньше работы Дедекинда.

В 1851 г. появилась работа Чебышева «О квадратичных формах». В отличие от рассмотренных уже теоретико-числовых работ она относится не к аналитической, а к алгебраической теории чисел. Эйлер показал на нескольких примерах, как можно воспользоваться представлением чисел квадратичными формами с отрицательными определителями, чтобы узнать, простые ли это числа. В работе Чебышева показано, что для этого же можно воспользоваться и некоторыми формами с положительными определителями. Такой способ исследования простоты чисел становился вполне общим и удобно применимым даже к большим числам.

После предварительного изучения неопределенного уравнения $x^2 - Dy^2 = \pm N$ Чебышев доказывает теорему, позволяющую узнать, является ли N простым числом. Для облегчения непосредственного применения этой теоремы он дает таблицу форм вида $\pm (x^2 - Dy^2)$ для D от 2 до 33 с соответствующими пределами для x и y и соответствующими линейными формами тех чисел N , которые могут быть испытаны при помощи этих форм. В связи с замечанием Лежандра (1830 г.) о том, что каждое из чисел $2^8 \cdot 8520191$ и $2^8 \cdot 257 \cdot 33023$ равно сумме делителей другого, кроме него самого (числа являются дружественными), если только число 8520191 простое, Чебышев в качестве примера останавливается именно на этом числе и доказывает, что оно простое, а значит, указанные Лежандром числа действительно являются дружественными.

В 1852 г. Чебышев подробно обсуждал свои теоретико-числовые результаты с Дирихле, а также с Полиньяком. На один результат, найденный Чебышевым и Полиньяком независимо друг от друга, он ссылается в письме П. Фуссу от 10 марта 1853 г. В этом письме сообщается без доказательства открытая Чебышевым теорема, позволяющая характеризовать различие в числе простых чисел вида $4n + 1$ и $4n + 3$. В качестве примера приведено без доказательства утверждение: сумма ряда

$$e^{-3c} - e^{-5c} + e^{-7c} + e^{-11c} - e^{-13c} - e^{-17c} + e^{-19c} + e^{-23c} + \dots$$

по мере приближения c к нулю приближается к $+\infty$ ¹⁰.

Видное место в развитии теоретико-числовых исследований занимает мемуар Чебышева «Об одном арифметическом вопросе» (1866 г.). В нем рассмотрены задачи, связанные с рациональными приближениями действительных чисел. Решаемый с помощью непрерывных дробей вопрос о наилучшем приближении действительного числа рациональным является вопросом о наилучшем приближении к нулю величины $y - ax$, об определении по данной степени приближения $y - ax$ к нулю наи-

¹⁰ Это утверждение, как показали Харди и Литтлвуд (1917 г.) и Ландау (1918 г.), эквивалентно гипотезе Римана для ряда

$$1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \dots$$

меньших (целых) чисел x и y , дающих это приближение. С помощью непрерывных дробей Чебышев решает более сложную задачу — об определении чисел x и y из условия, что разность $y - ax$ с желаемой степенью приближения дает заданную величину b , отличную от нуля.

Предположив, что разность $y - ax - b$ должна заключаться между нулем и единицей, Чебышев показывает, что степень приближения разности $y - ax$ к b есть $E(ax + b) + 1 - (ax + b) = \varphi(x)$, если эта разность больше b , и $ax + b - E(ax + b) = \psi(x)$, если она меньше b . Таким образом, вопрос сводится к определению наименьшего значения целого числа x , при котором указанные выражения для степени приближения имеют величину, не превышающую некоторой данной. Тонкие рассуждения, основанные на подробном изучении последовательностей $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \dots$ и $\psi(0), \psi(1), \psi(2), \psi(3), \dots$, с привлечением уже известного решения задачи в случае $b = 0$, привели Чебышева к алгоритму решения исследуемой задачи. Затем он доказывает теорему: если a — иррациональное (несоизмеримое) число, то найдется бесконечное множество таких целых чисел x, y , при которых разность между выражением $y - ax$ и каким-либо данным числом b будет меньше $\frac{2}{x}$; одни из этих величин x, y будут давать $y - ax > b$, другие $y - ax < b$. Отсюда, ограничиваясь случаем, когда $y - ax < b$, он непосредственно получает другую теорему: если разность арифметической прогрессии есть число несоизмеримое, то среди ее членов найдется бесконечное множество таких, дробная часть которых меньше числа 2, разделенного на количество предшествующих членов.

Задача, рассмотренная Чебышевым, привлекла внимание ряда крупных математиков, в том числе Эрмита и Минковского. Развивая исследование Чебышева, они, несколько видоизменяя постановку задачи, получили дальнейшие результаты, прежде всего связанные с оценкой $|y - ax - b| < \frac{2}{x}$ ¹¹. В отличие от чисто арифметических рассмотрений у Чебышева исследование Минковского проводится геометрически. Его рассмотрение задачи Чебышева является одним из лучших примеров использования методов так называемой геометрии чисел¹². Эти методы были введены в математику Минковским одновременно с Воронным.

Последними по теории чисел Чебышев опубликовал за рубежом две небольшие заметки «Обобщение формулы Каталана и вытекающая

¹¹ В письме к Чебышеву от 29 июня 1878 г. Эрмит называет эту оценку «прекрасным и важным результатом» и получает ее иным способом (см. [Ш. Эрмит. Письма к П. Л. Чебышеву.] — В кн.: П. Л. Чебышев. Полн. собр. соч. Т. 5, стр. 432—433). В письме издателю журнала Крелле Борхардту, опубликованном в 88-м томе этого журнала в 1879 г., Эрмит, ссылаясь на личный разговор с Чебышевым, связывает с ним оценку, в которой вместо 2 стоит $\frac{1}{2}$, и приходит сам к оценке

с числовым коэффициентом $\sqrt{\frac{2}{27}}$.

¹² П. Л. Чебышев. Полн. собр. соч. Т. 1, стр. 291 и далее.

из нее арифметическая формула» и «Об одном преобразовании числовых рядов». В первой из них (1876 г.), обобщая формулу Каталана, он приходит к формуле

$$4a \log 2 - \frac{\pi^2}{6} = \frac{4E(a) - (-1)^{E(2a)}}{1^2} - \frac{4E(2a) - (-1)^{E(4a)}}{2^2} + \\ + \frac{4E(3a) - (-1)^{E(6a)}}{3^2} - \dots$$

Вторая заметка (1879 г.) связана с исследованиями Чебышева и Поляньяка о распределении простых чисел, о которых речь шла выше. Основанием для этих исследований являлась формула, связывающая сумму логарифмов всех целых положительных чисел, не превосходящих некоторого числа с суммами логарифмов простых чисел. Эта формула существенно отлична от формулы (Эйлера), связывающей сумму обратных величин степеней всех целых положительных чисел с произведением, распространенным на все простые числа. Чебышев указывает, что обе эти формулы вытекают из равенства

$$\log 2 \cdot f(2) + \log 3 \cdot f(3) + \log 4 \cdot f(4) + \log 5 \cdot f(5) + \dots = \\ = \log 2 \cdot F(2) + \log 3 \cdot F(3) + \log 5 \cdot F(5) + \log 7 \cdot F(7) + \dots;$$

здесь функции f и F удовлетворяют соотношению

$$F(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{m=1}^{m=\infty} f(nx^m)$$

и являются такими, что записанные ряды (слева — по всем целым положительным числам, справа — по всем простым числам) сходятся.

Не все полученные Чебышевым результаты были им опубликованы. Об этом свидетельствуют, например, «Курс анализа» Эрмита и его письма Чебышеву. Эрмит, в частности, указывает¹³ на изучение Чебышевым арифметических свойств рядов $\alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n + \dots$ с рациональными коэффициентами. Чебышев приводит α_n к более простому выражению $\frac{N}{d}$ (p_n — наибольший из простых делителей d ; предел

$\frac{p_n}{n}$ при $n \rightarrow \infty$ — индекс ряда). Сообщенная им Эрмиту теорема утверждает, что всякий ряд с рациональными коэффициентами, получающийся для функции, составленной из конечного числа функций алгебраических, логарифмических и показательных, имеет индексом число конечное. Эрмит пишет также, что Чебышев доказал следующее: $n^2 + 1$ содержит простые множители, беспредельно увеличивающиеся вместе с n (для которых $\frac{p_n}{n} \rightarrow \infty$). Отсюда вытекает, что индекс ряда $\sum \frac{x^n}{n^2+1}$ бесконечен, и этот ряд представляет трансцендентную функцию, которая не может быть получена из сочетания ограниченного числа функций ал-

¹³ Ш. Эрмит. Курс анализа. ОНТИ, М.—Л., 1936, стр. 257—258. [Ш. Эрмит. Письма к П. Л. Чебышеву]. — В кн.: П. Л. Чебышев. Полн. собр. соч. Т. 5, стр. 433—434.

гебраических, показательных и логарифмических. Эрмит в своем курсе привел теорему Чебышева о простых делителях чисел вида $n^2 + 1$ без доказательства. Доказательство было впоследствии восстановлено А. А. Марковым (1895 г.) по найденному среди бумаг Чебышева отрывку и в виде письма Маркова Эрмиту опубликовано в «Докладах Парижской академии наук»¹⁴.

Исследования Чебышева в области теории чисел во многом дополнялись трудами его учеников, прежде всего Золотарева, Коркина, Маркова, позднее — Вороного.

3

Исследования по интегрированию функций

Вопросами интегрирования функций Чебышев занимался на протяжении всей своей творческой деятельности. Его первая работа в этой области — «Заметка об одном классе кратных определенных интегралов» — появилась в журнале Лиувилля (1843 г.). Основным ее содержанием является теорема о том, что

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \varphi_1(x) \varphi_2(x) \varphi_3(x) \dots f(x^m + y^n + z^p + \dots) dx dy dz \dots = \\ = \int_0^\infty \Phi(u) f(u) du,$$

где

$$\Phi(u^2) = \frac{\psi(u\sqrt{-1}) - \psi(-u\sqrt{-1})}{2\pi u^2 \sqrt{-1}},$$

причем

$$\psi(u) = \int_0^\infty e^{-\alpha} \left(\int_0^\infty \varphi_1(x) e^{-\frac{\alpha x^m}{u^2}} dx \times \right. \\ \left. \times \int_0^\infty \varphi_2(y) e^{-\frac{\alpha y^n}{u^2}} dy \int_0^\infty \varphi_3(z) e^{-\frac{\alpha z^p}{u^2}} dz \dots \right) d\alpha.$$

Теорема дана без доказательства. В качестве частных ее случаев получены соответствующие формулы Лиувилля и Коши. Интегралы такого вида применялись к интегрированию уравнений математической физики и поэтому привлекали внимание исследователей.

С идеями Коши связана также «Заметка о сходимости ряда Тейлора» (опубликована в журнале Крелле в 1844 г.), в которой сделана попытка улучшить рассмотрение Коши вопроса о сходимости ряда Тейлора. Эта заметка является единственной в научном творчестве Чебышева работой, где рассмотрены вопросы, непосредственно относящиеся к функциям комплексной переменной. Предположение Коши о том,

¹⁴ П. Л. Чебышев. Полн. собр. соч. Т. 1, стр. 283—284.

что величина интеграла может быть разложена в сходящийся ряд всякий раз, когда разлагается в ряд подынтегральная функция, отмечает Чебышев, оправдывается только в частных случаях. Примечательно, что затронутый им здесь вопрос о возможности почленного интегрирования ряда потребовал для строгого рассмотрения введения понятия равномерной сходимости ряда, что было сделано Зайделем (1848 г.) и Стоксом (1849 г.), а также несколько раньше Вейерштрассом.

Обе заметки являются небольшим эпизодом в творческих исканиях молодого Чебышева. В основном он интересовался вопросом интегрирования в конечном виде алгебраических функций. Рассмотрению этого вопроса для одного частного вида интегралов посвящена работа Чебышева, представленная им Петербургской академии наук в 1843 г. Отзыв на нее должен был дать Остроградский. Судя по всему, он этого не сделал. Во всяком случае, непосредственного научного контакта с Остроградским Чебышеву установить не удалось. Эту работу Чебышев, вероятно, включил в упоминавшуюся выше диссертацию на право преподавания «Об интегрировании с помощью логарифмов» (1847 г.).

В диссертации интегрирование дифференциалов, рациональных относительно квадратного корня рациональной функции x , сведено к нахождению интеграла

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\Theta(x)}},$$

где $\frac{f(x)}{F(x)}$ — несократимая рациональная дробь; $\Theta(x)$ — целая функция, не имеющая кратных множителей. Для интегралов приведенного вида из исследований Абеля (1828 г.) и Лиувилля (1834 г.) было известно, что если такой интеграл приводится к алгебраическим и логарифмическим функциям, то алгебраическая часть интеграла имеет вид $\frac{\Phi(x)}{\Phi_1(x)} \sqrt{\Theta(x)}$, а членами логарифмической части являются слагаемые вида

$$A \log \frac{p + q \sqrt{\Theta(x)}}{p - q \sqrt{\Theta(x)}}.$$

Милостивый Государь

Александр Павлович!

*Позвольте просить Ваше
Превосходительство передать
мое чувствительнейшее благо-
дарность Генералу Учили-
щному Св. Владимира
фа чести, которому они им
оказали любезности в По-
чтенные Учили. Оказав
себя принадлежащие к Ка-
зенному Училищу, стою
много Благодаренный Вам
всегда, им особенно лестно*

*В истинно почтенном
пробавить честь и т.д.*

*Ваше Превосходительство
покорный слуга*

П. Л. Чебышев

*1869 год,
4 марта.*

Факсимиле П. Л. Чебышева.

Здесь $\Phi(x)$, $\Phi_1(x)$, p и q , именно $p_1, q_1, p_2, q_2, \dots, p_r, q_r$ — целые функции; $A_1, A_2, \dots, A_r$ — постоянные, причем если логарифмическая часть сведена к наименьшему числу слагаемых, то уравнение $k_1 A_1 + k_2 A_2 + \dots + k_r A_r = 0$ не выполняется, какие бы ни были действительные рациональные числа $k_1, k_2, \dots, k_r$.

Как отмечалось выше, в предположении, что логарифмическая часть является нулевой, задача была вполне решена Остроградским и Лиувиллем. Внимание Чебышева привлекает общий случай. В диссертации рассмотрены определение алгебраической части интеграла и правила ее нахождения с помощью доказанных теорем. При невыполнимости какого-либо одного из этих правил интеграл нельзя выразить алгебраическими и логарифмическими функциями, например в случаях

$$\int \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(x-e)(x-f)(x-g)(x-h)}} \text{ и } \int \frac{x-a}{x-c} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(x-c)(x-e)(x-f)(x-g)}},$$

когда a и b не равны c, e, f, g, h , а последние числа все различны. Указанный Чебышевым обширный класс интегралов, не приводящихся к алгебраическим и логарифмическим функциям, существенно отличен от класса, открытого ранее Лиувиллем. Предложенные Чебышевым правила нахождения алгебраической части интеграла подобны тем, которые установил Остроградский для интегрирования рациональных функций в алгебраических.

Чебышеву удалось найти правило и для решения более трудной задачи нахождения логарифмической части интеграла. Существенную часть этого правила составляет определение целого числа n и целых функций p, q , удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{p + q \sqrt{\Theta(x)}}{p - q \sqrt{\Theta(x)}} = T \frac{(x-a)^n (x-b)^{\beta} \dots (x-l)^{\lambda}}{(x-s)^{\alpha} \dots (x-y)^{\eta}}, \text{ степень } \frac{p + q \sqrt{\Theta(x)}}{p - q \sqrt{\Theta(x)}} = 0,$$

где T — неизвестная функция, которая сохраняет конечную величину при конечном x ; дробь $\frac{p + q \sqrt{\Theta(x)}}{p - q \sqrt{\Theta(x)}}$ никогда не обращается в $\frac{0}{0}$;

$\beta, \dots, \lambda, \alpha, \dots, \eta$ — рациональные положительные числа; числа $a, b, \dots, l, s, \dots, y$ все различны и не обращают $\Theta(x)$ в нуль. Эта задача решается в заключительной части диссертации с привлечением разложений рациональных функций в непрерывные дроби. Предложенный Чебышевым метод в некоторых случаях приводит к методу Абеля, который был дан последним без доказательства для частного случая интегралов рассматриваемого вида.

Диссертация Чебышева, являющаяся важным этапом его творческого пути, оставалась ненапечатанной до 1930 г.¹⁵ Содержание ее свидетельствует о влиянии на развитие научной деятельности молодого Чебышева работ Остроградского, Абеля и Лиувилля, тематика же определила одно из основных направлений последующего научного твор-

¹⁵ П. П. Чебышев. Полн. собр. соч. Т. 5, стр. 88—145.

чества Чебышева с характерными для него чисто алгоритмическими методами в духе Эйлера и Лежандра.

Развитием результатов диссертации «Об интегрировании помощью логарифмов» Чебышев по совету Лиувилля и Эрмита занялся в 1852 г. в Париже. В 1853 г. в журнале Лиувилля он опубликовал работу «Об интегрировании иррациональных дифференциалов». В этом классическом сочинении — основном его исследовании по интегрированию алгебраических функций — изучается вопрос об интегрировании в алгебраических и логарифмических функциях выражения

$$\frac{f_0(x)}{F_0(x)} \cdot \frac{dx}{\sqrt[m]{\Theta(x)}},$$

где $f_0(x)$, $F_0(x)$, $\Theta(x)$ — целые функции x . Задачу Чебышев решает в той же последовательности и в основном с помощью тех же средств, что и в упомянутой диссертации, посвященной частному случаю, когда $m = 2$. Прежде всего он формулирует правила выделения алгебраической части интеграла, аналогичные правилам для случая $m = 2$. Затем дает широкое обобщение исследований Абеля, развивает его идеи и методы, особенно при изучении вопроса о логарифмических членах интеграла, ссылаясь при этом на оставленную Абелем без доказательства следующую теорему: если интеграл вида $\int \frac{\rho dx}{\sqrt{R}}$, в котором ρ и R — целые функции x , выражается логарифмами, то его всегда можно представить в виде

$$\int \frac{\rho dx}{\sqrt{R}} = A \log \frac{p + q \sqrt{R}}{p - q \sqrt{R}},$$

где A — постоянная; p и q — целые функции x (при этом многочлены p и q удовлетворяют уравнению $p^2 - q^2 R = C$, где C — постоянная величина).

Результаты изучения вопроса о логарифмических членах Чебышев подытоживает в таких теоремах.

Пусть $\frac{f(x)}{F(x)}$ — рациональная дробь, а $\Theta(x)$ — полином, все корни которого имеют кратность, меньшую m . Если выражение интеграла

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} \cdot \frac{dx}{\sqrt[m]{\Theta(x)}}$$

в конечном виде содержит только логарифмические члены, то этот интеграл равен сумме членов вида

$$A \log \left[\varphi \left(\sqrt[m]{\Theta(x)} \right) \varphi^\alpha \left(\alpha \sqrt[m]{\Theta(x)} \right) \varphi^{\alpha^2} \left(\alpha^2 \sqrt[m]{\Theta(x)} \right) \dots \varphi^{\alpha^{m-1}} \left(\alpha^{m-1} \sqrt[m]{\Theta(x)} \right) \right],$$

где $\varphi \left(\sqrt[m]{\Theta(x)} \right)$ — целая функция x и $\sqrt[m]{\Theta(x)}$; α — первообразный корень уравнения $x^m - 1 = 0$. Число таких членов, достаточное для получения выражения рассматриваемого интеграла, не превышает степени функ-

ции $F(x)$, если степень функции $\frac{f(x)}{F(x)^m \sqrt[m]{\Theta(x)}}$ ниже -1 , в противном случае число таких членов превзойдет степень $F(x)$ только на единицу¹⁶.

Частным случаем этой теоремы при $F(x) = 1$ является следующее утверждение: если $f(x)$ и $\Theta(x)$ — целые функции ($\Theta(x)$ разлагается на множители кратностей не выше m) и если интеграл $\int \frac{f(x)}{m \sqrt[m]{\Theta(x)}} dx$ выражается только логарифмическими членами, то он может быть приведен к виду

$$A \log \left[\varphi \left(\sqrt[m]{\Theta(x)} \right) \varphi^\alpha \left(\alpha \sqrt[m]{\Theta(x)} \right) \varphi^{\alpha^2} \left(\alpha^2 \sqrt[m]{\Theta(x)} \right) \dots \varphi^{\alpha^{m-1}} \left(\alpha^{m-1} \sqrt[m]{\Theta(x)} \right) \right],$$

где $\varphi(\sqrt[m]{\Theta(x)})$ — целая функция от x и $\sqrt[m]{\Theta(x)}$; α — первообразный корень уравнения $x^m - 1 = 0$. Частным случаем этой теоремы при $m = 2$ является приведенная выше теорема Абеля.

Наконец, третья теорема Чебышева состоит в следующем: интеграл $\int \frac{f(x)}{m \sqrt[m]{\Theta(x)}} dx$ не приводится к функциям алгебраической и логарифмической, если $\Theta(x)$ не имеет кратных множителей степени выше $m - 1$ и если степень функции $f(x)$ ниже степени $\frac{m \sqrt[m]{\Theta(x)}}{x}$. При $m = 2$ эта теорема приводит к теореме Лиувилля, из которой, в частности, следует, что эллиптический интеграл первого рода

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

не может быть выражен в конечном виде в элементарных функциях и, следовательно, является новой трансцендентной функцией. Чебышев показывает также, как получить уравнения, определяющие каждый из логарифмических членов.

Свои общие теоремы Чебышев применяет к интегрированию дифференциальных биномов $x^s (a + bx^{s'})^{s''} dx$ (s, s', s'' — рациональные числа), интеграл которых легко приводится к виду $\int x^{p-1} (1 + x^q)^{\frac{m'}{m}} dx$, где p, q, m, m' — целые числа и $q > 0$. Со времен Ньютона (1676 г.) и Эйлера (1768 г.) было известно, что этот интеграл выражается в конечном виде элементарными функциями, если одно из двух чисел $\frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \frac{m'}{m}$ является целым (кроме очевидной интегрируемости при целом $\frac{m'}{m}$). Эйлер высказал утверждение, что указанные условия исчерпывают случаи интегрируемости в конечном виде. Это утверждение чрезвычайно просто на основе своих результатов до-

¹⁶ Степенью алгебраической функции y Абель называл значение показателя α , при котором отношение $\frac{y}{x^\alpha}$ будет конечным в случае бесконечно большого x .

казал Чебышев. Из его теоремы следует, что во всех остальных случаях $\int x^{p-1} (1+x^q)^{\frac{m'}{m}} dx$ представляет особенную трансцендентную функцию. «По важности и по общности полученного результата теорема Чебышева может быть поставлена в одном ряду с классическими алгебраическими теоремами о невозможности алгебраического решения различных классов алгебраических уравнений и геометрическими теоремами о неразрешимости при помощи циркуля и линейки различных классов задач на построение»¹⁷.

Свой общий метод для нахождения алгебраической части в выражении интеграла от иррационального выражения и для определения отдельно всех логарифмических его членов Чебышев конкретизировал и развил прежде всего применительно к самому простому и наиболее интересному случаю интегрирования дифференциалов, содержащих квадратный корень из многочлена третьей или четвертой степени. В работе «Об интегрировании дифференциалов, содержащих квадратный корень из многочлена третьей или четвертой степени» (1854, 1857 гг.) вместо частных методов и проб различных преобразований он предложил общий и прямой способ, по которому вопрос о выражении

$$\int \frac{f_0(x)}{F_0(x)} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\Theta(x)}}$$

в конечном виде при $\Theta(x) = x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \lambda$ (эллиптического интеграла) сводится к решенной Абелем задаче о нахождении всех дифференциалов вида $\frac{p dx}{\sqrt{R}}$, где p и R — целые функции x , интегралы кото-

рых могут выражаться в виде $\log \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}}$. Чебышев сосредоточивает внимание на исследовании уравнений, аналогичных уравнениям для определения числа n и функций p и q (о них речь шла при рассмотрении диссертации «Об интегрировании помощью логарифмов»). Он дает метод преобразования таких уравнений, позволяющий свести их к более простым уравнениям. Если $\Theta(x)$ — многочлен третьей или четвертой степени, решение может быть получено по Абелю путем разложения $\sqrt{\Theta(x)}$ в непрерывную дробь. В случае, если эта непрерывная дробь является периодической, интегрирование в конечном виде возможно, в противном случае — невозможно. При этом Чебышев выделяет случай, когда периодичность указанной непрерывной дроби невозможна, а значит, невозможно и интегрирование в конечном виде. Метод Чебышева приводит к сближению построения иррациональных величин посредством линейки и циркуля и интегрирования дифференциалов в конечном виде, т. е. к сближению древнейшей классической задачи геометрии и важной задачи анализа.

¹⁷ [В. В. Г о л у б е в. Комментарии к работам П. Л. Чебышева по интегрированию алгебраических функций]. — В кн.: П. Л. Ч е б ы ш е в. Полн. собр. соч. Т. 2, стр. 488.

Дальнейшее исследование Чебышевым псевдоэллиптичности интегралов указанного вида резюмировано в заметке «Об интегрировании иррациональных дифференциалов», опубликованной в 1860 г. в «Докладах Парижской академии наук», и несколько подробнее в заметке «Об интегрировании дифференциала

$$\frac{x + A}{\sqrt{x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta}} dx,$$

появившейся в научном бюллетене Петербургской академии наук в 1861 г. Внимание автора сосредоточено на вопросе интегрируемости в конечном виде дифференциала указанного вида в предположении, что все множители, на которые можно разложить $x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, различны. Своим исследованием Чебышев существенно дополняет метод Абеля, указывая в случае рациональных $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ предел для числа операций, произведя которые можно установить, будет ли соответствующая непрерывная дробь непериодической. Тем самым посредством конечного числа алгебраических действий при известной величине A либо соответствующий интеграл выражается в конечном виде, либо устанавливается, что это невозможно ни при какой величине A .

В первой заметке приводится без доказательства следующая теорема. Если в дифференциале

$$\frac{x + A}{\sqrt{x^4 + px^2 + qx + r}} dx$$

в многочлене $x^4 + px^2 + qx + r$ коэффициенты — целые числа и этот многочлен не разложим на линейные множители при помощи одних квадратных радикалов, то дифференциал не может быть интегрирован в конечном виде, каково бы ни было значение A , коль скоро в непрерывной дроби, происходящей от разложения радикала $\sqrt{x^4 + px^2 + qx + r}$, ни один из $2N - 1$ первых знаменателей не будет многочленом второй степени. При этом N означает число целых решений уравнений

$$\begin{aligned} y^2 - 3xz &= p^2 + 12r, \\ z^2 (4x^3z - x^2y^2 - 18xyz + 4y^3 + 27z^2) &= (4p^3 + 27q^2)q^2 - \\ &- 16[(p^2 - 4r)^2 + 9pq^2]r. \end{aligned}$$

В противном случае при некотором значении A выполняется равенство

$$\int \frac{x + A}{\sqrt{x^4 + px^2 + qx + r}} dx = \frac{1}{2\lambda} \log \frac{\varphi(x) + \sqrt{x^4 + px^2 + qx + r}}{\varphi(x) - \sqrt{x^4 + px^2 + qx + r}},$$

где $\varphi(x)$ — подходящая дробь, которую получим, когда при разложении в непрерывную дробь радикала $\sqrt{x^4 + px^2 + qx + r}$ остановимся на первом знаменателе второй степени; λ — степень числителя этой подходящей дроби. Число N не превосходит взятого 12 раз числа квадратных делителей выражения $(4p^3 + 27q^2)q^2 - 16[(p^2 - 4r)^2 + 9pq^2]r$.

Во второй заметке рассматриваемый интеграл сводится к виду

$$\int \frac{z + B}{\sqrt{z^4 - lz^3 + mz^2 + nz}} dz,$$

где l, m, n — целые числа. Система неопределенных уравнений для определения N несколько видоизменяется. Вместе с тем даны общие указания относительно метода доказательства теоремы, основанного на последовательном применении двух специальных преобразований исходного интеграла; подробно рассмотрены два числовых примера. Другим методом теорема Чебышева вскоре была доказана Е. И. Золотаревым.

Продолжая исследования по интегрированию алгебраических функций, Чебышев опубликовал работы «Об интегрировании дифференциалов, содержащих кубический корень» (1865 г.) и «Об интегрировании простейших дифференциалов, содержащих кубический корень» (1867 г.). Основная трудность задачи состоит в определении логарифмических членов интеграла. В случае радикалов высших степеней каждый из логарифмических членов содержит более двух неизвестных функций, следовательно, способ непрерывных дробей, использованный Абелем в случае квадратных радикалов, оказывается неприменимым. Вместо него Чебышев предлагает другой способ, развивая его применительно к радикалам третьей степени.

Предполагая, что $\int \frac{\rho}{\sqrt[3]{R}} dx$ (ρ и R — многочлены, причем $\sqrt[3]{R}$ не имеет рационального делителя) не содержит алгебраической части, Чебышев принимает

$$\int \frac{\rho}{\sqrt[3]{R}} dx = K \log [\varphi(\sqrt[3]{R}) \varphi^\alpha(\alpha \sqrt[3]{R}) \varphi^{\alpha^2}(\alpha^2 \sqrt[3]{R})],$$

где $\varphi(\sqrt[3]{R})$ — многочлен относительно x и $\sqrt[3]{R}$; K — постоянное; α — первообразный корень уравнения $\alpha^3 - 1 = 0$. Он показывает, что нахождение логарифмического члена сводится к определению из уравнения $\varphi(\sqrt[3]{R}) \varphi(\alpha \sqrt[3]{R}) \varphi(\alpha^2 \sqrt[3]{R}) = C$ (C — постоянное) функции $\varphi(\sqrt[3]{R})$ в виде $X + Y \sqrt[3]{R_1 R_2^2} + Z \sqrt[3]{R_1^2 R_2}$, где X, Y, Z — многочлены; R_1 и R_2 состоят из различных линейных множителей, таких, что $R = R_1 R_2^2$. Изложение способа нахождения решения такого уравнения составляет основную часть работы 1865 г.

В работе 1867 г. приведены без доказательства результаты применения развитого Чебышевым способа к интегралу

$$\int \frac{\rho}{\sqrt[3]{x^3 + ax + b}} dx,$$

где ρ — постоянное. Для возможности выражения этого интеграла в конечном виде необходимо, чтобы по крайней мере одно из уравнений

$$X^3 = \frac{27}{4} \cdot \frac{b^2}{a^2} + 1, \quad 3 \left(\frac{b^2}{a^3} \right)^2 X^4 + 6 \frac{b^2}{a^3} (X^2 + 2X) = 1$$

могло удовлетворяться такой величиной X , которая выражается рационально через $\frac{b^2}{a^3}$. В частности, если $\frac{b^2}{a^3}$ рационально, то необходимо, чтобы по крайней мере одно из этих уравнений имело рациональный корень. В противном случае интеграл не выражается в конечном виде.

Неизвестно, было ли в дальнейшем кем-нибудь дано доказательство этой теоремы Чебышева.

В начале 70-х годов внимание Чебышева привлекла формула Эрмита для приближенного вычисления интеграла

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

В нее в отличие от формулы Гаусса все значения функции $\varphi(x)$ входят с одним и тем же коэффициентом. В статье «О квадратурах», опубликованной в журнале Лиувилля (1874 г.), Чебышев занялся отысканием таких формул. Он прежде всего предложил формулу

$$\int_{-1}^{+1} F(x) \varphi(x) dx = k [\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \dots + \varphi(x_n)],$$

где величины $k, x_1, x_2, \dots, x_n$ определяются так, чтобы она была как можно более точной, а именно, чтобы она была точной с учетом членов, содержащих n первых производных функции $\varphi(x)$ (иными словами, точной для многочленов степени не большей n). Используя разложение $\int_{-1}^{+1} \frac{F(x)}{z-x} dx$ в ряд по возрастающим степеням $\frac{1}{z}$, Чебышев находит, что

$$k = \frac{1}{n} \int_{-1}^{+1} F(x) dx.$$

Этот интеграл считается отличным от нуля. Для многочлена $f(z) = (z - x_1)(z - x_2) \dots (z - x_n)$ получается формула

$$f(z) = CEe^{\frac{1}{h} \int_{-1}^{+1} F(x) \log(z-x) dx},$$

где C — постоянная; E — целая часть функции, стоящей под этим знаком. Отсюда при $F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ Чебышев приходит к формуле Эрмита, для которой получает $k = \frac{\pi}{n}$ и

$$f(z) = E \left(\frac{z + \sqrt{z^2 - 1}}{2} \right)^n = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos z),$$

следовательно, здесь $x_1, x_2, \dots, x_n$ оказываются корнями полинома n -ой степени, наименее уклоняющегося от нуля (полинома Чебышева). Особое внимание Чебышев уделяет случаю $F(x) = 1$, который дает для

$\int_{-1}^{+1} \varphi(x) dx$ формулу квадратур, отличную от формулы Гаусса. Он получает $k = \frac{2}{n}$ и

$$f(z) = Ez^n e^{-\frac{n}{2 \cdot 3z^2} - \frac{n}{4 \cdot 5z^4} - \frac{n}{6 \cdot 7z^6} - \dots}.$$

В случае $\int_{-1}^1 F(x) dx = 0$ Чебышев приходит к квадратурной формуле вида

$$\int_{-1}^1 F(x) \varphi(x) dx = k [\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \dots + \varphi(x_m) - \varphi(x_{m+1}) - \varphi(x_{m+2}) - \dots - \varphi(x_{2m})].$$

В качестве примеров им получены формулы при $F(x) = x$ и $F(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ с двумя и четырьмя членами, указаны применения к прибли-

женному вычислению интеграла $\int_0^\pi \cos \Theta \varphi(\cos \Theta) d\Theta$ и вообще интеграла

$$\int_0^\pi \cos l\Theta \varphi(\cos \Theta) d\Theta, \text{ выражающего коэффициенты разложения } \varphi(\cos \Theta)$$

в ряд по косинусам.

Эта единственная работа Чебышева по численному интегрированию привлекла внимание многих ученых. Изучение вопросов численного интегрирования успешно продолжили его ученики К. А. Поссе и особенно А. А. Марков. Их работы в этом направлении тесно связаны с изучением предельных величин интегралов, начало которому было положено работой Чебышева «О предельных величинах интегралов» (1874 г.), первой его работой, посвященной разработке метода, названного впоследствии методом моментов. Появление этого метода Чебышев связывает с именем французского математика И. Ж. Бьенэме (1796—1878).

В рассматриваемой работе Чебышев задается величинами интегралов

$$\int_a^b f(x) dx, \int_a^b x f(x) dx, \int_a^b x^2 f(x) dx, \dots, \int_a^b x^m f(x) dx,$$

где $a < u$ и $b < v$, $f(x)$ положительна между пределами интегрирования, с целью получения всех возможных сведений о предельной величине интеграла $\int_u^v f(x) dx$. Он связывает поставленную задачу с раз-

ложением интеграла $\int_a^b \frac{f(x)}{z-x} dx$ в непрерывную дробь и в качестве примера приводит без доказательства следующую теорему: если $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ есть одна из подходящих дробей разложения $\int_a^b \frac{f(x)}{z-x} dx$

в непрерывную дробь

$$\frac{1}{\alpha z + \beta} + \frac{1}{\alpha_1 z + \beta_1} + \frac{1}{\alpha_2 z + \beta_2} + \dots$$

и если $z_1, z_2, \dots, z_k, z_{k+1}, \dots, z_{l-1}, z_l, \dots, z_n$ суть корни уравнения $\psi(z)=0$, расположенные в порядке возрастания, то при положительной функции $f(x)$ между $x=a$ и $x=b$ величина интеграла $\int_{z_k}^{z_l} f(x) dx$ превышает сумму

$$\frac{\varphi(z_{k+1})}{\psi'(z_{k+1})} + \frac{\varphi(z_{k+2})}{\psi'(z_{k+2})} + \dots + \frac{\varphi(z_{l-2})}{\psi'(z_{l-2})} + \frac{\varphi(z_{l-1})}{\psi'(z_{l-1})}$$

и остается меньше суммы

$$\frac{\varphi(z_k)}{\psi'(z_k)} + \frac{\varphi(z_{k+1})}{\psi'(z_{k+1})} + \dots + \frac{\varphi(z_{l-1})}{\psi'(z_{l-1})} + \frac{\varphi(z_l)}{\psi'(z_l)}.$$

Как пример задач, решаемых этим способом, Чебышев указывает задачу механики об оценке веса материальной прямой с неизвестной переменной плотностью на тех или иных ее отрезках.

Вопросы интегрирования функций, близко стоящие к изучению предельных величин интегралов, Чебышев рассмотрел в работах «О приближенных выражениях одних интегралов через другие, взятые в тех же пределах» (1882 г.) и «Об одном ряде, доставляющем предельные величины интегралов при разложении подынтегральной функции на множители» (1883 г.). Они посвящены изучению дополнительного члена R_n в разложении

$$\int_a^b uv \vartheta dx = \frac{\int_a^b u \psi_0 \vartheta dx \int_a^b v \psi_0 \vartheta dx}{\int_a^b \psi_0^2 \vartheta dx} + \dots + \frac{\int_a^b u \psi_{n-1} \vartheta dx \int_a^b v \psi_{n-1} \vartheta dx}{\int_a^b \psi_{n-1}^2 \vartheta dx} + R_n,$$

где u, v — некоторые функции, ϑ — положительна между $x=a$ и $x=b$; полиномы $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$ являются знаменателями подходящих дробей интеграла

$$\int_a^b \frac{\vartheta(z)}{x-z} dz,$$

получаемых разложением последнего в непрерывную дробь, так что $\int_a^b \psi_m \psi_n \vartheta dx = 0$ при $m \neq n$.

Частным случаем полученных результатов является утверждение Чебышева о том, что $\int_0^1 u(x) v(x) dx > \int_0^1 u(x) dx \int_0^1 v(x) dx$, если функ-

ции u и v возрастают между пределами интегрирования. Такое утверждение впервые появилось во втором издании литографированного «Курса анализа» Эрмита с доказательством Пикара. Этот круг вопросов привлекал также внимание К. А. Поссе, А. Н. Коркина и других ученых.

Подробное исследование предельных величин отношения $\frac{\int_{-1}^{+1} Y u dx}{\int_{-1}^{+1} Y v dx}$ к $\int_{-1}^{+1} Y v dx$, где Y и v положительны между пределами интегрирования, причем Y является полиномом степени не выше n , проведено Чебышевым в статье «Об отношении двух интегралов, распространенных на одни и те же величины переменной» (1883 г.). Он сводит вопрос к задаче нахождения среди полиномов данной степени, удовлетворяющих уравнению $\int_{-1}^{+1} Z^2 \Theta(x) dx = 1$, таких полиномов, при которых интеграл $\int_{-1}^{+1} Z^2 \Theta_0(x) dx$ достигает самой большой или самой малой величины, причем

$$\Theta_0(x) = (1+x)^\rho (1-x)^{\rho_0} \text{ и } \Theta(x) = (1+x)^\rho (1-x)^{\rho_0} v,$$

где $\rho = 0$ или $\rho = 1$ и $\rho_0 = 0$ или $\rho_0 = 1$; Z — такой полином, что выражение $Z^2 (1+x)^\rho (1-x)^{\rho_0}$ имеет степень не выше n . Решение этой задачи Чебышев получает, используя разложение интеграла

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\Theta_0(z) - \lambda \Theta(z)}{x-z} dz$$

в непрерывную дробь, а также его разложение в ряд по отрицательным убывающим степеням x . Результаты конкретизируются для случаев $\Theta_0(x) = x\Theta(x)$, $\Theta(x) = 1$ и соответственно $u = xv$, а затем $v = 1$. Доказана следующая теорема: если Y есть полином степени не выше n , не изменяющий своего знака между $x = -1$, $x = +1$, то числовая ве-

личина отношения $\frac{\int_{-1}^{+1} Y x dx}{\int_{-1}^{+1} Y dx}$ к $\int_{-1}^{+1} Y dx$ не превосходит наибольшего корня уравнения $X_{l+1} = 0$ или $X_{l+1} + X_l = 0$, в зависимости от того, будет n равно $2l$ или $2l - 1$; при этом X_{l+1} , X_l — полиномы Лежандра степеней $l+1$, l .

Доказательство неравенств Чебышева о предельных величинах интегралов было дано в 1883 г. А. А. Марковым и почти одновременно с ним Стильтесом. Внимание Маркова на этот вопрос обратил К. А. Поссе, получивший решение для некоторых случаев. Свои формулы для ре-

шения вопроса о предельных величинах интеграла $\int_a^b f(x) dx$ Чебышев дал в статье «О представлении предельных величин интегралов посредст-

вом интегральных вычетов» (1885 г.). Сначала он записывает неравенства из своей работы 1874 г. в виде

$$E_{z_l+\omega}^{z_n-\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)} \leq \int_{z_l}^{z_n} f(x) dx \leq E_{z_l-\omega}^{z_n+\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},$$

где выражения слева и справа, называемые интегральными вычетами, являются суммами вычетов функции $\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}$ относительно корней уравнений $\psi_m(z) = 0$, заключающихся в пределах от $z_l + \omega$ до $z_n - \omega$ и от $z_l - \omega$ до $z_n + \omega$ (где ω — положительная бесконечно малая величина), т. е. относительно $z_l + 1, z_l + 2, \dots, z_n - 1$ и $z_l, z_l + 1, \dots, z_n$, соответственно. Затем, пользуясь интегральными вычетами, приводит аналогич-

ные неравенства для $\int_a^v f(x) dx$ и получает из них как свои первоначаль-

ные неравенства, так и решение поставленной им в 1874 г. механической задачи. В заключение он отмечает, что в таком же виде с помощью интегральных вычетов можно записать и предельные величины для ин-

теграла $\int_a^b f(x) \Theta(x) dx$, в котором функция $\Theta(x)$ такова, что ее производ-

ная некоторого порядка не меняет своего знака между a и b и что

можно найти предельные величины $\int_u^v f(x) dx$, каковы бы ни были

u и v , если только в данных интегралах один из пределов равен $\pm \infty$ (моменты определяются для бесконечного промежутка).

Подробное исследование по определению нижних и верхних пределов в рассматриваемых неравенствах Чебышев продолжил в работе «Об интегральных вычетах, доставляющих приближенные величины интегралов» (1887 г.)¹⁸. Здесь он особо останавливается на случае $a = -\infty, b = +\infty$,

$$f(x) = \frac{q}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{q^2}{2} x^2},$$

имея в виду получение теоремы, важной в теории вероятностей.

Как показано в статье Чебышева «О разложении функций одной переменной» (1859 г.), в данном случае

$$\psi_l(z) = e^{\frac{q^2}{2} z^2} \frac{d^l e^{-\frac{q^2}{2} z^2}}{dz^l}$$

и $\psi_l(z)$ (полиномы Чебышева — Эрмита) могут быть последовательно найдены по уравнению $\psi_l(z) = -q^2 z \psi_{l-1}(z) - (l-1)q^2 \psi_{l-2}(z)$ с учетом, что $\psi_0(z) = 1$ и $\psi_1(z) = -q\sqrt{2}z$. Чебышев проводит тонкие

¹⁸ На французском языке статья вскоре появилась в «Acta mathematica».

оценки и получает такую теорему. Если функция $f_1(x)$, оставаясь положительной, дает

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) dx &= 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x) dx = \frac{1}{q^2}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_1(x) dx &= 0, \dots, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-2} f_1(x) dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-3)}{q^{2m-2}} \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f_1(x) dx = 0, \end{aligned}$$

то величина интеграла $\int_{-\infty}^v f_1(x) dx$ заключается в пределах

$$\begin{aligned} \text{и} \quad & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{2}} e^{-x^2} dx - \frac{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2+1)^3}{2(m-3)^3\sqrt{m-1}} \\ & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{2}} e^{-x^2} dx + \frac{3\sqrt{3}(m^2-2m+3)^{\frac{3}{2}}(q^2v^2+1)^3}{2(m-3)^3\sqrt{m-1}}. \end{aligned}$$

Найденная им оценка была заменена Н. Я. Сониным (1892 г.) более простой и более точной. Для Чебышева главным в оценке было ее стремление к нулю при неограниченном возрастании m ; именно это-её свойство он использовал в рассуждениях при доказательстве предельной теоремы теории вероятностей (1887 г.).

Приведенная теорема показывает, что Чебышев допускал возможность, что две функции могут иметь одинаковые величины A_l при $l = 0, 1, 2 \dots$ (одинаковые моменты любого порядка) и все же быть различными. В сохранившемся наброске оставшейся незавершенной заметки он приводит пример отличной от нуля в промежутке от 0 до ∞

функции $\varphi(x)$, для которой $\int_0^{\infty} x^n \varphi(x) dx = 0$ при n , являющемся целым положительным числом или нулем, а именно для функции ¹⁹

$$\varphi(x) = e^{-\sqrt[4]{x}} \sin \sqrt[4]{x}.$$

Этот пример, подтверждающий высказанную мысль для бесконечного промежутка (для конечного промежутка однозначность, как показал Лиувиль, имеет место), опубликован впервые Стильтесом в известном сочинении «Исследования о непрерывных дробях» (1894—1895 гг.) ²⁰ и, судя по всему, построен им независимо от Чебышева. Ис-

¹⁹ П. Л. Чебышев. Полн. собр. соч. Т. 5, стр. 172.

²⁰ Т. И. Стильтес. Исследования о непрерывных дробях. Харьков — Киев, 1936.

следования Стилтеса по рассматриваемому кругу вопросов неоднократно перекрещивались с исследованиями Чебышева и Маркова. Последние рассматривали случаи интеграла и суммы, сводя с помощью предельного перехода один из них к другому, Стилтес же в упомянутом сочинении явно ввел обобщенное понятие интеграла, названного впоследствии интегралом Стилтеса. Это позволило единообразно трактовать как непрерывный, так и дискретный случай, обогатило математический анализ важным средством исследования, получившим широкие применения в математике. Общепринятой стала и терминология, введенная Стилтесом (он назвал величины A_i моментами соответствующего порядка). Основное внимание Стилтес уделил промежутку $(0, \infty)$. Широко используя в своих работах непрерывные дроби, он развил исследования Чебышева и других ученых о свойствах интегралов с помощью разложения их в непрерывные дроби. Разработанному главным образом Чебышевым методу моментов Стилтес придал вид, в котором в основном он используется и в настоящее время.

К рассмотренной работе Чебышева примыкает его заметка «О суммах, составленных из коэффициентов рядов с положительными членами» (1887 г.), появившаяся в журнале «Acta mathematica» в виде письма к С. В. Ковалевской. В ней указано, что если при $t > 0$ определена

функция $\Phi(t) = \int_0^{\infty} e^{-tz} F(z) dz$, обращающаяся в бесконечность при $t = 0$, причем $F(z)$ — некоторая неотрицательная функция при $z > 0$, то справедливы неравенства

$$-\frac{\Phi''(\rho)}{\Phi'(\rho)} \int_0^{\rho} F(z) dz \geq \Phi(\rho) - \frac{[\Phi'(\rho)]^2}{\Phi''(\rho)}, \quad \frac{1}{\sigma} \log \frac{\Phi(\sigma)}{\Phi(2\sigma)} \int_0^{\sigma} F(z) dz \leq \frac{\Phi^2(\sigma)}{\Phi(2\sigma)},$$

где ρ, σ — какие-нибудь положительные величины. С помощью этих неравенств легко найти предельные величины интеграла $\int_0^u F(z) dz$.

Их можно использовать для определения пределов, между которыми остается сумма первых n коэффициентов рядов с положительными членами. Это приложение предельных величин интегралов осталось у Чебышева лишь намеченным.

С изучением предельных значений интегралов и сумм тесно связаны последние работы Чебышева — «О суммах, составленных из значений простейших одночленов, умноженных на функцию, которая остается положительною» (1891 г.), «О разложении в непрерывную дробь рядов, расположенных по нисходящим степеням переменной» (1892 г.) и «О суммах, зависящих от положительных значений какой-нибудь функции» (1895 г.). В них Чебышев отдает предпочтение рассмотрению сумм, отмечая вместе с тем, что можно получить при этом для предельных величин интегралов.

Переход от сумм к интегралам (и наоборот) при изучении их предельных величин для Чебышева и его учеников представляется само

собой разумеющимся; в последних своих работах Чебышев видоизменяет постановку основного вопроса о предельных величинах: заменяет равенства $\int_a^b x^r f(x) dx = c_r$ неравенствами $c'_r < \int_a^b x^r f(x) dx < c''_r$, где разности $c''_r - c'_r$ весьма малы. Результаты его последней работы можно рассматривать как вывод некоторых пределов для интегралов $\int_u^\infty f(x) dx$ или $\int_0^u f(x) dx$ при условиях, что

$$c_r - \frac{h^r}{H_0} < \int_0^\infty x^r f(x) dx < c_r + \frac{h^r}{H_0}$$

($r = 0, 1, 2, \dots, l-1$). Эти довольно сложные ограничения предопределяют возможность системы значений $\int_0^\infty f(x) dx, \int_0^\infty xf(x) dx, \dots,$

$\int_0^\infty x^{l-1}f(x) dx$, удовлетворяющих указанным неравенствам. На необходимость видоизменения постановки вопроса Чебышева навели его рассуждения о доказательстве основной предельной теоремы теории вероятностей (1887 г.). Марков продолжил изучение этого вопроса в видоизмененной постановке. Однако не соответствующие результаты в этом направлении, а сам метод (метод моментов), разработанный Чебышевым, привел Маркова к полному доказательству (1898 г.) основной предельной теоремы теории вероятностей со всей необходимой строгостью.

Среди рассмотренных работ Чебышева по вопросам интегрирования функций особое место занимают исследования об интегрировании алгебраических функций в конечном виде и о предельных величинах интегралов. Эти исследования являются весомым вкладом в развитие математического анализа, их результаты сохраняют свое значение и в настоящее время. Вопросы интегрирования алгебраических функций в конечном виде из-за их чрезвычайной трудности после Чебышева почти не изучались. Работы же о предельных величинах интегралов привели Чебышева к созданию нового метода исследования в математике — метода моментов. Используя его, он создал основополагающие труды по теории вероятностей. В них им получены теоретические результаты первостепенной важности, которые привели в дальнейшем к преобразованию самой теории вероятностей. Развитие и применения этого важного метода привлекали и продолжают привлекать внимание многих ученых.

Работы по теории вероятностей

Еще в магистерской диссертации Чебышева «Опыт элементарного анализа теории вероятностей» (1845 г.) отчетливо проявились его установки в вопросах развития этой науки: точная формулировка общих теорем теории вероятностей и их доказательство с выдвижением на первый план неравенств и оценки погрешности предельных формул. Здесь же он дал простое и строгое широко доступное изложение теории вероятностей. Вместо интеграла вероятности Чебышев пользуется функцией

$$T(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}10^{13}} \sum_{k=0}^{10^{13}-1} e^{-\left(z + \frac{k}{10^{13}}\right)^2}.$$

Доказательство закона больших чисел (теоремы Пуассона) дано им только для случая ограниченного числа различных вероятностей. Правда, продолжая свои поиски, Чебышев вскоре нашел общее элементарное доказательство теоремы. Статья «Элементарное доказательство одного общего предложения теории вероятностей» была напечатана в журнале Крелле в 1846 г. В доказательстве существенную роль играет полученное им неравенство для величины P_m — вероятности того, что событие E случится не менее m раз в μ испытаниях, в каждом из которых вероятность этого события есть $p_1, p_2, \dots, p_\mu$, соответственно. Это неравенство записывается в виде

$$P_m < \frac{1 \cdot 2 \dots \mu}{1 \cdot 2 \dots m \cdot 1 \cdot 2 \dots (\mu - m)} \left(\frac{S}{\mu}\right)^m \left(\frac{\mu - S}{\mu}\right)^{\mu - m + 1} \frac{m}{m - S},$$

при этом $S = p_1 + p_2 + \dots + p_\mu$.

Приданием доказательству теоремы Пуассона надлежащей строгости не ограничивается значение диссертации. Хотя Чебышев не оговаривает независимости испытаний, но фактически как в этой, так и во всех других своих работах он всегда рассматривает лишь независимые события и тем самым, по существу, устраняет принципиальный недостаток рассуждений Пуассона, применявшего свою теорему ко всяким событиям.

В магистерской диссертации Чебышева освещены основные теоретические положения теории вероятностей и намечены важнейшие ее приложения. Впоследствии он занимался вопросами, непосредственно не связанными с теорией вероятностей. Однако среди них особо выделяются вопросы интерполирования по способу наименьших квадратов, исследование которых сыграло важную роль в разработке математических средств — аппарата непрерывных дробей, разложения функций в ряд по (ортогональным) полиномам, метода моментов, — позволивших Чебышеву в дальнейшем существенно продвинуть исследование важнейших вопросов теории вероятностей.

Интерес Чебышева к теории вероятностей вновь возник в 1860 г., когда он начал читать этот предмет после Буняковского в Петербургском университете. Вскоре появилась его знаменитая статья «О сред-

них величинах», доложенная им Петербургской академии наук в 1866 г. и напечатанная в 1867 г. во втором томе «Математического сборника» и на французском языке в журнале Лиувилля. Вот начало этой статьи: «Если мы примем называть вообще *математическим ожиданием* какой-либо величины сумму всех возможных для нее значений, умноженных на вероятности их, то нетрудно показать относительно пределов, в которых будет содержаться сумма каких-либо величин, такую весьма простую теорему.

Теорема. Если математические ожидания величин $x, y, z, \dots$ суть $a, b, c, \dots$, а математические ожидания квадратов $x^2, y^2, z^2, \dots$ суть $a_1, b_1, c_1, \dots$, то вероятность, что сумма $x + y + z + \dots$ заключается в пределах

$$a + b + c + \dots + \alpha \sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \dots - a^2 - b^2 - c^2 - \dots},$$

$$a + b + c + \dots - \alpha \sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \dots - a^2 - b^2 - c^2 \dots},$$

при всяком α остается больше $1 - \frac{1}{\alpha^2}$ ²¹. Важное неравенство, выражаемое этой теоремой, получило название неравенства Чебышева. Доказав путем непосредственных вычислений приведенную теорему, Чебышев, полагая $\alpha = \frac{\sqrt{N}}{t}$, где N — число величин $x, y, z, \dots$, придает ей такой вид: если математические ожидания величин $x, y, z, \dots, x^2, y^2, z^2, \dots$ суть $a, b, c, \dots, a_1, b_1, c_1, \dots$, то вероятность, что среднее арифметическое N величин $x, y, z, \dots$ от среднего арифметического математических ожиданий этих

величин разнится не более чем на $\frac{1}{t} \sqrt{\frac{a_1 + b_1 + c_1 + \dots}{N} - \frac{a^2 + b^2 + c^2 + \dots}{N}}$

при всяком значении t , будет превосходить $1 - \frac{t^2}{N}$ ²². Отсюда непосредственно с помощью предельного перехода он получил следующую теорему: если математические ожидания величин $U_1, U_2, U_3, \dots, U_1^2, U_2^2, U_3^2, \dots$ не превосходят какого-либо конечного предела, то вероятность, что среднее арифметическое N таких величин от среднего арифметического их математических ожиданий разнится менее, чем на какую-нибудь данную величину, с возрастанием числа N до ∞ , приводится к единице²³. Эта теорема

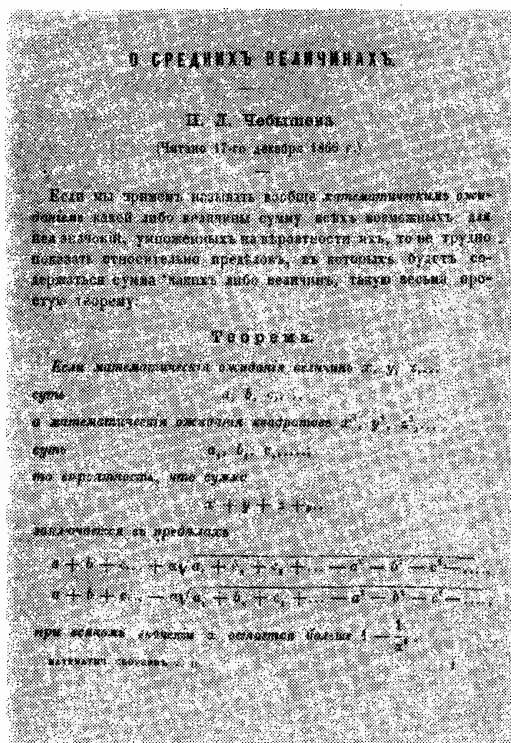
²¹ П. Л. Чебышев. Полн. собр. соч. Т. 2, стр. 431.

²² Пользуясь современными обозначениями, можно записать

$$P \left\{ \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Mx_i \right| \leq \frac{1}{t} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Mx_i^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Mx_i)^2} \right\} > 1 - \frac{t^2}{N},$$

где Mx_i означает математическое ожидание величины x_i . Хотя Чебышев явно не оговаривает условие независимости рассматриваемых случайных величин, в своих рассуждениях он фактически пользуется им.

²³ Иными словами, вероятность того, что они отличаются лишь на какую-то данную величину (сколь угодно малую) при достаточно большом N , сколь угодно близка к достоверности.



Первая страница работы П. Л. Чебышева «О средних величинах».

представляет собой данную Чебышевым классическую формулировку закона больших чисел, далеко обобщающую формулировки Бернулли (1713 г.) и Пуассона (1837 г.), результаты которых Чебышев чрезвычайно просто получает из своей теоремы в качестве частных случаев.

Работа «О средних величинах» стала классической. Ее результаты являются неотъемлемой частью теории вероятностей, они включены в учебную литературу не только потому, что имеют принципиальное значение, но и потому, что доказательства Чебышева очень просты и широко доступны. В основной его теореме дана общая формулировка закона больших чисел для независимых случайных величин. Установив ее и дав тем самым далеко идущее обобщение теоремы Бернулли, Чебышев обратил внимание на другую важнейшую теорему теории вероятностей — теорему Муавра—Лапласа.

В результате многолетних размышлений он широко обобщил эту теорему и пришел к теореме, получившей впоследствии название основной предельной теоремы теории вероятностей. Можно считать, что уже в 1874 г., опубликовав работу «О предельных величинах интегралов», Чебышев нашел ключ к доказательству предельной теоремы. Как отмечалось выше, результаты, изложенные в статье «О средних величинах», он получил, используя метод Бьенэме. Последний также применял свой метод к вопросам теории вероятностей, причем к вопросам, близким к рассмотренным Чебышевым²⁴. Это метод моментов.

В рассмотренных выше работах о предельных величинах интегралов Чебышев (а затем и его ученики) глубоко развил метод моментов. С его помощью оказалось со временем возможным доказать основную предельную теорему теории вероятностей. Доказательство теоремы Чебышев приводит в другом знаменитом труде по теории вероятностей — «О двух теоремах относительно вероятностей», доложенном в марте 1887 г. Петербургской академии наук и вскоре опубликованном ею, а также напечатанном на французском языке в журнале «Acta mathematica».

Упомянув об основной теореме статьи «О средних величинах» и о неравенствах, полученных в работе «Об интегральных вычетах, достав-

²⁴ В связи с этим основное неравенство работы «О средних величинах» иногда называют неравенством Бьенэме — Чебышева.

ляющих приближенные величины интегралов», Чебышев переходит к главному — получению теоремы «относительно вероятностей, которая в приложении к определению благонадежнейших величин неизвестных на основании большого числа уравнений, заключающих случайные, более или менее значительные погрешности, приводит к способу наименьших квадратов. Теорема эта может быть так формулирована: если математические ожидания величин $u_1, u_2, u_3, \dots$ равны нулю, а математические ожидания всех их степеней имеют числовую величину ниже какого-либо конечного предела, вероятность, что сумма n величин $u_1 + u_2 + \dots + u_n$, деленная на квадратный корень из удвоенной суммы математических ожиданий их квадратов, заключается между двумя какими-нибудь величинами t и t' с возрастанием числа n до ∞ , имеет пределом величину интеграла $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^{t'} e^{-x^2} dx$ »²⁵.

В основе доказательства приведенной теоремы лежит равенство

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sx} f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_1}{\sqrt{n}}} \varphi_1(u_1) du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_2}{\sqrt{n}}} \varphi_2(u_2) du_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{su_n}{\sqrt{n}}} \varphi_n(u_n) du_n; \end{aligned}$$

при этом выражения $\varphi_1(x) dx, \varphi_2(x) dx, \varphi_3(x) dx, \dots$ означают вероятности, что величины $u_1, u_2, u_3, \dots$ имеют значения, заключающиеся в бесконечно узком промежутке $x, x + dx$; $f(x) dx$ означает вероятность, что в том же промежутке заключена величина дроби $\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{\sqrt{n}}$;

s — произвольная постоянная. Чебышев использует разложение обеих частей этого равенства в ряд по целым положительным степеням s , в коэффициенты которого входят величины

$$a_i^{(k)} = \int_{-\infty}^{+\infty} u_i^k \varphi(u_i) du_i \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 2, 3, \dots, 2m - 1).$$

Сравнение членов с одинаковыми степенями s в таких разложениях, точных до s^{2m-1} , при переходе к пределу $n \rightarrow \infty$ дает:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{q^2}, \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x) dx = 0, \dots, \end{aligned}$$

²⁵ П. Л. Чебышев. Полн. собр. соч. Т. 3, стр. 230. Утверждение теоремы можно записать так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ t < \frac{u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n}{\sqrt{2(Mu_1^2 + Mu_2^2 + Mu_3^2 + \dots + Mu_n^2)}} < t' \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^{t'} e^{-x^2} dx.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-2} f(x) dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-3)}{q^{2m-2}}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m-1} f(x) dx = 0.$$

Воспользовавшись своими оценками (см. стр. 209), Чебышев получает основное равенство

$$\int_{-\infty}^v f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx,$$

из которого непосредственно следует, что

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{q} t}^{\frac{\sqrt{2}}{q} t'} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_t^{t'} e^{-x^2} dx,$$

а вместе с тем и утверждение теоремы. В конце работы для определения рассматриваемой вероятности при конечном n дано разложение

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_t^{t'} \left[1 - K_3 \left(\frac{q}{\sqrt{2}} \right)^3 \psi_3(x) + K_4 \left(\frac{q}{\sqrt{2}} \right)^4 \psi_4(x) + \dots \right] e^{-x^2} dx,$$

в котором $K_3, K_4 \dots$ — некоторые коэффициенты, а $\psi_3(x), \psi_4(x), \dots$ — полиномы, получаемые по формуле $\psi_l(x) = e^{x^2} \frac{d^l e^{-x^2}}{dx^l}$ (полиномы Чебышева — Эрмита).

Теорема Чебышева подчеркивала особую роль нормального закона распределения вероятностей в теории ошибок и других прикладных вопросах теории вероятностей, связанных с ее применениями в артиллерии, технике, естествознании. Она имела важное значение как в теоретическом, так и в прикладном отношении.

Работа «О двух теоремах относительно вероятностей» носит несколько незавершенный характер: изложение местами не вполне отчетливо, в формулировке основного результата не указано еще одно условие, без выполнения которого полученная Чебышевым теорема не может быть строго доказана²⁶, не вполне удовлетворительны указания автора относительно получения основного равенства. Несмотря на это, результаты этой работы Чебышева являются его высшим достижением в теории вероятностей. Они обусловили дальнейшие успехи петербургской школы теории вероятностей, вскоре ставшей ведущей в мире.

Как указывал А. Н. Колмогоров, Чебышев вывел русскую теорию вероятностей на первое место в мире. «С методологической стороны основной переворот, совершенный Чебышевым, заключался не только в

²⁶ Им может быть такое условие: величина $\frac{1}{q^2}$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к конечному положительному пределу. См. комментарий А. Н. Колмогорова к рассматриваемой работе в кн.: П. Л. Чебышев. Полн. собр. соч. Т. 3, стр. 404—409.

том, что он впервые с полной настойчивостью выдвинул требование абсолютной строгости доказательства предельных теорем (выводы Муавра, Лапласа и Пуассона были с формально-логической стороны совсем не безупречны в отличие, впрочем, от Бернулли, который свою предельную теорему доказал с исчерпывающей арифметической строгостью), но, главным образом, в том, что Чебышев всюду стремился получать точные оценки отклонений от предельных закономерностей, возможных хотя бы и при большом, но конечном числе испытаний, в виде безусловно правительных при любом числе испытаний неравенств.

Далее, Чебышев впервые ясно оценил и использовал всю силу понятий „случайной величины“ и „математического ожидания“ (среднего значения) случайной величины. Понятия эти были известны и ранее и являются производными от основных понятий „события“ и „вероятности“. Но случайные величины и их математические ожидания подчинены гораздо более удобному и гибкому алгоритму»²⁷. Исследования Чебышева в области теории вероятностей продолжили его ученики А. А. Марков и А. М. Ляпунов.

5

Исследования по теории наилучшего приближения функций

Почти одновременно с возобновлением исследований по теории интегрирования алгебраических функций (1852 г.) Чебышев занялся другим важным вопросом анализа — вопросом о наилучшем приближении функций. Первой работой Чебышева в этом направлении, ставшем одним из главных в его научном творчестве, является мемуар «Теория механизмов, известных под названием параллелограммов» (1853 г.). Он был опубликован Петербургской академией наук вскоре после первой поездки Чебышева за границу, во время которой он знакомился с сохранившимися на некоторых заводах Англии и Франции механизмами Уатта.

Параллелограммами в то время называли прямолинейно-направляющие шарнирные механизмы Уатта, предназначенные для получения с достаточным приближением прямолинейного движения с помощью комбинации круговых движений. Применялись они в паровых машинах. Для большей долговечности последних следовало добиваться как можно меньших отклонений движения поршня от прямолинейного. Однако существовавшие эмпирические способы определения размеров параллелограммов Уатта не обеспечивали достаточно высокой степени точности приближения траектории движения к прямой линии. Чебышев, занявшись строгим анализом этого вопроса, впервые подверг его научному исследованию.

²⁷ А. Н. Колмогоров. Роль русской науки в развитии теории вероятностей. — В кн.: Ученые записки МГУ. Т. 91. Роль русской науки в развитии мировой науки и культуры. Т. 1, Кн. 1, 1947, стр. 56.

В начале названного мемуара Чебышев указывает, что для нахождения наивыгоднейших размеров параллелограмма Уатта следует решить такую математическую задачу: определить изменения, которые надо произвести в приближенном выражении функции $f(x)$, данном ее разложением по степеням $x - a$, если требуется сделать наименьшим предел его погрешностей между $x = a - h$ и $x = a + h$, где h — величина не очень значительная. Рассмотрение этой задачи составляет основное содержание мемуара.

Ранее теория параллелограммов основывалась на приближенных формулах, дававших наибольшую точность вблизи некоторого значения переменной. Теперь требовались методы, которые могли бы обеспечить наибольшую точность для всех значений переменной между данными пределами. Своим предшественником в разработке таких методов Чебышев называет Понселе, получившего в 1835 г. линейные формулы для представления выражений

$$\sqrt{x^2 + y^2}, \sqrt{x^2 - y^2}, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Формулы Понселе часто использовались при вычислении вредных сопротивлений машин. Уравнения для определения коэффициентов линейных формул в его задачах, носящих весьма частный характер, решаются легко. Чебышев ставит и исследует общую задачу о наилучшем (равномерном) приближении функций. Решает он ее путем использования разложения в ряды.

Пусть $f(x)$ — данная функция, U — многочлен степени n , коэффициенты которого выбраны так, чтобы разность $f(x) - U$ от $x = a - h$ до $x = a + h$ оставалась в пределах наиболее близких к 0. Чебышев прежде всего отмечает, что тогда «разность $f(x) - U$, как известно, будет обладать следующим свойством: между наибольшими и наименьшими значениями разности $f(x) - U$ в пределах от $x = a - h$ до $x = a + h$ встречается по крайней мере $n + 2$ раза одно и то же численное значение»²⁸. Исходя из этого утверждения, он дает метод определения коэффициентов U , применимый во всех случаях, если данная функция в рассматриваемых пределах может быть разложена в ряд Тейлора. Обозначив через $k_0, k_1, k_2, \dots$ значения

$$f(a), \frac{f'(a)}{1}, \frac{f''(a)}{1 \cdot 2}, \dots$$

соответствующих коэффициентов этого ряда, он указывает, что искомый многочлен U определяется условием, по которому в пределах между $z = -1$ и $z = +1$ разность

$$k_0 + k_1 h z + k_2 h^2 z^2 + \dots - U$$

по возможности наименее уклоняется от нуля ($x - a = h z$). В предположении, что $k_{n+1} = 0, k_{n+2} = 0, \dots, k_{n+m} = 0$, U представимо в виде

$$U = U_0 + V h^{m+n+1},$$

²⁸ П. Л. Чебышев. Полн. собр. соч. Т. 2, стр. 26.

где

$$U_0 = k_0 + k_1 h z + k_2 h^2 z^2 + \dots + k_n h^n z^n,$$

следовательно, в этом слагаемом учтены величины порядка меньше h^{n+1} . Остается найти слагаемое $V h^{m+n+1}$. Чебышев сводит задачу к решению дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - L^2}} = \frac{Q dz}{\sqrt{(z^2 - 1)P}},$$

в котором $y = k_{m+n+1} z^{m+n+1} - V$; L — величина уклонения $f(x)$ от U в точках максимума и минимума; P и Q — многочлены степени $2m$ и m , соответственно.

Выведенное Чебышевым дифференциальное уравнение легко интегрируется при $m = 0$. В результате непосредственно получается

$$y = \frac{k_{n+1}}{2^{n+1}} \left[\left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)^{n+1} + \left(z - \sqrt{z^2 - 1} \right)^{n+1} \right],$$

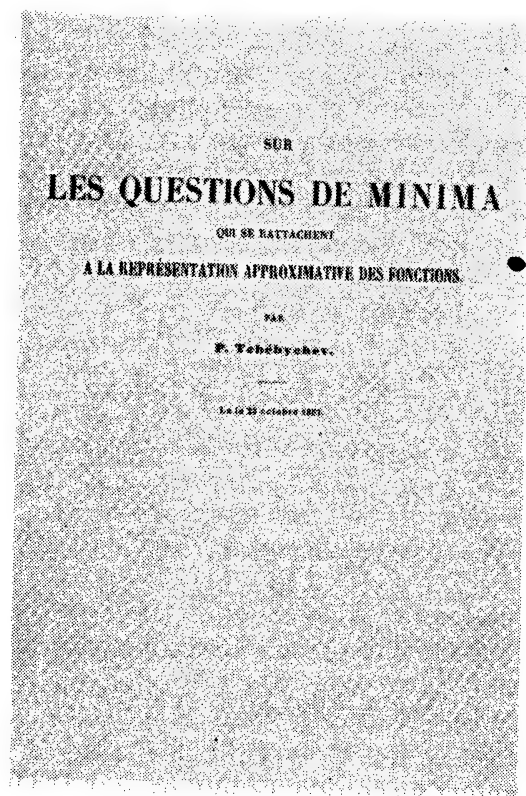
т. е. многочлен степени $n + 1$, наименее уклоняющийся от нуля в пределах от $z = -1$ до $z = +1$ с $L = \frac{k_{n+1}}{2^n}$, и соответствующее выражение для V , согласно формуле $y = k_{n+1} z^{n+1} - V$. При этом V является многочленом степени n , наименее уклоняющимся от $k_{n+1} z^{n+1}$ в пределах от $z = -1$ до $z = +1$. Используя решение для $m = 0$, Чебышев легко находит решение и для $m = 1$. Далее он показывает, исходя из полученного выражения для V , точного до величины порядка h , что

$$V = k_{n+1} z^{n+1} - y + k_{n+2} \left(z^{n+2} - \frac{z^2 - 1}{(n+1)k_{n+1}} \cdot \frac{dy}{dz} \right) h$$

дает точность до величины порядка h^2 . Затем предлагает метод нахождения по приближенному выражению функции V , точному до величин порядка h^l , ее выражения, точного до h^{2l} . Этот метод позволяет переходить от одного приближенного выражения V к другому, более точному. Его Чебышев применяет при решении исходной задачи для $n = 4$. В этом случае, очень важном для теории параллелограммов, им проведены все необходимые вычисления. Чебышев дает также решение исходной задачи с дополнительным требованием, по которому погрешность сводится к нулю на концах промежутка. При этом, используя подстановку $x - a = h \cos \varphi$ ($= h z$), он находит корни наименее уклоняющегося от нуля многочлена $(n + 1)$ -й степени как корни уравнения $\cos(n + 1) \varphi = 0$.

Свойства многочленов, наименее уклоняющихся от нуля, позволили Чебышеву получить ряд теорем об отделении корней многочленов, установить некоторые свойства многочленов. Он указал способ геометрического получения корней многочлена n -й степени, наименее уклоняющегося от нуля, путем построения правильного $2n$ -угольника.

Вопросы применения развитой Чебышевым теории наилучшего



Титульный лист работы П. Л. Чебышева «Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций» (на французском языке).

функции $\log \frac{2}{e^u + e^{-u}}$ в области, ограниченной какой-нибудь кривой, может достигаться только тогда, когда разность $U - \log \frac{2}{e^u + e^{-u}}$ сохраняет на этой кривой постоянное значение; иными словами, наивыгоднейшая проекция для изображения какой-либо части земной поверхности на карте есть та, в которой на границе изображения масштаб сохраняет одну и ту же величину²⁹. Он излагает способ проекции, позволяющий получить карту Европейской части России с изменениями масштаба, не превосходящими $1/50$, что является высшей степенью точности, которой можно достигнуть, оставляя параллели и меридианы в виде кругов или прямых линий.

В чисто теоретическом плане написан другой, наиболее капитальный мемуар Чебышева по вопросам наилучшего приближения функций — «Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций», вышедший отдельным оттиском в 1858 г., а годом позднее опубликованный в «Трудах Петербургской академии наук». В этом мемуаре широко обобщена рассмотренная выше задача о наилучшем приближении функции на отрезке. Однако ранее речь шла

приближения функций к теории параллелограммов должны были быть изложены во второй части мемуара, о которой ничего не известно. В дальнейшем этим вопросам он посвятил статьи о параллелограммах (начавшие появляться в печати с 1862 г.).

В работах «О построении географических карт» (1855 г.) и «Черчение географических карт» (1856 г.) Чебышев дает приложение теории наилучшего приближения функций к задаче о построении географических карт. Используя выражение Лагранжа для масштаба, он сводит свою задачу к задаче нахождения интеграла уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0,$$

который наименее уклоняется от функции $\log \frac{2}{e^u + e^{-u}}$. Как указывает Чебышев, по замечательным свойствам приведенного уравнения можно убедиться, что минимум отклонения его интеграла от функ-

²⁹ Убедиться в осуществимости условия можно с помощью принципа Дирихле.

о разности между заданной функцией и ее приближением, взятым в виде многочлена данной степени с произвольными коэффициентами, которые определялись из условия наименьшего отклонения от нуля этой разности. Теперь ставится задача: для функции $F(x)$ данного вида с n произвольными параметрами $p_1, p_2, \dots, p_n$, выбирая значения этих параметров, сделать наименьшим предел ее отклонений от нуля между $x = -h$ и $x = +h$.

Чебышев устанавливает следующую основную теорему: величина L , которая определяет уклонение функции $F(x)$ от нуля в пределах между $x = -h$ и $x = +h$, не приведена к наименьшей величине, если система уравнений

[illegible]

не имеет других решений, кроме $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_\mu = 0$; $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ представляют те значения x , для которых функция $F(x)$ между $x = -h$ и $x = +h$ достигает своих предельных значений $+L$ и $-L$. Из этой теоремы следует, что если рассматриваемая система значений параметров $p_1, p_2, \dots, p_n$ доставляет минимум уклонений, то либо $\mu \geq n + 1$, и тогда при решении задачи можно обойтись без приведенной системы уравнений, либо $0 < \mu \leq n$, и тогда с помощью приведенной системы уравнений получаем $n + \mu + 1$ уравнений для определения такого же числа неизвестных, а именно

$$p_1, p_2, \dots, p_n, x_1, x_2, \dots, x_n \text{ и } L^{30}.$$

Далее Чебышев прилагает свою теорему к трем случаям приближения функции: 1) с помощью многочлена данной системы, 2) с помощью дробной рациональной функции с данными знаменателем и степенью числителя, 3) с помощью дробной рациональной функции с данными степенью числителя и степенью знаменателя. При наличии минимума уклонений в первых двух случаях всегда $\mu \geq n + 1$, в третьем случае μ может быть меньше $n + 1$, но только при условии, что наилучшее приближение дает дробь, у которой одно и то же число d старших коэффициентов как в числителе, так и в знаменателе обращается в нуль, последнее же может выполняться лишь в исключительных случаях, которые он оставляет в стороне. Во всех трех случаях, как и вообще, в точках наибольшего уклонения выполняются условия $F^2(x) - L^2 = 0$, $(x^2 - h^2) F'(x) = 0$. Это и есть уравнения, служащие для нахождения решения. Чебышев дает общее решение поставленных им задач, приводя их к решению неопределенных уравнений второй степени между искомыми многочленами и некоторыми другими многочленами, играю-

³⁰ В этом случае, говоря современным языком, ранг матрицы коэффициентов приведенной системы линейных однородных уравнений меньше μ .

щими роль вспомогательных неизвестных. Эти неопределенные уравнения и дают возможность найти окончательное решение задач, получить которое с помощью обыкновенных алгебраических приемов было бы невозможно.

В первом случае речь идет о задаче, рассмотренной Чебышевым в мемуаре «Теория механизмов, известных под названием параллелограммов». Здесь он решает ее другим способом, с помощью разложения $\sqrt{x^2 - h^2}$ в непрерывную дробь, и указывает новое применение свойств многочленов, наименее уклоняющихся от нуля, а именно к теории интерполяции. Чебышев показывает, что остаточный член интерполяционной формулы Лагранжа дает наименьшую погрешность не в случае равноотстоящих узлов, а в случае, когда в качестве узлов берутся корни соответствующего многочлена, наименее уклоняющегося от нуля, например в промежутке от $x = -h$ до $x = +h$ величины

$$h \cos \frac{\pi}{2n}, h \cos \frac{3\pi}{2n}, \dots, h \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n}.$$

Второй и третий случаи представляют собой новые задачи, поставленные и исследованные Чебышевым и далеко обобщающие задачи первого случая ³¹. Как и раньше, тонкие теоретические рассуждения приводят Чебышева к конкретным результатам, применение которых иллюстрируется примерами.

Рассмотренные работы Чебышева составили теоретическую основу решения задач о наилучшем приближении функций с помощью многочленов, наименее уклоняющихся от нуля. Основным методом решения таких задач Чебышев считает метод непрерывных дробей и дает его глубокое развитие. Обыкновенное применение непрерывных дробей позволяет найти полиномы X и Y , при которых разность $uX - Y$ наиболее приближается к нулю, в предположении, что функция u может быть разложена в ряд по нисходящим степеням переменной и что степень приближения к нулю определяется высшей степенью переменной в остатке ряда. При рассмотрении интегрирования по способу наименьших квадратов в сочинении «О непрерывных дробях» (1855 г.) Чебышеву встретилась задача о нахождении таких полиномов X и Y , что разность $uX - Y$ лучше всего приближается не к нулю, а к некоторой функции, а именно $\frac{1}{x - x'}$. Это привело его к новому применению непрерывных дробей, с помощью которого решается и более общая задача: какова бы ни была функция u , определить полиномы X и Y так, чтобы разность $uX - Y$ ближе всего выражала u .

Решение последней задачи Чебышев сообщил в зачитанном им на заседании Московского математического общества 18 сентября 1865 г. письме Брашману ³² «Разложение в ряды при помощи непрерывных

³¹ Задачу второго случая можно рассматривать как задачу о наилучшем (равномерном) приближении с весом.

³² Письмо Брашману Чебышев заканчивает словами: «Сказанного мною достаточно, чтобы видеть, как много интереса представляет предмет, на который я был наведен Вашими лекциями и всегда драгоценными для меня беседами с Вами». См. в кн.: П. Л. Чебышев. Полн. собр. соч. Т. 2, стр. 415.

дробей» и подробно, с доказательствами, — в статье «О разложении функций в ряды при помощи непрерывных дробей». При решении он основывается на установленном им соответствии между разложением функции в (степенной) ряд по нисходящим степеням переменной и алгебраическими непрерывными дробями. Решение дается для функции

$$u = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}},$$

где знаменатели $q_1, q_2, q_3, \dots$ являются целыми функциями x . Введя в рассмотрение подходящие дроби $\frac{P_n}{Q_n}$ этой непрерывной дроби и величины $R_n = uQ_n - P_n$, Чебышев для любой функции v , которая может быть разложена в ряд по целым нисходящим степеням x , получает замечательное разложение

$$v = Ev + (Eq_1Q_1v - q_1EQ_1v)R_1 - E(q_2Q_2v - q_2EQ_2v)R_2 + \dots,$$

где Ev означает целую часть функции v , следовательно, $v - Ev$ является функцией отрицательной степени. Члены приведенного разложения представляют собой функции, степени которых постоянно уменьшаются. Из этого разложения он получает решение рассматриваемой задачи:

$$X = (Eq_1Q_1v - q_1EQ_1v)Q_1 - (Eq_2Q_2v - q_2EQ_2v)Q_2 + \dots,$$

$$Y = -Ev + (Eq_1Q_1v - q_1EQ_1v)P_1 - (Eq_2Q_2v - q_2EQ_2v)P_2 + \dots$$

Члены этих рядов — полиномы, степени которых возрастают. Обрывая ряды на соответствующих членах, получаем такие полиномы X и Y , что разность $uX - Y$ столь близка к функции v , как только это возможно при X и Y — полиномах тех же степеней, а также более высоких, но ниже степеней X, Y , получаемых после прибавления следующего члена в их разложении. В том важном случае, когда все q_n являются полиномами первой степени ($q_n = A_nx + B_n$), разложения намного упрощаются. Далее, при $u = \frac{1}{x-a}$, если положить $Q_n = \psi_n(x)$, получается

$$\frac{1}{x-a} = A_1\psi_1(a)R_1 - A_2\psi_2(a)R_2 + A_3\psi_3(a)R_3 - \dots,$$

где каждый из членов представляет собой произведение функции a на функцию x (как и в разложении $(x-a)^{-1}$ по биному Ньютона). Если же взять

$$u = \sum \frac{1}{x-x_i}, \quad v = \sum \frac{F(x_i)}{x-x_i},$$

то полином X совпадает с полиномом для $F(x)$, получаемым интерполированием по способу наименьших квадратов.

Продолжая исследование, Чебышев в статье «О приближенных выражениях, линейных относительно двух полиномов» (1877 г.) рассматривает необходимые и достаточные условия для того, чтобы разность

$uX - Y$, в которой X и Y — полиномы, причем степень X не выше M , могла дать приближенное выражение функции v с точностью до x^{-N} (не включительно).

Таковы наиболее общие результаты Чебышева по теории наилучшего приближения функций.

Рассматривая вопрос о построении центробежного регулятора с наилучшим изохронизмом в работе (1871 г.), Чебышев пришел к видоизменению постановки задачи о наилучшем приближении функций: потребовалось найти полином (с равным единице коэффициентом при старшем члене), который, постоянно возрастая или убывая в данных пределах (для простоты от -1 до $+1$), наименее уклоняется от нуля. Решение, изложенное им в статье «О функциях, наименее уклоняющихся от нуля» (1873 г.), выражается посредством полиномов Якоби³³. Он получает также для искомого полинома степени n выражение предела отклонения от нуля.

Полученные формулы позволили Чебышеву установить ряд свойств полиномов, что привело его к теореме: какова бы ни была величина t , взяв радикал в выражении $t \pm 4 \sqrt[n]{\frac{f^2(t)}{4(n-1)^2\pi^2}}$ со знаком, противополо-

ложным знаку дроби $\frac{f(t)}{f'(t)}$, найдем между t и приведенным выражением по крайней мере один корень уравнения $f(z) = z^n + A'z^{n-1} + A''z^{n-2} + \dots = 0$, если только это уравнение не имеет мнимых корней. Теорема уточняет ранее полученные им результаты об отделении корней алгебраических уравнений.

В последующих работах Чебышев решил ряд новых конкретных задач о наилучшем приближении функций, пользуясь способами решения, изложенными им в рассмотренном выше мемуаре «Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций». В 1875 г. он опубликовал без доказательства теорему, позволяющую определить предел степени целой функции по ее отклонениям от нуля для значений переменной, лежащих между известными пределами, и по ее величине вне этих пределов.

В сочинении «О функциях, мало удаляющихся от нуля при некоторых величинах переменной» (1881 г.) Чебышев показал, как по степени целой функции $F(x)$ и высшему пределу L отклонения ее от нуля между $x = -h$ и $x = +h$ можно найти высший предел ее величины при каком-нибудь значении $x = H$, не заключающемся между $x = -h$ и $x = +h$. Здесь решен тот же вопрос для тригонометрического полинома

$$A_0 + A_1 \cos \varphi + A_2 \cos 2\varphi + \dots + A_n \cos n\varphi + B_1 \sin \varphi + B_2 \sin 2\varphi + \dots + B_n \sin n\varphi,$$

подстановкой $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = x$ он сведен к случаю алгебраической функции.

³³ Если степень n искомого полинома четная и полином представляет собой возрастающую функцию, то он может быть выражен посредством полиномов Лежандра. Доказательство ортогональности полиномов Якоби, в котором использована их производящая функция, Чебышев дал несколько ранее, в работе «О функциях, подобных функциям Лежандра» (1870 г.).

Большое внимание Чебышев уделит приближенному представлению квадратного корня с помощью алгебраических дробей. Он показал (1884 г.)³⁴, как найти среди дробей вида $\frac{f(x)}{F(x)}$, где степени $f(x)$, $F(x)$ не превосходят n , ту дробь, логарифм которой в пределах от $x = \frac{1}{a} < 1$ до $x = a > 1$ наименее уклоняется от логарифма $\sqrt{x}$, и получил для приближенного выражения $\sqrt{x}$ в указанных пределах дробь $\frac{kx+1}{x+k}$, где k — постоянная, определяемая уравнением $k^4 - 6k^2 - 4\left(a + \frac{1}{a}\right)k - 3 = 0$.

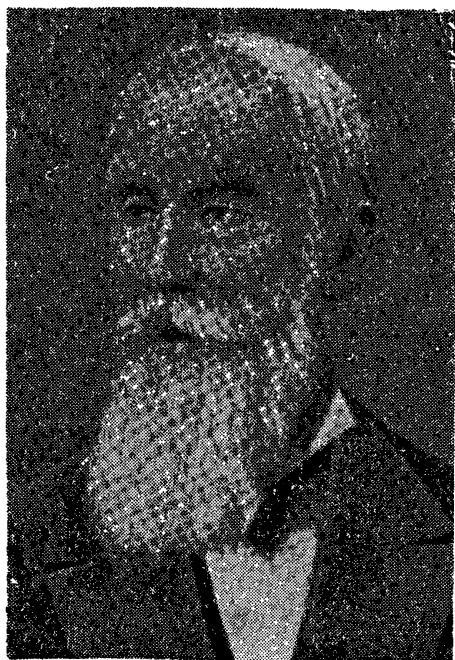
В работе «О приближенных выражениях квадратного корня переменной через простые дроби» (1889 г.) решена задача о приближенном выражении радикала $\sqrt{\frac{1}{x}}$ функцией вида

$$A + \frac{B_1}{C_1+x} + \frac{B_2}{C_2+x} + \dots + \frac{B_n}{C_n+x}$$

при условии, что при всех значениях x от $x = 1$ до $x = h > 1$ относительная погрешность будет возможно меньшей (наименее удаляющейся от единицы). В результате для коэффициентов $A, B_1, B_2, \dots, B_n, C_1, C_2, \dots, C_n$ получены довольно громоздкие выражения посредством эллиптических функций sn, cn, dn . Окончательная формула, дающая требуемое приближение $\sqrt{\frac{1}{x}}$, применена к нахождению предельных величин

интегралов. Впоследствии формулу Чебышева для приближения $\sqrt{\frac{1}{x}}$ применил Баклунд для разложения в ряд пертурбационной функции.

Одной из последних работ Чебышева является статья «О полиномах, наилучше представляющих значения простейших дробных функций при величинах переменной, заключающихся между двумя данными пределами» (1893 г.). В ней найдены полиномы различных степеней, лучше всего представляющие значения простейшей дроби $\frac{1}{H-x}$ при значениях x , не выходящих за пределы $x = -h, x = +h$. Предполагается,



П. Л. Чебышев (80-е годы XIX в.).

³⁴ П. Л. Чебышев. Полн. собр. соч. Т. 3, стр. 170—171.

что H, h положительны и, кроме того, $H > h$. Показано применение полученного окончательного выражения для искомого полинома к приближенному вычислению интеграла $\int_{-n}^n \frac{f(x)}{H-x} dx$, в котором $f(x)$ и $H-x$ остаются положительными в пределах интегрирования.

Таким образом, в теории наилучшего приближения функций Чебышев поставил основные задачи и дал общие методы их решения. С помощью этих методов он решил много интересных конкретных задач о наилучшем приближении функций. Чебышев не только создал теорию наилучшего приближения функций с помощью полиномов, наименее уклоняющихся от нуля, но и показал ее различные применения как в самой математике, так и в практических задачах. Его идеи, методы и полученные результаты сыграли выдающуюся роль в дальнейшем развитии теории наилучшего приближения функций.

6

Работы по теории интерполирования и связанным с ним вопросам

С середины 50-х годов Чебышев начал усиленно заниматься вопросами интерполирования и применением их к артиллерийским расчетам. Его работы в этом направлении имеют принципиальное теоретическое значение. В них подробно разработан играющий важную роль в прикладном анализе метод параболического интерполирования — интерполирования по методу наименьших квадратов.

Первой работой Чебышева по интерполированию является краткая заметка «Об одной формуле анализа» (1854 г.), где сообщается о получении новой формулы интерполирования, существенно отличной от интерполяционной формулы Лагранжа. Вскоре в извлечении из мемуара о непрерывных дробях Чебышев сообщил о рассмотрении вопроса в наиболее общем виде: в предположении, что законы вероятностей ошибок значений искомой функции различны (интерполирование с весом). Вслед за этим появился и сам мемуар «О непрерывных дробях» (1855 г.).

В мемуаре прежде всего решена следующая задача: известны значения $F(x)$ при $n+1$ различных значениях переменной $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$; найти значение этой функции при $x = X$ в предположении, что она выражается в виде $a + bx + cx^2 + \dots + gx^{m-1} + hx^m$, где m не превосходит n , и притом так, чтобы погрешности значений $F(x_0), F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_n)$ имели наименьшее влияние на искомую величину $F(X)$. Решение этой задачи сведено к определению $F(X)$ по формуле $F(X) = \lambda_0 F(x_0) + \lambda_1 F(x_1) + \lambda_2 F(x_2) + \dots + \lambda_n F(x_n)$, где множители $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ определяются уравнениями

[illegible]

и условием наименьшей величины суммы $k_0^2\lambda_0^2 + k_1^2\lambda_1^2 + k_2^2\lambda_2^2 + \dots + k_n^2\lambda_n^2$. При этом $k_0^2, k_1^2, k_2^2, \dots, k_n^2$ означают величины, пропорциональные средним величинам квадратов погрешностей значений $F(x_0), F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_n)$. Чебышев показывает, что

$$F(X) = \frac{\Theta^2(x_0) \varphi_0(x_0)}{\varphi^0(X)} F(x_0) + \frac{\Theta^2(x_1) \varphi_0(x_1)}{\varphi^0(X)} F(x_1) + \dots + \frac{\Theta^2(x_n) \varphi_0(x_n)}{\varphi^0(X)} F(x_n),$$

где $\Theta(x)$ — целая функция, значения которой в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ равны соответственно $\frac{1}{k_0}, \frac{1}{k_1}, \frac{1}{k_2}, \dots, \frac{1}{k_n}$. Для определения $\varphi_0(x)$ и $\varphi^0(x)$ нужно в ряду подходящих дробей выражения

$$\frac{(x - X) f'(x) \Theta^2(x)}{f(x)}$$

найти последнюю дробь со знаменателем степени не выше m и взять этот знаменатель в качестве $\varphi_0(x)$, а числитель указанной дроби — в качестве $\varphi^0(x)$; при этом

$$f(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Дальнейшее рассмотрение подходящих дробей позволяет Чебышеву записать формулу для $F(x)$ в виде

$$A_1 \psi_0(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_0(x_i) \Theta^2(x_i) F(x_i) - A_2 \psi_1(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_1(x_i) F(x_i) + \dots +$$

$$+ (-1)^m A_{m+1} \psi_m(X) \sum_{i=0}^{i=n} \psi_m(x_i) \Theta^2(x_i) F(x_i),$$

где $A_1, A_2, A_3, \dots$ — коэффициенты при x в частных непрерывной дроби $q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}}$, все знаменатели которой $q_1, q_2, \dots$ содержат переменную

x в первой степени, полученной разложением $\frac{f'(x) \Theta^2(x)}{f(x)}$; $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ — знаменатели подходящих дробей, полученных из этой непрерывной дроби. Отсюда при $\Theta(x) \equiv 1$ получается интерполяционная формула Чебышева, приведенная им в первой заметке по теории интерполирования. С ее помощью он устанавливает ряд свойств функций $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ Прежде всего, оказывается, что

$$(-1)^m A_{m+1} \sum_{i=0}^{i=n} \psi_m^2(x_i) \Theta^2(x_i) - 1 = 0.$$

Определив с помощью этого соотношения величины $A_1, A_2, \dots, A_{m+1}$, Чебышев записывает свою интерполяционную формулу в окончательном виде; она является точной для любого многочлена степени m .

Кроме того, он устанавливает, что сумма $\sum_{i=0}^{i=n} \psi_m'(x_i) \psi_m(x_i) \Theta^2(x_i)$ при m' , отличном от m , равна нулю³⁵. Полагая $m = n$ и сопоставляя свою интерполяционную формулу с интерполяционной формулой Лагранжа, Чебышев получает другие свойства функций $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots$. Эти свойства для функций $\Phi_m(x)$, определяемых как
$$\frac{\psi_m(x) \Theta(x)}{\sqrt{\sum_{i=0}^{i=n} \psi_m^2(x_i) \Theta^2(x_i)}}$$
,

записываются в виде

$$\sum_{m=0}^{m=n} \Phi_m(x_i) \Phi_m(x_\eta) = 0,$$

если $\eta \neq i$, и

$$\sum_{m=0}^{m=n} \Phi_m(x_i) \Phi_m(x_\eta) = 1$$

в случае $\eta = i$. Кроме того, $\sum_{i=0}^{i=n} \Phi_m(x_i) \Phi_{m_1}(x_i)$ равно нулю или единице, в зависимости от того, будет m_1 отлично от m или равно m ³⁶.

Чебышев отмечает, что нахождение таких функций рассматривалось в одном мемуаре Эйлера (1771 г.). Особое значение функций $\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \dots$ среди всех функций тех же степеней и с теми же коэффициентами при высших степенях x он усматривает в том, что суммы

$$\sum_{i=0}^{i=n} \psi_1^2(x_i) \Theta^2(x_i), \sum_{i=0}^{i=n} \psi_2^2(x_i) \Theta^2(x_i), \sum_{i=0}^{i=n} \psi_3^2(x_i) \Theta^2(x_i), \dots$$

имеют наименьшую величину. Использование установленной в мемуаре интерполяционной формулы для определения по приближению какой-либо функции $F(x)$ дает для ее выражения такую целую функцию степени m , которая от всех других целых функций этой же степени отличается наименьшей величиной суммы квадратов разностей между нею и $F(x)$ при $X = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, умноженных на $\Theta^2(x_0), \Theta^2(x_1), \Theta^2(x_2), \dots, \Theta^2(x_n)$. Доказательством этих утверждений заканчивается мемуар. Метод непрерывных дробей настолько неотъемлем в нем от хода рассуждений, что Чебышев назвал его «О непрерывных дробях».

³⁵ Иными словами, свойство ортогональности с весом $\Theta(x)$ системы многочленов $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ на системе точек $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. Далее Чебышев нормирует эту систему многочленов.

³⁶ Иными словами, матрица $\|\Phi_m(x_i)\|_{i,m=0,1,2,\dots,n}$ ортогональна.

В мемуаре «О непрерывных дробях» Чебышев рассматривает общие вопросы интерполирования. Их развитию и разработке он посвятил работы «Об одном новом ряде» (1858 г.), «Об интерполировании по способу наименьших квадратов» (1859 г.) и «О разложении функций одной переменной» (1859 г.). В первых двух способу интерполирования придается вид, наиболее удобный при вычислениях. В них прежде всего приведена интерполяционная формула Чебышева для случая равноотстоящих узлов в предположении, что вероятные погрешности величин $u_1 = F(h)$, $u_2 = F(2h)$, ..., $u_n = F(nh)$ одинаковы ($\Theta(x) \equiv 1$). Многочлены, входящие в формулу, при этом имеют свойства, аналогичные свойствам многочленов Лежандра (это их конечно-разностные аналоги). Интерполяционная формула Чебышева при $h = \frac{1}{n}$ и бесконечно большом n приводит к разложению в ряд по многочленам Лежандра, если же $h = \frac{1}{n^2}$ и n бесконечно велико — к ряду Маклорена. Из этой формулы Чебышев получает

$$\int_0^1 u^2 dx = \left(\int_0^1 u dx \right)^2 + \frac{3}{4^2} \left(\int_0^1 x(1-x) \frac{du}{dx} dx \right)^2 + \frac{5}{4^2 \cdot 2^2} \left(\int_0^1 x^2(1-x)^2 \frac{d^2 u}{dx^2} dx \right)^2 + \frac{7}{4^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} \left(\int_0^1 x^3(1-x)^3 \frac{d^3 u}{dx^3} dx \right)^2 + \dots,$$

Интерполяционная формула Чебышева весьма удобна для вычисления u , поскольку ее члены, подобно членам интерполяционной формулы Ньютона, содержат разности Δu_i , $\Delta^2 u_i$, $\Delta^3 u_i$, ... возрастающих порядков и эти члены можно последовательно вычислять один за другим, пока не будет достигнута требуемая точность.

Основное внимание во второй статье уделено изложению способа последовательного нахождения членов интерполяционной формулы для неравноотстоящих узлов

$$u = K_0 \psi_0(x) + K_1 \psi_1(x) + K_2 \psi_2(x) + \dots,$$

где $K_0, K_1, K_2, \dots$ — постоянные коэффициенты; $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ — знаменатели подходящих дробей суммы $\sum_1^n \frac{1}{x - x_i}$. По этому способу в ходе вычислений одновременно определяется средняя ошибка, с которой найденные члены интерполяционной формулы представляют значения u , а по ее величине — тот член формулы, на вычислении которого можно остановиться, чтобы достичь требуемой точности вычислений. При выводе основных формул счета Чебышев от разложения в непрерывные дроби вида

$$\frac{a_1}{x - b_1} - \frac{a_2}{x - b_2} - \frac{a_3}{x - b_3} - \dots$$

переходит к разложению в ряды вида

$$\frac{(\lambda, \lambda)}{x^{\lambda+1}} + \frac{(\lambda, \lambda+1)}{x^{\lambda+2}} + \frac{(\lambda, \lambda+2)}{x^{\lambda+3}} + \dots$$

При этом оказывается, что

$$(\lambda, \mu) = (\lambda-1, \mu+1) - b_\lambda(\lambda-1, \mu) - a_\lambda(\lambda-2, \mu),$$

причем

$$\begin{aligned} (0, 0) &= \sum x_i^0 (= n), \quad (0, 1) = \sum x_i, \\ a_\lambda &= \frac{(\lambda-1, \lambda-1)}{(\lambda-2, \lambda-2)}, \quad b_\lambda = \frac{(\lambda-1, \lambda)}{(\lambda-1, \lambda-1)} - \frac{(\lambda-2, \lambda-1)}{(\lambda-2, \lambda-2)}, \\ a_1 &= (0, 0), \quad b_1 = \frac{(0, 1)}{(0, 0)}. \end{aligned}$$

Переходя непосредственно к определению коэффициентов $K_0, K_1, K_2, \dots$, он показывает, что

$$\sum x_i^\mu \psi_\lambda(x_i) = 0$$

при $\mu < \lambda$ и $\sum x_i^\mu \psi_\lambda(x_i) = (\lambda, \mu)$ при $\mu \geq \lambda$; такие выражения получили наименование моментов и нашли в дальнейшем разнообразные применения в математическом анализе. С их помощью Чебышев и получает решение задачи. Сравнивая предложенные им способы вычислений со способами, применявшимися ранее, — обычным способом наименьших квадратов и способом интерполирования Коши, он показывает, что при вычислениях по его способу приходится выполнять гораздо меньше арифметических действий, прежде всего умножений и делений, чем при вычислениях по этим двум способам, дающих тот же порядок точности.

В третьей статье результаты, касающиеся представления $F(x)$ в виде разложения по знаменателям подходящих дробей, получаемых разложением выражения $\sum \frac{\Theta^2(x_i)}{x-x_i}$ в непрерывную дробь, переносятся на случай непрерывного изменения независимой переменной. Чебышев пишет: «Если предположим значения $x_1, x_2, \dots, x_n$ равноотстоящими, бесконечно близкими между собой, и сделаем $x_1 = -1, x_n = +1$ »³⁷, то, положив $\Theta^2(x) = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-x^2}}$ и $\Theta^2(x) = x_2 - x_1$, приведем сумму $\sum \frac{\Theta^2(x_i)}{x-x_i}$ к интегралам

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{x-u} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du &= \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}, \\ \int_{-1}^{+1} \frac{du}{x-u} &= \log \frac{x+1}{x-1}, \end{aligned}$$

³⁷ П. Л. Чебышев. Полн. собр. соч. Т. 2, стр. 335.

соответственно. Это приводит его к известным ранее разложениям: разложению Фурье по косинусам и разложению по многочленам Лежандра соответственно. Делая другие «частные предположения относительно ряда значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ и вида функции $\Theta(x)$ », Чебышев приходит к двум новым случаям, связанным с разложениями

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\frac{k}{\pi}} e^{-ku^2}}{x-u} du \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ke^{-ku}}{x-u} du$$

в непрерывную дробь. В первом случае

$$\psi_l(x) = e^{kx^2} \frac{d^l e^{-kx^2}}{dx^l},$$

во втором

$$\psi_l(x) = e^{kx} \frac{d^l x^l e^{-kx}}{dx^l}.$$

Отметив основные свойства этих многочленов, получивших в дальнейшем название многочленов Чебышева — Эрмита и многочленов Чебышева — Лагерра соответственно³⁸, он записывает формулы разложения функций по этим многочленам, которые при $k = \infty$ сводятся к разложению Маклорена, а также устанавливает другие формулы.

В рассмотренных работах помимо подробной разработки весьма важного в прикладном анализе метода среднеквадратичного интерполирования Чебышев заложил основы общей теории ортогональных многочленов. Разработанный им общий метод исследования — метод непрерывных дробей — оставался основным в этой области в течение длительного времени. Дальнейшее применение и развитие его можно найти в последующих работах Чебышева и в работах его учеников.

При большом числе наблюдений интерполирование по способу наименьших квадратов требует слишком длинных вычислений и его практическое применение становится затруднительным. Рассматривая этот случай в мемуаре «Об интерполировании в случае большого числа данных, доставленных наблюдениями» (1859 г.), вышедшем через год после небольшой заметки «Об интерполировании величин, доставленных наблюдениями», где кратко изложено его содержание, Чебышев отказывается от использования способа наименьших квадратов и разложений по (ортогональным) многочленам и предлагает для этого случая новый способ интерполирования. Полученную интерполяционную формулу он записывает в виде

$$f(z) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h f(x) d(x) - \left[\int_{-h}^0 f(x) dx - \int_0^h f(x) dx \right] \frac{z}{h^2} +$$

³⁸ После Чебышева (1859 г.) эти многочлены изучались Эрмитом (1864 г.) и Лагерром (1879 г.).

$$+ \left[\int_{-h}^{-\frac{1}{2}h} f(x) dx - \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} f(x) dx + \int_{\frac{1}{2}h}^h f(x) dx \right] \frac{2z^2 - \frac{3}{2}h^2}{h^3} -$$

$$- \left[\int_{-h}^{-\frac{1}{2}h} f(x) dx - \int_{-\frac{1}{2}h}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{1}{2}h} f(x) dx \right] \frac{4z^3 - 2h^2z}{h^4} + \dots,$$

где $f(z_1), f(z_2), f(z_3), \dots, f(z_i); z_1 = -h, z_i = +h$ считаются заданными. Применения нового метода интерполирования Чебышев иллюстрирует подробно рассмотренными примерами.

Метод интерполирования, предложенный Чебышевым в рассмотренных двух его работах, не нашел практического применения. Однако ценные идеи, высказанные в них, получили впоследствии дальнейшее теоретическое развитие.

Подробному рассмотрению формулы интерполирования по способу наименьших квадратов, приведенной в мемуаре «О непрерывных дробях», в применении к практически особо важному случаю равноотстоящих значений независимой переменной посвящена статья Чебышева «Об интерполировании» (1864 г.). Взяв в качестве равноотстоящих значений x вместо $h, 2h, \dots, nh$ числа $0, 1, 2, \dots, n-1$, Чебышев достигает наибольшей простоты как в выводах, так и в практическом применении получаемых результатов. Большое внимание в статье уделено изучению свойств знаменателей $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots$ подходящих дробей, получаемых от разложения суммы

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \dots + \frac{1}{x-n+1}$$

в непрерывную дробь требуемого вида. Интерполяционная формула Чебышева, как указывалось, дает разложение по таким функциям. В данном случае оказывается, что эти функции могут быть определены без использования непрерывных дробей благодаря своим замечательным

свойствам, и прежде всего тому свойству, что $\sum_0^n \psi_\mu(i) \psi_\lambda(i) = 0$ при $\mu < \lambda$ (свойство ортогональности на совокупности равноотстоящих значений). Чебышев получает

$\psi_\lambda(x) = C_\lambda \Delta^\lambda x(x-1) \dots (x-\lambda+1)(x-n)(x-n-1) \dots (x-n-\lambda+1)$,
или, короче,

$$\psi_\lambda(x) = C_\lambda \Delta^\lambda(x),$$

где C_λ — некоторый коэффициент. Аналогичные преобразования сумм $\sum_0^n \psi_\lambda(i) u_i$ и $\sum_0^n \psi_\lambda^2(i)$, входящих в коэффициенты интерполяционной формулы, позволяют первую из них выразить посредством конечных раз-

ностей $\Delta^\lambda u_i$, а для второй получить окончательное выражение. В результате интерполяционная формула принимает вид

$$u = \frac{\sum_0^n u_i}{n} + \frac{3 \sum_0^n (i+1)(n-i-1) \Delta u_i}{1^2 \cdot n \cdot (n^2 - 1^2)} \Delta x (x - n) + \\ + \frac{5 \sum_0^n (i+1)(i+2)(n-i-1)(n-i-2) \Delta^2 u_i}{1^2 \cdot 2^2 \cdot n (n^2 - 1^2) (n^2 - 2^2)} \times \\ \times \Delta^2 x (x - 1)(x - x_n) \times (x - n - 1) + \dots$$

Далее Чебышев продолжает изучение свойств полиномов $\Delta^\lambda(x)$, названных впоследствии его именем. Он устанавливает формулу, более удобную, чем полученное ранее явное выражение, для последовательного вычисления $\Delta^\lambda(x)$,

$$\Delta^{\lambda+1}(x) = (2\lambda + 1)(2x - n + 1) \Delta^\lambda(x) - \lambda^2(n^2 - \lambda^2) \Delta^{\lambda-1}(x),$$

и, исходя из того, что $\Delta^0(x) = 1$ и $\Delta^1(x) = 2x - n + 1$, получает выражения

$$\Delta^2(x) = 3(2x - n + 1)^2 - n^2 + 1, \\ \Delta^3(x) = 15(2x - n + 1)^3 - 3(3n^2 - 7)(2x - n + 1), \\ \Delta^4(x), \Delta^5(x) \text{ и т. д.}$$

Эти функции удовлетворяют уравнению в конечных разностях

$$(x + 2)(x + 2 - n) \Delta^2 Y + (2x + 3 - n - \lambda^2 - \lambda) \Delta Y - \lambda(\lambda + 1) Y = 0,$$

где λ — степень Y . В заключение для суммы $\sum d_\lambda^2$ квадратов разностей между данными значениями u и вычисленными по интерполяционной формуле, оборванной на λ -м члене, выведена формула

$$\sum d_\lambda^2 = \sum d_{\lambda-1}^2 -$$

$$\frac{(2\lambda + 1) \left(\sum_0^n (i+1)(i+2) \dots (i+\lambda)(n-i-1)(n-i-2) \dots (n-i-\lambda) \Delta^\lambda u_i \right)^2}{1^2 \cdot 2^2 \dots \lambda^2 \cdot n(n^2 - 1^2)(n^2 - 2^2) \dots (n^2 - \lambda^2)},$$

с помощью которой удобно последовательно вычислять среднеквадратичную погрешность до получения требуемой точности приближения. Формула интерполирования по способу наименьших квадратов в том виде, который ей придал Чебышев в рассматриваемой работе, без существенных изменений вошла в учебную литературу.

Обобщая задачу параболического интерполирования по способу наименьших квадратов, Чебышев поставил новую задачу, рассмотрению которой посвятил большую работу «О наибольших и наименьших величинах сумм, составленных из значений целой функции и ее производных» (1867 г.). В ней речь идет об определении полинома $y = A_0 + A_1 x + \dots + A_{m-1} x^{m-1}$, доставляющего наибольшее или наимень-

шее значение сумме $\sum F(x_i, y_i, y'_i, y''_i, \dots)$, распространенной на ряд каких-нибудь значений x : $x_1, x_2, x_3, \dots$ (F — какая-нибудь данная целая функция x неизвестного полинома y и его производных $y', y'', \dots$). Нахождение требуемого полинома y аналогично решению подобных вопросов в вариационном исчислении и тогда, когда сумма приводится к интегралу, полином y можно рассматривать как приближенное выражение функции, доставляющей наибольшее или наименьшее значение соответствующему интегралу. Этим замечанием Чебышев в некотором смысле предвосхитил сложившееся позднее новое направление в вариационном исчислении, связанное с развитием прямых методов решения его задач.

В простейшем случае, когда рассматриваемые функции содержат y в степенях не выше второй, а его производные $y', y'', \dots$ — в степени не выше первой и с коэффициентами, зависящими только от x , поставленная Чебышевым задача сводится к нахождению полинома y степени $m - 1$, такого, что разность $uy - v$, где u и v — функции только x , с точностью до степеней x^{-m} включительно равняется целой функции. Такой полином легко получается при помощи ряда, приведенного Чебышевым в рассмотренной выше работе «Разложение в ряды при помощи непрерывных дробей». В качестве примеров дано определение полинома y при условии наибольшей или наименьшей величины суммы $\sum \frac{1}{2} (y_i - f(x_i))^2 \Theta(x_i)$ как в случае произвольных коэффициентов полинома y , так и в случае, когда один из его коэффициентов предполагается заданным. Таким образом, еще раз выведена формула параболического интерполирования по способу наименьших квадратов. Этот же способ использован Чебышевым в работе «Об определении функций по значениям, которые они имеют при некоторых величинах переменной» (1870 г.) для нахождения функции u по n ее значениям в виде простейшей иррациональной функции, а именно функции, удовлетворяющей уравнению $u^2 + Lu - M = 0$, где L и M — полиномы возможно меньших степеней.

Последней работой Чебышева по интерполированию была статья «Об интерполировании величин равноотстоящих» (1875 г.). В ней новым моментом по сравнению со статьей 1864 г. является систематическое использование гамма-функции, для которой получены некоторые интересные соотношения. Выведена также формула для конечной разности произвольного порядка самого интерполяционного полинома.

Работы Чебышева по теории интерполирования составляют важный вклад в эту область математических знаний, тесно связанную с приложениями. Они имеют большое теоретическое значение, поскольку в них не только существенно развиты принципиальные вопросы теории интерполирования, но и заложены основы общей теории специальных полиномов. Многие результаты Чебышева по теории интерполирования почти сразу находили практическое применение в баллистике, а затем и в других областях прикладных знаний. В дальнейшем они оказались особенно ценными для математической статистики и получили международное признание.

Работы по прикладным вопросам

Внимание Чебышева привлекали кроме теоретических вопросы прикладного характера, главным образом по теории механизмов и машин. Интересовался он также приложениями математики в астрономии. Так, теоретические рассуждения статьи «О ряде Лагранжа» (1857 г.)³⁹ он применил к изучению решения классической задачи астрономии о разложении эксцентрической аномалии планеты и ее радиуса-вектора по возрастающим степеням эксцентриситета. Чебышев поставил задачу о существовании форм равновесия вращающейся жидкости, отличных от эллипсоидальных, и предложил ее Е. И. Золотареву, С. В. Ковалевской и А. М. Ляпунову. Последний в результате многолетних глубоких исследований дал ее строгое решение. Чебышев показал (1876 г.), как, пользуясь его способом интерполирования, можно определять орбиты планет по многим наблюдениям, отметив при этом практические преимущества такого решения задачи. Его внимание привлекал также один из важнейших в небесной механике вопрос о разложении в ряд пертурбационной функции, с помощью которой изучаются возмущения планет.

Темой доклада Чебышева «О кройке одежды», прочитанной в 1878 г. на VII сессии Французской ассоциации содействия преуспеваю наукам, был вопрос о кройке материи при изготовлении одежды или вообще оболочек каких бы то ни было тел⁴⁰. Выведенные им формулы позволяют найти кривые, по которым следует выкраивать различные куски материи, чтобы сделать оболочку какого-нибудь тела. Применение полученных формул Чебышев проиллюстрировал на шаре. В дальнейшем его рассуждения получили теоретическое развитие. Введенная им криволинейная сеть на поверхности, получившая известность под названием сети Чебышева, оказалась весьма важной для теории поверхностей.

Среди работ Чебышева по прикладным вопросам особое место занимают исследования по теории механизмов. С 1862 по 1889 г. их вышло 15. Большинство из них посвящено механизмам, осуществляющим превращение кругового движения в движение, возможно более близкое к прямолинейному, и прямолинейного движения в движение, возможно более близкое к круговому. Такого рода механизмы получили название параллелограммов. К этому времени практически применялись сокращенный и полный параллелограммы Уатта и параллелограмм, названный механизмом Эванса. Они обеспечивали прямолинейное движение с точностью не выше пятой степени. Предложенные Чебышевым парал-

³⁹ В статье на основе видоизменения формулы интегрирования по частям дан вывод ряда Лагранжа, аналогичный соответствующему выводу ряда Тейлора, и тем же приемом получено соответствующее разложение для случая двух уравнений. Разложения записываются в символическом виде.

⁴⁰ П. Л. Чебышев. Полн. собр. соч. Т. 5, стр. 165—170.

лелогограммы давали точность от шестой до восьмой степени. Простейший из них имеет те же части, что и сокращенный параллелограмм Уатта; разница состоит в направлении рычагов, вращающихся около неподвижных осей: у Чебышева они направлены в одну сторону и между собой перекрещиваются.

Чебышев показал также (1870 г.), как можно создать параллелограмм с тем же числом частей, что и полный параллелограмм Уатта, который даст прямолинейное движение с точностью до 13-й степени. Прибавление к нему двух прямолинейных звеньев позволяет довести точность до 27-й степени, еще двух — до 55-й и т. д. Основное внимание Чебышев уделил параллелограммам, симметрическим относительно одной оси, в которых точка, дающая желаемое движение, находится на перпендикуляре к среднему стержню, проведенном через его середину. Это привело его к механизму, где средний стержень заменен треугольником, две вершины которого соединены с концами вращающихся стержней, а третья дает желаемое движение.

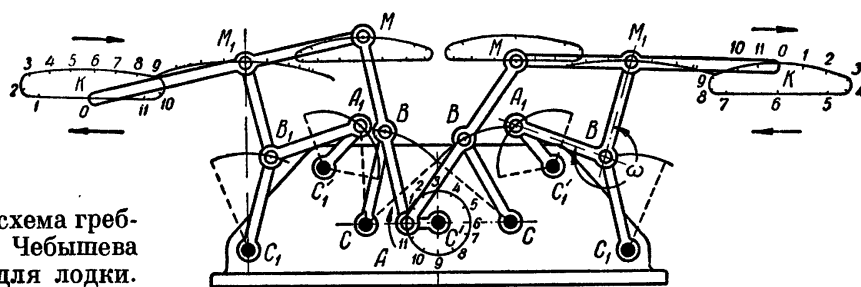
Таким образом, работы Чебышева по теории механизмов относятся к задаче метрического синтеза шарнирных механизмов — одной из труднейших задач этой теории, допускающей вообще лишь приближенное решение. Точное ее решение возможно только в некоторых частных случаях. Примером может служить прямолинейно-направляющий механизм, к которому пришли Поселье и ученик Чебышева Липкин.

При исследовании задачи метрического синтеза шарнирных механизмов Чебышев исходил из созданной им теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. Это позволило ему разработать аналитические методы для получения приближенного решения, являющегося вместе с тем наилучшим: под приближенным осуществлением механизмом заданной кривой он понимал получение такой другой кривой, которая в рассматриваемых пределах нигде не уклоняется от первой более чем на определенную величину. В дальнейшем получил распространение более простой, но менее точный подход, который основан на использовании интерполирования и при котором требуется, чтобы приближенная кривая пересекала заданную линию в возможно большем числе точек.

В последнее время в связи с возросшими требованиями к точности механизмов подход Чебышева привлекает к себе все большее внимание: всякий механизм, построенный по методу Чебышева, дает наилучшее приближение к осуществляемой функциональной зависимости по сравнению с любым другим механизмом такого же типа и аналогичного назначения. Задачи теории механизмов, поставленные и решенные Чебышевым, характеризуют его как крупнейшего ученого в области практической механики.

Привлекавшие внимание Чебышева задачи теории механизмов непосредственно вызывались техническими потребностями его времени, например задачи, рассмотренные в работах о центробежном регуляторе (1871 г.) и о зубчатых колесах (1872 г.). Математической основой этих работ также является теория наименее уклоняющихся от нуля функций,

Кинематическая схема гребного механизма Чебышева для лодки.



дополненная способом разложения в ряды, что встречается и в других исследованиях Чебышева по теории механизмов. В работе о центробежном регуляторе Чебышев выясняет, как лучше всего удовлетворить требованию изохронизма регулятора, заключающемуся в том, чтобы скорость вращения оставалась одинаковой при всех возможных положениях подвижной муфты. В работе о зубчатых колесах он дает решение задачи о приближенном построении формы зуба с помощью дуг окружностей, при котором отношение угловых скоростей колес остается постоянно возможно более близким к требуемой величине.

Исследования Чебышева по теории механизмов содержат также важные результаты, касающиеся общих вопросов построения плоских механизмов, их структуры и кинематики. Теоретические исследования его в этой области открывали широкие возможности для создания новых устройств. В настоящее время известны модели и описания 41 механизма из числа разработанных самим Чебышевым.

Чебышев предложил много направляющих механизмов — круговых и прямолинейно-направляющих, а также механизмов для превращения вращательного движения в колебательное и наоборот, для движения с остановками, механизмы, порождающие другие поразительные виды движения, в том числе «парадоксальный» механизм, в котором ведомое звено за один оборот кривошипа совершает при вращении в одном направлении четыре оборота, а в другом — два, сложные механизмы различного назначения — кулисный механизм паровой машины, механизм самокатного кресла, гребной механизм для лодки, «переступающий механизм» («стопоходящая машина»). Последние два механизма использовались им в практических целях. Можно назвать еще механизм весов, измеритель кривизны, линейку для измерения кривизны, лекало для черчения дуг окружностей большого диаметра, а также счетную машину с непрерывным движением. Механизмы Чебышева экспонировались на многих выставках, в том числе международных, и всегда привлекали к себе внимание.

К созданию счетной машины Чебышева побудили недостатки в счетном приборе, предложенном в 1876 г. Буняковским под названием самосчетов для выполнения сложения и вычитания чисел. В этом же году появилась первая модель счетной машины Чебышева, предназначенная, как и вторая, более совершенная (1878 г.), для сложения и вычитания чисел. Характерной особенностью обеих моделей было дости-

жение непрерывной передачи цифр от одного разряда к другому. Машина Чебышева выгодно отличалась от существовавших в то время счетных машин с прерывным изменением цифр от разряда к разряду, которые имели значительные конструктивные недостатки. (Таких недостатков, правда, не имел арифмометр, изобретенный в Петербурге Однером в 1874 г. и получивший в дальнейшем широкое распространение.) В 1881 г. Чебышев создал приставку к своей счетной машине, позволившую выполнять на ней также умножение и деление чисел. Его арифмометр, вероятно, получился бы более совершенным, если бы создавался сразу для выполнения всех четырех арифметических действий.

Творчество Чебышева в области теории механизмов оригинально. Своими работами он значительно опередил всех современников и положил начало науке о механизмах в России.

ГЛАВА ШЕСТАЯ

МАТЕМАТИКА

В ПЕТЕРБУРГЕ В 60—80-х годах XIX в.

С. В. КОВАЛЕВСКАЯ

1

Социально-экономическое и культурное развитие России. Математическая деятельность Петербургской академии наук

Отмена в 1861 г. крепостного права в России открыла путь для развития капиталистического способа производства. За крестьянской реформой последовали другие реформы, обусловленные изменениями социально-экономических отношений в стране. Они, хотя и носили незавершенный характер, способствовали развитию капитализма в России. «На смену крепостной России шла Россия капиталистическая»¹. Складывались новые классы общества — пролетариат и буржуазия.

В пореформенное время ускоренно развивалось производство, росли новые производительные силы. «И после 61-го года развитие капитализма в России пошло с такой быстротой, что в несколько десятилетий совершались превращения, занявшие в некоторых странах Европы целые века»². Значительную роль в этом развитии сыграло использование Россией, молодой капиталистической страной, опыта и технических достижений других капиталистических государств.

В стране происходил промышленный переворот. «Россия сохи и цепа, водяной мельницы и ручного ткацкого станка стала быстро превращаться в Россию плуга и молотилки, паровой мельницы и парового ткацкого станка»³. К концу 70-х годов в ведущих отраслях крупной промышленности машина вытеснила ручной труд на второстепенные позиции. Особенно быстро развивалась тяжелая промышленность. Так, с 1860 по 1890 г. добыча угля увеличилась в 20 раз, выплавка чугуна — почти в три раза, производство железа и стали — в четыре. Возникла нефтяная промышленность, быстро развивалось машиностроение. Важным фактором капиталистического развития явился бурный рост железнодорожного строительства. Протяженность железных дорог с 1860 по 1890 г. увеличилась с 1587 до 25 847 км. Развивалось также речное и морское

¹ В. И. Ленин. Полн. собр. соч. Т. 20, стр. 141.

² Там же, стр. 174.

³ В. И. Ленин. Полн. собр. соч. Т. 3, стр. 597—598.

пароходство. Это позволило втянуть в торговый оборот самые отдаленные районы страны. Натуральное крестьянское хозяйство превращалось в товарное.

Интенсивное капиталистическое развитие страны выдвинуло вопрос о подготовке специалистов для промышленности, сельского хозяйства, торговли. Кроме того, движение передовой части русского общества вынуждало царское правительство идти на некоторые уступки в виде отдельных реформ. В начале 60-х годов были проведены реформы во всех областях народного образования. Гимназический устав 1864 г. предусматривал два типа гимназий — классические, с преподаванием латинского и греческого языков, и реальные, учебные планы которых не включали древние языки, что позволяло расширить курс математики и естествознания. Право поступления в гимназию формально предоставлялось детям лиц всех сословий, званий и вероисповеданий, однако высокая плата за учение лишала детей трудящихся возможности воспользоваться этим правом. После окончания классической гимназии можно было без экзамена поступить в университет, а после окончания реальной гимназии — только в высшее техническое учебное заведение. Появились женские гимназии, однако программа обучения в них была уже, чем в мужских.

Университетский устав 1863 г. формально провозглашал восстановление автономии внутри университетов. Самоуправление должно было осуществляться советами университета и факультетов, которые избирали ректора (на четыре года) и деканов (на три года). Совету университета формально предоставлялось право решать все дела по университету либо окончательно, либо с утверждением попечителя учебного округа или министра народного просвещения, оставлять при университете стипендиатов для приготовления к профессорскому званию, а с утверждением министра — отправлять молодых людей за границу для приготовления к занятию кафедр. Наряду со штатными должностями профессоров и доцентов вводились нештатные должности приват-доцентов. Университеты получили право присвоения ученых степеней кандидата, магистра и доктора, причем для соискателей докторской степени были отменены соответствующие испытания. Избранные советом профессора утверждались министром, другие преподаватели — попечителем. Занятия в университете могли посещать кроме студентов посторонние слушатели. Женщины в университеты не допускались. По возможности они получали высшее образование за границей. В 60—70-х годах было разрешено открывать на частные средства общеобразовательные курсы для женщин. Так появились Лубянские курсы в Москве (1869 г.), Владимирские курсы в Петербурге и курсы в Киеве (1870 г.), Высшие женские курсы в Москве (1872 г.), в Казани (1876 г.), в Киеве и Петербурге (1878 г.). Изучались в них словесно-исторические и физико-математические науки.

Уставом 1863 г. число кафедр на физико-математических факультетах университетов было увеличено до 12 (при 16 профессорах и трех доцентах). Это были кафедры чистой математики, механики, аналитической и практической астрономии и геодезии, физики, химии, минералогии,

физической географии, геогнозии и палеонтологии, ботаники, зоологии, технической химии и агрономической химии.

Развитию науки и просвещения во многом способствовали различные научные общества при университетах. Особенно широкую деятельность развернули общества естествоиспытателей, круг интересов которых охватывал и физико-математические науки. В 1864 г. было основано Московское математическое общество, сыгравшее очень большую роль в развитии отечественной математики. В 1879 г. начало свою деятельность Харьковское математическое общество. В других городах образовались физико-математические отделения местных обществ естествоиспытателей. Наряду с университетскими периодическими изданиями, охватывавшими все отрасли знаний, стали выходить журналы, издававшиеся обществами. «Математический сборник» Московского математического общества (основан в 1866 г.) вскоре стал ведущим отечественным журналом по математическим наукам. Широкую известность приобрели «Сообщения Харьковского математического общества» (начало издания — 1879 г.).

Большое значение для прогресса науки и просвещения в России имели съезды ученых, одно из проявлений общественно-демократического движения 60-х годов. Особую роль играли всероссийские съезды естествоиспытателей и врачей, которые несмотря на препятствия, чинившиеся официальными кругами, проводились в университетских городах России. Подготовка съездов и их проведение осуществлялись физико-математическими факультетами университетов. Первый съезд русских естествоиспытателей состоялся в Петербурге (1867—1868 гг.), второй — в Москве (1869 г.), третий — в Киеве (1871 г.), четвертый — в Казани (1873 г.), пятый — в Варшаве (1876 г.), шестой — в Петербурге (1879 г.), седьмой — в Одессе (1883 г.), восьмой — в Петербурге (1889—1890 гг.). На каждом съезде работала математическая секция, где рассматривались также вопросы механики и астрономии. Наряду с учеными и преподавателями высших учебных заведений в работе математической секции съездов принимали участие многие преподаватели средней школы. Съезды способствовали развитию и распространению научных знаний.

Реформа 1861 г. привела к дальнейшему обнищанию крестьян. Ответом на нее были массовые волнения во многих губерниях России. Революционная борьба против самодержавия продолжалась. В начале 60-х годов ее возглавляли революционеры-демократы. Однако их надежды на крестьянскую революцию не оправдались. Царизм устоял перед натиском демократических сил. Новый революционный подъем наметился с начала 70-х годов, и на первый план выступило народничество. Но народники проявили непонимание роли народных масс в революционном движении. Неудачи хождения «в народ» вскоре привели к тому, что основным направлением их деятельности стали террористические акты. Апогеем деятельности народников было убийство Александра II, после чего страну захлестнула волна реакции.

Делая уступки революционному движению в периоды его подъема, царские круги не медлили в проведении реакционных мер как только

наступал его спад. Это особенно было характерно для политики царского правительства в области просвещения. С назначением министром народного просвещения одного из столпов реакции графа Д. А. Толстого началась подготовка к пересмотру университетского устава 1863 г. Расширился надзор за студентами в высших учебных заведениях, для его осуществления в 1879 г. была введена специальная инспекция, не зависящая от профессорской коллегии. Устав 1884 г. воскрешал и даже усиливал худшие стороны университетского устава николаевского времени. Протестуя против произвола реакции, лучшие профессора уходили из университетов. Замещение должностей по уставу 1884 г. стало проводиться по назначению, а не путем избрания. В 1886 г. прекратился прием на все высшие женские курсы, кроме Бестужевских курсов в Петербурге, где число слушательниц было ограничено до 400. Для изменения социального состава учащихся средних учебных заведений в 1887 г. запрещалось принимать в гимназии детей кучеров, лакеев, поваров, прачек, мелких лавочников и т. п. Были закрыты многие либеральные издания.

В постоянной острой борьбе нового со старым, прогрессивного с реакционным шло развитие пореформенной России. Оно в значительной степени определялось объективными закономерностями развития в стране капиталистического способа производства и капиталистических производственных отношений. Потребности капиталистического развития обусловили постепенное распространение технических и естественных знаний, привлекали внимание многих ученых к исследованиям в области технических и естественных наук. Примером могут служить работы Д. К. Чернова (1839—1921), разработывавшего научные основы металлургии, И. А. Тиме (1838 — 1920) по теории резания металлов и дерева, Н. П. Петрова (1836—1920) по изучению трения и смазки, И. А. Вышнеградского (1831—1895) по вопросам автоматического регулирования. Исследования А. Г. Столетова (1839—1896) в области магнетизма послужили основой для разработки методов расчета электрических машин. Обобщением мировой науки в области химии явилась периодическая система элементов Д. И. Менделеева (1834—1907). Бурно развивалось и естествознание, обогатившее мировую науку трудами И. М. Сеченова (1829—1905) по физиологии, И. И. Мечникова (1845—1916) по микробиологии и бактериологии, А. О. Ковалевского (1840—1901) по сравнительной эмбриологии, К. А. Тимирязева (1849—1920) по фотосинтезу.

Важным этапом в развитии отечественной математики явилось создание П. Л. Чебышевым в пореформенное время петербургской математической школы. Под его руководством объединилась творческая деятельность математиков Петербурга, прежде всего ученых Петербургской академии наук и Петербургского университета. Характерной чертой деятельности представителей петербургской математической школы является тесная связь науки с практикой. С течением времени эта школа стала оказывать большое влияние на развитие математики во всей стране.

Возросло количество печатных работ отечественных математиков

как в русских, так и в зарубежных изданиях. Расширилось преподавание математики в университетах: увеличилось число общих курсов, появились новые специальные курсы. Наряду с лекционными проводились в небольшом объеме практические занятия, были сделаны первые попытки проведения семинарских занятий. Расширились курсы математики в технических и военных высших учебных заведениях. Пополнилась и учебная литература по математике. Появились руководства по дифференциальному и интегральному исчислениям — Рощина, Алексеева, по аналитической геометрии — Андреева, по высшей алгебре — Сохоцкого, затем Ващенко-Захарченко, по вариационному исчислению — Летникова, по теории вероятностей — Ермакова и др.

60—80-е годы были весьма плодотворными для петербургской математической школы. Это были годы интенсивного научного творчества П. Л. Чебышева, О. И. Сомова, А. Н. Коркина, Е. И. Золотарева, а также других математиков. Механику в ней представляли: О. И. Сомов, его сын П. О. Сомов, М. Ф. Окатов, читавший практическую механику в университете, где он организовал кабинет практической механики, Н. С. Будаев и др. В 1876 г. в университете начал читать лекции по механике Д. К. Бобылев. Его учениками были А. М. Ляпунов и Г. К. Суслев. К 1868 г. относится начало научной деятельности Ю. В. Сохоцкого. В 70-х годах в университет пришел К. А. Поссе, в 1880 г. — А. А. Марков, а в 1882 г. — И. Л. Пташицкий. В 1879 г. в Академию наук был избран профессор Харьковского университета В. Г. Имшенецкий. Одновременно он начал читать математику на высших женских курсах и в технологическом институте.

Наиболее значительную роль в развитии отечественной математики продолжала играть Академия наук. В ее деятельности наметились новые пути. В 1864 г. была организована комиссия под председательством вице-президента академии В. Я. Буняковского для выработки нового устава. По новому уставу увеличивалось число академических кафедр, в частности предусматривались новые кафедры математической физики и практической механики. Проект устава был отпечатан и разослан для ознакомления и обсуждения во все университеты России. Были высказаны существенные замечания и предложения. В частности, все университеты считали необходимым запретить допуск иностранцев к избранию в академики и предлагали публиковать издания Академии наук только на русском языке.

Несмотря на реакционное давление властей, одним из проявлений которого было намеренное забаллотирование Д. И. Менделеева на выборах в члены Академии наук в 1880 г., научное творчество в академии продолжало развиваться весьма интенсивно. В это время академические кафедры по математическим наукам занимали П. Л. Чебышев, В. Я. Буняковский, Д. М. Перевощиков (экстраординарный академик с 1855 г.), О. И. Сомов, Е. И. Золотарев (адъюнкт по математике с 1876 г., экстраординарный академик с 1878 г.), Н. Н. Алексеев (адъюнкт по математике с 1879 г.), В. Г. Имшенецкий (ординарный академик с 1881 г.).

В числе членов-корреспондентов Академии наук были видные русские математики — профессор Московского университета президент Московского математического общества Н. В. Бугаев, профессор Харьковского, а затем Московского университета К. А. Андреев (с 1884 г.), профессор Московского технического училища А. В. Летников (с 1884 г.), профессор Киевского университета В. П. Ермаков (с 1884 г.) и др. В 1889 г. членом-корреспондентом Академии наук была избрана С. В. Ковалевская.

Одним из стимулов научного творчества являлось присуждение Демидовской премии (до 1865 г.), которой были удостоены также многие выдающиеся математики, и премии им. Буняковского за математические работы. Немаловажное значение для научной работы в академии имела связь с иностранными учеными, в организации которой большую роль сыграл П. Л. Чебышев. При его содействии членами-корреспондентами Петербургской академии наук в этот период были избраны видные иностранные математики, в том числе Вейерштрасс и Адамс (1864 г.), Кели (1870 г.), Кронекер и Сильвестр (1872 г.), Бьенэме (1874 г.), Борхардт (1879 г.), Каталан (1881 г.), Бриоски (1884 г.).

Труды П. Л. Чебышева и других членов Академии наук освещены достаточно подробно в других главах настоящего тома. Поэтому здесь остановимся лишь на работах академика Д. М. Перевощикова, написанных им в рассматриваемый период. После выхода в отставку он переехал в Петербург и с 1855 г. занялся исключительно научной деятельностью. Основные его труды, как упоминалось выше, относятся к астрономии. По математике он написал статьи об интегрировании функций, которые были опубликованы в «Записках Академии наук» в 1867—1873 гг. Статьи эти не содержали собственных результатов автора и имели скорее методическое значение. В частности, в «Заметке об интегрировании рациональных дробей»⁴ Перевощиков стремился показать, что при интегрировании дробей следует обращать внимание на их происхождение, так как это может облегчить нахождение первообразной функции. Подобные идеи встречаются и в его статьях об интегрировании иррациональных дробей, двучленных дифференциалов, тригонометрических и логарифмических функций, дифференциалов со многими переменными. В работах Перевощикова приведено много исторических сведений по освещенным вопросам.

Кроме математических сочинений членов Академии наук в ее журналах были напечатаны также отдельные работы других ученых. Среди них статьи профессоров университетов — Петербургского — К. А. Поссе, Казанского — А. Ф. Попова, Новороссийского — Е. Ф. Сабина, Дерптского — Ф. Миндинга, Ф. Клаузена, П. Гельмлинга и А. Линдстедта, работы Л. Линделефа и Э. Бонсдорфа, мемуары Ш. Эрмита, Э. Каталана, К. Шарлье, Э. Люка, И. С. и М. Н. Ванечек и др. Развитию связей математиков Петербургской академии наук с математиками университетов и других высших учебных заведений особенно

⁴ Д. М. Перевощиков. Заметка об интегрировании рациональных дробей. — Записки Академии наук, 1867, т. 11, стр. 112—121; 1868, т. 12, стр. 23—28.

способствовало их совместное участие в съездах русских естествоиспытателей и врачей, а с зарубежными учеными — поездки за границу, печатание работ в иностранных журналах.

Петербургские математики приняли деятельное участие в издании «Энциклопедического словаря, составленного русскими учеными и литераторами». Словарь выходил в 1861—1863 гг. Одним из его издателей был ученик М. В. Остроградского, профессор математики Артиллерийской академии, в дальнейшем известный публицист и видный общественный деятель П. Л. Лавров. В выпущенных шести томах словаря помещены статьи математического содержания академиков П. Л. Чебышева, М. В. Остроградского, В. Я. Буняковского, О. И. Сомова. Эти статьи свидетельствуют о том, что их авторы глубоко интересовались вопросами истории математических знаний, принимали участие в их распространении среди широкого круга читателей.

В этой главе освещается деятельность академиков О. И. Сомова и В. Г. Имшенецкого, ближайших учеников П. Л. Чебышева — А. Н. Коркина и Е. И. Золотарева, а также С. В. Ковалевской, развитие математики в Петербургском университете, воспитанники которого были основным пополнением петербургской математической школы, и в петербургских высших технических и специальных учебных заведениях.

2

О. И. Сомов

Одним из выдающихся представителей школы М. В. Остроградского был О. И. Сомов⁵. Осип Иванович Сомов родился 13 (1) июня 1815 г. в с. Отрада Клинского уезда Московской губернии в дворянской семье. Среднее образование получил в Московской губернской гимназии. Заметив склонность юноши к изучению физико-математических наук, друг Сомовых профессор Московского университета Н. Д. Брашман посоветовал ему после окончания гимназии (1832 г.) поступить на физико-математический факультет университета. О. И. Сомов окончил в 1835 г. университет со степенью кандидата и приступил к работе над диссертацией «Теория определенных алгебраических уравнений». Диссертация (опубликована в 1838 г.) была удостоена Демидовской премии и принесла Сомову известность в ученом мире. «Это сочинение, — писал В. Я. Буняковский, — по полноте своей, верности взглядов, современности содержания, по изложению, отличающемуся особенной ясностью, простотой и отчетливостью, также по новым раз-

⁵ Кроме трудов О. И. Сомова в этом параграфе использованы следующие работы: Е. И. Золотарев. Об ученых трудах академика О. И. Сомова. — Записки императорской Академии наук, 1878, т. 31, стр. 248—266; Я. Л. Геронимус. Очерки о работах корифеев русской механики. ГИИТЛ, М., 1952, стр. 58—96; Т. Р. Никифорова. Осип Иванович Сомов. «Наука», М.—Л., 1964.

вениям разных алгебраических теорий, собственно принадлежащих автору, обратило на себя справедливое внимание всех отечественных математиков. Что же касается пользы, которую оно принесло изучающим математический анализ, и в особенности занимающимся преподаванием высших частей точных наук, то они единогласно засвидетельствуют, что распространением у нас новых алгебраических теорий и примечательных трудов Фурье, Штурма, Абеля, Коши и Остроградского мы обязаны преимущественно книге Сомова»⁶.

Педагогическую деятельность О. И. Сомов начал в 1839 г. в Московском коммерческом училище и дворянском институте. В 1841 г. он защитил магистерскую диссертацию «Об интегралах алгебраических иррациональных дифференциалов с одной переменной», которая в основном носит компилятивный характер, но содержит фундаментальное изложение интегрального исчисления, включая новые для того времени исследования Абеля и Якоби. Вскоре после защиты этой диссертации Сомов переехал в Петербург и получил место адъюнкта в Петербургском университете, где проработал 35 лет. Здесь он читал самые различные курсы по математике и механике. Его лекции были богаты по содержанию, оригинальны, излагавшиеся в них теории рассматривались с учетом последних для того времени научных достижений.

Научные интересы О. И. Сомова в этот период концентрируются главным образом на прикладной математике — аналитической механике и математической физике. В 1847 г. он защищает в Петербургском университете диссертацию «Аналитическая теория волнообразного движения эфира», в которой развивает и обобщает известные исследования Коши по оптике. За эту диссертацию О. И. Сомову присуждают вторично Демидовскую премию и присваивают ученую степень доктора чистой математики и астрономии. В этом же году его утверждают экстраординарным профессором кафедры прикладной математики университета. В 1851 г. Сомов получил в третий раз Демидовскую премию за книгу «Основания теории эллиптических функций», в которой дано полное и строгое изложение свойств эллиптических функций, методов их вычисления и приложений к геометрии и механике. Эта книга долгое время в Петербургском университете была учебным пособием по теории эллиптических функций, читанной сначала Сомовым, а затем Чебышевым. Сомову принадлежат также учебные руководства по аналитической и начертательной геометрии, элементарной алгебре и теоретической механике, сыгравшие большую роль в математическом образовании студентов и молодых преподавателей высших отечественных учебных заведений. Его руководство «Теоретическая механика», написанное в последние годы жизни, являлось лучшим учебником по теоретической механике своего времени. Переведенный на немецкий язык, этот учебник долгое время служил основой в преподавании теоретической механики также в европейских университетах.

В 1857 г. О. И. Сомов был избран членом-корреспондентом, а в 1862 г., после смерти М. В. Остроградского, — ординарным академи-

⁶ Е. И. Золотарев. Об ученых трудах академика О. И. Сомова. — Записки Академии наук, 1878, т. 31, кн. 2, стр. 251.

ком Петербургской академии наук. Ему принадлежит около 50 научных трудов, главным образом в области аналитической механики.

Умер О. И. Сомов 8 мая (25 апреля) 1876 г.

Из творческого наследия Сомова наибольший интерес представляет работа «Об алгебраическом уравнении, с помощью которого определяют-ся малые колебания системы материальных точек»⁷. Появление ее связано с существенной ошибкой, которую допустили основоположники теории малых колебаний механической системы около положения устойчивого равновесия Даламбер и Лагранж при анализе решения уравнения частот. Независимо друг от друга на эту ошибку указали Вейерштрасс и Сомов. Дифференциальные уравнения малых свободных колебаний консервативной материальной системы с идеальными голономными склерономными связями около положения устойчивого равновесия имеют вид



О. И. Сомов.

$$\sum_{s=1}^n (a_{js}q_s + c_{js}q_s) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

где a_{js} , c_{js} — некоторые постоянные, характеризующие кинетическую и потенциальную энергии; n — число степеней свободы системы. Если искать частное решение этой системы линейных и однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в виде

$$q_s = A_s \sin kt,$$

то можно прийти к заключению, что существование такого решения, соответствующего колебательному процессу, связано с выполнением условия

$$\Delta = \| c_{js} - k^2 a_{js} \| = 0,$$

которое называется уравнением частот. Можно доказать, что это уравнение имеет вещественные и положительные корни. Случай простых корней не вызывает принципиальных затруднений, ибо, найдя для каждой координаты q_s частные решения, соответствующие каждому корню,

⁷ Somoff J. Sur l'équation algébrique á l'aide de laquelle on détermine les oscillations très petites d'un système de points matériels.— Mém. de l'Acad. des Sci., 1859, ser. 7, t. 1, N 14.

и сложив их, получим общее решение рассматриваемой системы уравнений. Однако в случае появления кратных корней уравнения частот возникают, как это кажется на первый взгляд, принципиальные трудности, которые состоят в том, что в решении появляются секулярные члены, содержащие время вне знака тригонометрических функций $\sin kt$ или $\cos kt$ и, следовательно, неограниченно возрастающие с течением времени. Последнее обстоятельство противоречит устойчивости равновесия системы и должно быть исключено из рассмотрения. Так рассуждали Даламбер и Лагранж, а вслед за ними этот вывод повторили в своих исследованиях по устойчивости Солнечной системы Лаплас и Пуассон. Однако, как это оказалось в результате исследований Вейерштрасса и Сомова, основанных на теории линейных дифференциальных уравнений, решение уравнения частот и в случае кратных корней не содержит вековых членов, так что выводы Даламбера и Лагранжа являются иллюзорными.

В работах О. И. Сомова, посвященных взаимным приложениям геометрии и механики, исследуются вопросы об ускорениях различных порядков в абсолютном и относительном движениях материальной точки, которые в настоящее время приобретают интерес в связи с развитием теории автоматического управления, а также вопросы, относящиеся к теории криволинейной системы координат, комбинаторной топологии (теории комплексов), геометрии масс. Эти исследования, находящиеся на грани между соответствующими разделами математики и механики, являются большим вкладом в развитие обеих отраслей науки. Статья «Об ускорениях различных порядков»⁸ написана в 1864 г., под влиянием известной книги Резаля «Трактат о чистой кинематике»⁹. В ней Сомов последовательно развивает векторное исчисление, вводя понятие о соответствующих операциях векторной алгебры и векторного анализа. Пользуясь этим методом, он исследует геометрические свойства кривых с помощью кинематических характеристик движения материальной точки по рассматриваемым кривым как по своим траекториям.

Непосредственным развитием названной статьи является работа из этого же цикла «Об ускорениях различных порядков в относительном движении». Пользуясь тем же векторным методом исследования, Сомов распространяет полученные ранее результаты на случай, когда движение точки относится к подвижной системе координат. Он устанавливает теорему о связи между абсолютным, переносным и относительным ускорениями различных порядков. Из этой теоремы как частные случаи вытекают теоремы Резаля и Гаусса — Кориолиса соответственно для ускорений второго и первого порядков. Обобщая исследования Бура, Сомов приводит преобразование уравнений относительного движения к каноническому виду.

В работе «Прямой способ для выражения дифференциальных параметров первого и второго порядков и кривизна поверхности в каких-либо

⁸ О. И. Сомов. Об ускорениях различных порядков. — Записки Академии наук, 1864, т. 5, Приложение № 5.

⁹ H. Resal. Traité de Cinématique pure. Paris, 1862 (в 6-й главе изложено понятие об ускорении второго порядка).

координатах ортогональных или косоугольных»¹⁰, примыкающей к статьям об ускорениях различных порядков, развивая векторное исчисление, Сомов указывает способ определения дифференциальных операторов

$$\Delta_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

непосредственно в криволинейных координатах и рассматривает приложения этих операторов в теории поверхностей. Исходя из установленного им выражения для перемещения материальной точки в форме степенного ряда и пользуясь естественной системой координат, он в статье «Общий способ приближенного спрямления кривых линий»¹¹ излагает свой метод приближенного определения длины кривой, из которого как частный случай вытекает правило спрямления дуги окружности, принадлежащее Гюйгенсу. Этот метод, по мнению Сомова, мог оказаться особенно эффективным в начертательной геометрии, технической механике и архитектуре при конструировании деталей различной конфигурации.

К рассматриваемому циклу принадлежит также весьма содержательная работа «О виртуальных перемещениях неизменяемой фигуры, подчиненной условным уравнениям линейного вида»¹². Здесь устанавливается зависимость между возможными скоростями неизменяемой системы, стесненной линейными связями, и мгновенными комплексами Плюкера. Оказывается, например, что при наличии одной связи

$$\overline{H}k + \overline{K}\omega = 0,$$

где $\overline{H}$, $\overline{K}$ — параметры связи; $\overline{k}$ — скорость поступательного движения системы вместе с полюсом; $\overline{\omega}$ — угловая скорость вращательного движения вокруг полюса, всякую систему возможных скоростей можно получить двумя вращениями вокруг двух каких-нибудь лучей данного комплекса $[\overline{K}, \overline{H}]$. При двух условных уравнениях

$$\overline{H}_i k + \overline{K}_i \omega = 0 \quad (i = 1, 2)$$

всякую систему возможных скоростей можно получить вращениями вокруг двух лучей конгруэнции (геометрического места всех лучей, общих двум комплексам) и т. д.

В связи с подготовкой учебника «Основания теории эллиптических функций» Сомов заинтересовался современным состоянием этой теории. Так появились три его статьи о развитии теории эллиптических функций

¹⁰ О. И. Сомов. Прямой способ для выражения дифференциальных параметров первого и второго порядков и кривизны поверхности в каких-либо координатах ортогональных или косоугольных. — Записки Академии наук, 1865, т. 8, Приложение № 4.

¹¹ О. И. Сомов. Общий способ приближенного спрямления кривых линий. — Записки Академии наук, 1870, т. 18.

¹² J. S o m o f f. Sur les vitesses virtuelles d'une figure invariable assujetties à des équations de conditions quelconques de forme linéaire. — Bull. de l'Acad., 1873, t. 18, p. 161—184.

и ее приложений к механике ¹³. В первой из них даются доказательства некоторых теорем об эллиптических функциях Якоби, во второй предлагается новое построение амплитуды сумм и разностей и упрощение способа вычисления эллиптических функций третьего рода при помощи таблиц логарифмов сумм и разностей. Но наиболее важной из этих работ является третья, посвященная решению задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Эйлер впервые рассмотрел (1758 г.) частный случай этой задачи, когда центр тяжести совпадает с неподвижной точкой, и показал, что при указанном условии можно получить все десять первых интегралов соответствующей системы дифференциальных уравнений. Второй интегрируемый случай данной задачи, когда тело имеет два равных главных момента инерции и неподвижная точка расположена на оси, соответствующей третьему моменту, был указан Лагранжем (1788 г.). Теория эллиптических функций, развитая Якоби в 40-х годах, дала возможность Сомову довести до конца решение задачи для случая Лагранжа.

Среди работ О. И. Сомова, связанных с развитием вариационных принципов механики, обращают на себя внимание еще две ¹⁴. Они примыкают к серии работ других отечественных ученых (Н. Д. Брашмана, И. И. Рахманинова, М. И. Талызина, Ф. А. Слудского, И. Д. Соколова), появившихся в 60-х годах в связи с возражениями М. В. Остроградского ¹⁵ против принципа наименьшего действия Лагранжа. В результате дискуссии было установлено различие в способах варьирования в принципах Лагранжа и Гамильтона — Остроградского. В частности, Сомов в работе «Замечания, относящиеся к началу наименьшего действия» дал строгое определение понятия полной вариации и получил наиболее общее выражение для вариации действия по Лагранжу. Из этого выражения, если применить изоэнергетический способ варьирования и исходить из канонических уравнений динамики, вытекает принцип наименьшего действия Лагранжа. Сомов доказывает и обратное: в принципе наименьшего действия Лагранжа содержатся динамические уравнения механической системы. Таким образом, этой работой Сомов завершил дискуссию, поднятую Остроградским.

Во второй работе — «Об алгебраическом способе доказательства гамильтонова начала» — О. И. Сомов дает чисто алгебраическое обоснование принципа наименьшего действия в форме Якоби, исходя из канонических уравнений динамики и теории квадратичных форм. В отличие от сложных вариационных способов доказательства вариационных

¹³ J. S o m o f f. Demonstration de quelques formules elliptiques de C. G. I. Jacobi.— Bull. phys.-math. de l'Acad, 1851, t. 10, p. 64—72; Méthode du calcul des fonctions elliptiques de troisième espèce.— J. für Math., 1854, vol. 47; Solution rigoureuse du problème de la rotation autour d'un point fixé d'un corps solide... — Bull. de l'Acad., 1856, t. 14.

¹⁴ О. И. С о м о в. Замечания, относящиеся к началу наименьшего действия.— Математический сборник, 1871, т. 5, стр. 1—20; Об алгебраическом способе доказательства гамильтонова начала, относящегося к интегрированию уравнений динамики.— Записки Академии наук, 1871, т. 19; Математический сборник, 1871, т. 5, стр. 119—133.

¹⁵ М. В. О с т р о г р а д с к и й. Полн. собр. тр. Т. 2, стр. 274—275.

принципов Лагранжа и Гамильтона — Остроградского невариационные, в частности алгебраические, способы сравнительно просты (появление последних почти полностью связано с исследованиями отечественных ученых Ф. Г. Миндинга, О. И. Сомова, В. П. Ермакова и Г. К. Суслова).

Рассмотрим несколько работ О. И. Сомова по различным вопросам математического анализа и механики, выполненных в последние годы его жизни.

В «Заметке о притяжении, испытываемом очень тонким материальным слоем от точки его поверхности»¹⁶ Сомов дает простое и вместе с тем строгое доказательство формулы Лапласа

$$\vec{F} = \rho 2\pi h n,$$

где $\vec{F}$ — сила притяжения бесконечно тонким материальным слоем точки, находящейся на его поверхности; ρ — плотность слоя в этой точке; h — толщина слоя; $\vec{n}$ — орт нормали к поверхности слоя, проведенной через эту точку.

Работа «О решении одного вопроса из механики, предложенного Абелем»¹⁷ посвящена исследованию Абеля о нахождении траектории тяжелой материальной точки, если известно время, в течение которого она опускается с некоторой высоты. В результате некоторого преобразования переменных в двойном интеграле, фигурирующем в этом исследовании, Сомову удастся получить существенное упрощение решения задачи.

В «Замечании о доказательстве, предложенном Коши для общих уравнений равновесия»¹⁸ Сомов подвергает критике принадлежащий Коши вывод условий равновесия несвободной материальной системы, которые выдающийся французский математик формулирует в виде, отличном от принципа возможных перемещений. «При всем уважении своем, — пишет он в предисловии, — к творениям Коши, обогатившего анализ и разные его приложения величайшими открытиями, я осмеливаюсь... доказать, что эта теория¹⁹ неудовлетворительна». Сомов находит ошибку в рассуждении Коши и предлагает правильный вывод, основанный на принципе возможных перемещений.

К 1874 г. относится исследование О. И. Сомова «Упрощение способа, данного Гауссом, для определения притяжения точки однородным эллипсоидом и распространение этого способа на эллипсоид неоднородный». Метод, предложенный Гауссом для определения притяжения точки однородным эллипсоидом, предусматривает предварительное определе-

¹⁶ J. S o m o f f. Note sur l'attraction exercée par une couche matérielle très minée sur un point de sa surface.— Bull. de l'Acad. 1867, t. 13, p. 1—3.

¹⁷ О. И. С о м о в. О решении одного вопроса из механики, предложенного Абелем.— Записки Академии наук, 1869, т. 15, кн. 2, стр. 247—251.

¹⁸ О. И. С о м о в. Замечание о доказательстве, предложенном Коши для общих уравнений равновесия.— Записки Академии наук, 1870, т. 17, кн. 1, стр. 83—84.

¹⁹ Имеется в виду вывод условий равновесия материальной системы, предложенный Коши (C a u c h y A. L. Exercices mathématiques. T. 2. Paris, 1930; M o i g n o F. Statique. Paris, 1868).

ние проекций искомой силы на координатные оси. В основу своей модификации этого метода Сомов положил разбиение эллипсоида на бесконечно тонкие слои и интегрирование соответствующих элементарных сил притяжения. Такой подход к решению вопроса позволяет упростить метод Гаусса и обобщить его на случай неоднородного эллипсоида.

Как видно из приведенного обзора основных научных исследований О. И. Сомова, их отличительной чертой является органическая связь теории и практики — традиция, характерная для всей научной школы Остроградского.

3

В. Г. Имшенецкий

Академик Василий Григорьевич Имшенецкий родился 16 (4) января 1832 г. в семье врача Ижевского оружейного завода. После окончания гимназии в Казани (1848 г.) он поступил на физико-математический факультет Казанского университета, который окончил со степенью кандидата и золотой медалью (1853 г.). Ученик А. Ф. Попова, П. И. Котельникова и И. А. Больцани, Имшенецкий воспринял от них интерес к математической физике и стремление к научной деятельности. Продолжая занятия под руководством А. Ф. Попова, он организовал научный кружок учителей математики и молодых университетских ученых. В 1860 г. он был приглашен в университет для чтения лекций студентам младших курсов, а в 1862 г. — направлен для совершенствования своих знаний за границу. В Париже в Политехнической школе Имшенецкий слушал лекции Ламэ по математической физике, Бертрана — по теории потенциала, в Сорбонне и в «Коллеж де Франс» — лекции Лиувилля, Шаля и Дюамеля, в Берлине — лекции Вейерштрасса. По приезде в Казань в 1865 г. сдал магистерские экзамены, а осенью этого же года успешно защитил диссертацию «Об интегрировании уравнений с частными производными первого порядка», после чего был избран и утвержден доцентом.

В мае 1868 г. Имшенецкий защищает докторскую диссертацию «Исследование способов интегрирования уравнений с частными производными второго порядка функции двух независимых переменных» и становится профессором кафедры математики в Казанском университете. Несколько лет он успешно преподает, продолжает научные исследования, участвует в работе организованного в 1869 г. общества естествоиспытателей. Но в декабре 1871 г. из-за столкновения с реакционным попечителем Казанского округа П. Д. Шестаковым Имшенецкий в числе восьми преподавателей университета подал заявление об отставке. В мае 1872 г. он возглавил кафедру механики в Харьковском университете. Здесь Имшенецкий читал курсы аналитической и небесной механики, публичные лекции по прикладной механике, а также продолжал научные исследования. В 1880 г. он был избран председателем Харьковского математического общества. В этом же году он получил предложение вернуться в Казань, на которое ответил отказом.

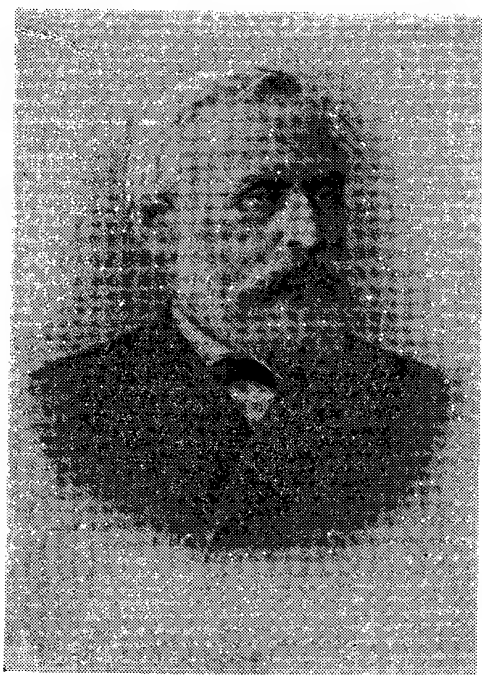
4 декабря 1881 г. по предложению П. Л. Чебышева, В. Я. Буняковского и А. Н. Савича В. Г. Имшенецкий был избран академиком и вскоре переехал в Петербург. Здесь он работал в различных комиссиях Академии наук и Министерства народного просвещения, а также читал лекции на Высших женских курсах.

По инициативе В. Г. Имшенецкого в Петербурге также было организовано математическое общество. На первом заседании общества 20 октября 1890 г. его избрали председателем. Но в ноябре 1891 г. при обсуждении устава возникли споры и расхождения во взглядах на цели общества и В. Г. Имшенецкий сложил с себя эти обязанности. В мае 1892 г. он был назначен председателем испытательной физико-математической комиссии в Москве. К этому времени обострилась резкая критика его работ, начатая А. А. Марковым и продолженная в виде письма Московскому математическому обществу от К. А. Поссе, к которому присоединились А. Н. Коркин и Д. К. Бобылев. Ознакомившись с этим письмом, Имшенецкий сделал 19 мая сообщение на заседании Московского общества по этому вопросу. В ночь на 5 июня (24 мая) 1892 г. он скоропостижно умер.

Научные исследования Имшенецкого посвящены в основном теории интегрирования дифференциальных уравнений механики и математической физики. Наиболее значительные из них относятся к казанскому периоду его деятельности. Особенно выделяются магистерская и докторская диссертации, посвященные систематизации, упрощению и обобщению классических методов Якоби, Лапласа и Монжа — Ампера и явившиеся ценным вкладом в разработку методов интегрирования уравнений в частных производных. Обе диссертации были переведены на французский язык (1869—1872 гг.), а докторская — и на немецкий язык (1892 г.). В 1916 г. они были переизданы Московским математическим обществом как пособия для студентов и более полувека служили основными монографиями по интегрированию уравнений в частных производных. Объясняется это не только важностью затронутых в них вопросов, но и четкостью, ясностью, простотой изложения сложных математических проблем.

В магистерской диссертации Имшенецкий приводит в систему методы Лагранжа и Коши, существенно упрощает обоснование метода Якоби, опираясь на свойства скобок Пуассона, выделяет важный класс уравнений в частных производных первого порядка, аналогичный случаю разделения переменных. В работе «Конечное интегрирование одного вида уравнений с частными производными посредством введения канонической системы переменных»²⁰ выделен интересный тип уравнения в частных производных, интегрирование которого сводится к определению полного интеграла уравнения в частных производных первого порядка и интеграла обыкновенного дифференциального уравнения.

²⁰ В. Г. Имшенецкий. Конечное интегрирование одного вида уравнений с частными производными посредством введения канонической системы переменных. — Ученые записки Казанского университета, 1866, т. 2, стр. 5—14.



В. Г. Имшенецкий.

В докторской диссертации обстоятельно изложены и проанализированы способы интегрирования уравнений второго порядка, предложенные Лагранжем, Лапласом, Монжем, Ампером и Коши. Некоторые из них усовершенствованы и развиты, причем выделены случаи интегрирования в конечном виде тех или иных основных типов уравнений. Так, Имшенецкий обобщает Лапласов метод интегрирования уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = P(x, y) \frac{\partial z}{\partial x} + \\ + Q(x, y) \frac{\partial z}{\partial y} + M(x, y)$$

и развивает общую аналитическую теорию преобразований уравнений типа уравнения Монжа — Ампера к линейному виду при наличии частного интеграла. Особенностью этой дис-

сертации являются первые проявления теории касательных преобразований, которую разрабатывал с 1873 г. С. Ли. Много позднее Ли отзывался о диссертациях Имшенецкого с большой похвалой, отмечая идентичность некоторых результатов Имшенецкого и своих.

Исследования Имшенецкого по механике, выполненные в Харькове, привели его к изучению линейных дифференциальных уравнений. В 1881 г. была опубликована статья «Замена переменных, как способ для разыскания интегрирующего множителя дифференциального уравнения и как средство для понижения порядка системы дифференциальных уравнений»²¹, представляющая собой переписку между В. Г. Имшенецким и В. П. Ермаковым, причем авторство статьи Имшенецкий приписал В. П. Ермакову. Статья имела важное значение для исследований того времени, когда решение дифференциального уравнения стремились найти в квадратурах. В статье, напечатанной годом раньше, — «Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка, интегрируемые посредством множителя»²² Имшенецкий использует интегрирующий множитель, применяет преобразование переменных, изучает симметричные дифференциальные уравнения. Продолжая работу над этой темой, он в 1887 г. публикует статью «Общий способ нахождения рациональных дробных частных интегралов линейных уравнений с рациональными

²¹ В. П. Ермаков. Замена переменных как способ для разыскания интегрирующего множителя дифференциального уравнения и как средство для понижения порядка системы дифференциальных уравнений. — Сообщения Харьковского математического общества, 1881, т. 1, стр. 3—19.

²² В. Г. Имшенецкий. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка, интегрируемые посредством множителя. — Сообщения Харьковского математического общества, 1880, сер. 1, т. 1, стр. 48—52.

коэффициентами» ²³, а в следующем году — статью «Дополнение теории и одно приложение общего способа нахождения рациональных дробных решений линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами» ²⁴, в которой помещает результаты своих исследований о нахождении рациональных решений линейного дифференциального уравнения с полиномиальными коэффициентами при помощи введенного им особого интегрирующего множителя.

Как ответ на эти работы появились исследования Д. А. Граве и Н. В. Бугаева, в которых вопрос о нахождении рациональных решений изучался с иной точки зрения. Имшенецкий выступил также с ответной статьей по этому вопросу ²⁵, близкой по идее к работе Д. А. Граве.

Способ интегрирующего множителя для нахождения рациональных решений линейного дифференциального уравнения, предложенный Имшенецким, привлек к себе внимание и вызвал критику со стороны А. А. Маркова и некоторых других математиков, считавших этот метод менее эффективным, чем метод Лиувилля. Неожданная смерть помешала Имшенецкому письменно обработать свои возражения, с которыми он выступил на заседании Московского математического общества в защиту своего способа. По этому вопросу возникла дискуссия, в которой приняли участие П. А. Некрасов, К. А. Андреев, Н. М. Гюнтер, В. П. Ермаков и др. Впоследствии Д. М. Синцов в докторской диссертации (1898 г.) доказал внутреннюю эквивалентность методов Имшенецкого и Лиувилля и распространил метод Лиувилля на случай линейных уравнений высшего порядка и их систем.

В Академии наук научные интересы Имшенецкого были сосредоточены преимущественно на функциях Бернулли и обыкновенных линейных дифференциальных уравнениях. Применению функций Бернулли к выводу эйлеровой формулы суммирования и ее остаточного члена Имшенецкий посвятил серию статей. Ему принадлежит введение более общих функций Бернулли любого целого порядка и некоторых их приложений в приближенное вычисление интегралов.

4

Математика в Петербургском университете

Во второй половине XIX в. Петербургский университет становится крупнейшим учебным и исследовательским центром. В 1860 г. на кафедру математики приходит А. Н. Коркин. Он

²³ В. Г. Имшенецкий. Общий способ нахождения рациональных дробных частных интегралов линейных уравнений с рациональными коэффициентами. — Записки Академии наук, 1887, т. 55, Приложение № 9, стр. 55.

²⁴ В. Г. Имшенецкий. Дополнение теории и одно приложение общего способа нахождения рациональных дробных решений линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами. — Записки Академии наук, 1888, т. 58, стр. 1—28.

²⁵ В. Г. Имшенецкий. Интегрирование линейных однородных уравнений посредством частных решений других уравнений того же вида и порядка равного или меньшего. — Записки Академии наук, 1891, т. 64, Приложение № 8.

читает лекции по высшей алгебре, аналитической геометрии и интегральному исчислению. Вслед за А. Н. Коркиным начали свою деятельность в университете Е. И. Золотарев, Ю. В. Сохоцкий, Н. С. Будаев, А. В. Бессель. Вводятся новые математические курсы. Так, приват-доцент Н. С. Будаев в 1865 г. предложил новую университетскую программу по высшей геометрии, составленную по курсу Шаля «Геометрия положения» и предназначенную для студентов третьего курса. А. В. Бессель в 1865 г. начал читать впервые в университете «Теорию определителей». В 1869 г. Ю. В. Сохоцкий ввел начальный курс «Теории функций от мнимых величин» (так называли теорию функций комплексного переменного).

Большую роль в жизни Петербургского университета сыграла деятельность Ю. В. Сохоцкого. Юлиан Васильевич Сохоцкий (1842—1923) родился в Варшаве. Окончил Варшавскую губернскую гимназию и Петербургский университет (1866 г.). В 1868 г. защитил магистерскую диссертацию «Теория интегральных вычетов с некоторыми приложениями». При защите Сохоцкий встретился с некоторыми трудностями, поскольку его диссертация была первой научной работой на русском языке, специально посвященной теории функций комплексного переменного. П. Л. Чебышев не считал нужным пользоваться этой теорией. По словам учеников Сохоцкого, ему пришлось два года уговаривать Чебышева допустить диссертацию к защите.

В предисловии к диссертации Ю. В. Сохоцкий указывает на важность для математического анализа теории вычетов, которая учеными того времени почти не разрабатывалась. «В настоящем рассуждении, — пишет Сохоцкий, — я излагаю общие начала исчисления интегральных вычетов и показываю некоторые из его применений, именно такие, которых я вовсе не нашел между работами Коши, или же нашел их изложенными не в столь простой и наглядной форме, в какой мне удалось их представить». Сохоцкий показал возможность продуктивного использования теории вычетов как метода при решении различных вопросов теории специальных функций. Но самым значительным результатом, полученным им в магистерской диссертации, является теорема о поведении аналитической функции в окрестности существенно особой точки. Она сформулирована в таком виде: «если данная функция $f(z)$ в некоторой точке z_0 обращается в бесконечность бесконечного порядка, то непременно в этой же точке функция $f(z)$ должна принимать всевозможные значения». К этой теореме Ю. В. Сохоцкий пришел, обобщая теоремы Коши о разложении функций в ряды в окрестности особых точек.

Доказательство теоремы близко к современному. Если в точке z_0 $f(z)$ обращается в бесконечность, то для значений z , достаточно близких к z_0 ,

$$f(z) = \frac{A_1}{z - z_0} + \frac{A_2}{(z - z_0)^2} + \dots + B_0 + B_1(z - z_0) + B_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Если в точке z_0 функция $f(z)$ имеет нуль кратности n , то $f(z) = (z - z_0)^n \tilde{\omega}(z)$, где $\tilde{\omega}(z)$ — функция конечная и не равная нулю в точке z_0 .

Если же в точке $z = z_0$ функция $f(z) = \infty$ и не принимает конечного значения, то для значений z , близких к z_0 , $\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^n \tilde{\omega}(z)$, где n — целое положительное число; $\tilde{\omega}(z)$ — функция конечная и не равная нулю в точке z_0 . Тогда $f(z) = (z - z_0)^{-n} \frac{1}{\tilde{\omega}(z)}$, или, при $\frac{1}{\tilde{\omega}(z)} = \varphi(z)$, $f(z) = (z - z_0)^{-n} \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — функция конечная и не равная нулю в точке $z = z_0$; n — число бесконечностей функции $f(z)$ в точке z_0 .

«Из предыдущего, — делает вывод Сохоцкий, — и следует указанная выше теорема (т. е. если n обращается в бесконечность, то $f(z)$ в точке $z = z_0$ принимает не только бесконечное, но и конечное значение)». В самом деле, между различными значениями $f(z)$ будет непременно нуль, так как в противном случае функция $\frac{1}{f(z)}$ была бы в рассматриваемой точке конечной и непрерывной, что противоречит условию.

В 1868 г. Ю. В. Сохоцкий обратился в Петербургский университет с просьбой допустить его к чтению нового курса — теории функций от мнимых величин — и лекций о непрерывных дробях с их приложением к интегрированию. Просьба была удовлетворена, и в следующем году его утвердили в звании штатного доцента по физико-математическому факультету.

Своей докторской диссертацией, защита которой состоялась в 1873 г., Ю. В. Сохоцкий положил начало теории сингулярных интегральных уравнений, содержащих главные значения интегралов в смысле Коши. П. Л. Чебышев как официальный оппонент оценил ее «вполне удовлетворительно», что являлось в то время высшей оценкой. Главное внимание в работе уделено изучению свойств функций, подобных функциям Лежандра и Ламе, но в первой главе («Определенные интегралы») рассмотрены вопросы, имеющие большое значение для теории аналитических функций. В предисловии к диссертации Ю. В. Сохоцкий отмечает, что задачу о нахождении подынтегральной функции по данному интегралу решали многие ученые (Абель, Коши, Мюрфи). «В сочинении этом, — пишет он, — я стараюсь обратить внимание читателей на ре-

шение уравнения $\varphi(x) = \int_a^b \frac{f(t) dt}{t - x}$, т. е. на определение функции $f(x)$ по данной функции $\varphi(x)$, так как этот интеграл является одним из простейших и заслуживает особого внимания потому, что его решение прямо приводит к основным началам теории функций от мнимой переменной». Сохоцкий рассматривает только те вопросы, которые «бросают свет на встречаемые затруднения». Им впервые были изучены граничные значения интегралов типа Коши и при весьма общих условиях выведены формулы, получившие широкое применение в XX в. в работах по теории упругости.

Много лет работал в Петербургском университете ученик Остроградского Николай Сергеевич Будаев. В 1857 г. он защитил магистерскую

диссертацию, преподавал в разных учебных заведениях Петербурга, а с 1865 по 1869 г. — в университете (в качестве сначала приват-доцента, с 1878 г. — штатного доцента, а с 1885 г. — профессора). В основном Будаев читал лекции по прикладной математике и механике, в Петербургском университете он начал читать новый курс — проективную геометрию.

В конце 70-х годов в составе кафедры математики Петербургского университета произошли значительные изменения. В 1876 г. из университета ушел О. И. Сомов, в 1878 г. умер Е. И. Золотарев, в 1880 г. на кафедру математики был приглашен А. А. Марков (читал курс введения в анализ), в 1882 г. ушел в отставку П. Л. Чебышев. Лекции по теории эллиптических функций, которые читал Золотарев, были поручены сначала М. А. Тихомандрицкому, а с 1883 г. — И. Л. Птапицкому. Курсы О. И. Сомова стал читать К. А. Поссе.

Ученик Чебышева Константин Александрович Поссе (1847—1928) в 1868 г. окончил Петербургский университет, в 1873 г. защитил магистерскую диссертацию «О функциях, подобных функциям Лежандра». С 1873 г. начал читать лекции в университете по аналитической геометрии. В последующие годы он читал также курсы прикладной математики. С 1880 г. Поссе — доцент Петербургского университета. После защиты докторской диссертации «О функциях χ от двух аргументов и о задаче Якоби» (1882 г.) он был избран (1883 г.) экстраординарным, а в 1886 г. — ординарным профессором. Кроме университета Поссе преподавал в Институте инженеров путей сообщения, в Технологическом и Электротехническом институтах.

В своих методических исканиях К. А. Поссе всегда стремился следовать Чебышеву. Долгое время большой популярностью пользовались его литографированные лекции по дифференциальному и интегральному исчислениям. Печатный курс этих лекций выдержал много изданий (каждый раз с дополнениями автора).

Важное место в математической подготовке студентов университета занимал курс дифференциальных уравнений, который читал А. Н. Коркин. Он же читал вариационное исчисление и теорию функций комплексного переменного.

Успешная подготовка математиков в университете в большой степени зависела от творческой инициативы студентов, в пробуждении которой особая роль принадлежала Чебышеву. Совет физико-математического факультета ежегодно давал небольшие научные темы, за отличное решение которых награждал студентов золотыми и серебряными медалями. За сочинение «О наибольших и наименьших величинах» еще в 1856 г. золотую медаль получил А. Н. Коркин, в 1878 г. за сочинение «Об интегрировании дифференциальных уравнений при помощи непрерывных дробей» золотой медали был удостоен А. А. Марков.

В 80-е годы в университете было создано студенческое физико-математическое общество. Несколько лет оно издавало записки, в которых печатались ценные студенческие работы. Многие из бывших студентов впоследствии успешно защитили математические диссертации. Большинство отзывов на магистерские и докторские диссертации, защищен-

ные в университете до 70-х годов, принадлежит Чебышеву, в частности отзывы на диссертации Золотарева, Поссе, Бесселя. По разносторонности математической подготовки студентов, развитию и глубине научной мысли Петербургский университет в 60—80-е годы занимал ведущее место в России.

5

А. Н. Коркин

Почти полстолетия продолжалась в Петербургском университете научно-педагогическая деятельность ученика П. Л. Чебышева Александра Николаевича Коркина. Он родился 3 марта (19 февраля) 1837 г. близ с. Шуйского Вологодской губернии в семье зажиточного крестьянина. Восемилетним мальчиком его отдали на воспитание учителю математики Вологодской гимназии А. И. Иваницкому. Гимназию Коркин окончил с золотой медалью и в 1854 г. поступил на математический разряд физико-математического факультета Петербургского университета. Как уже отмечалось, за первую научную работу — «О наибольших и наименьших величинах» (1856 г.) — факультет наградил его золотой медалью. По рекомендации В. Я. Буняковского работа была опубликована в «Студенческом сборнике» за 1857 г.

В 1858 г. Коркин окончил университет и начал преподавать математику в Первом кадетском корпусе. В 1860 г. он защитил магистерскую диссертацию «Об определении произвольных функций в интегралах уравнений с частными производными» и перешел в Петербургский университет. В 1862—1864 гг. Коркин был отправлен за границу, где слушал лекции Ламе, Лиувилля, Бертрана (в Париже), Куммера (в Берлине). В начале 1868 г. он защитил докторскую диссертацию «О совокупных уравнениях с частными производными первого порядка и некоторых вопросах механики» и в этом же году был избран экстраординарным профессором по кафедре математики. В 1873 г. Коркин — ординарный профессор, а в 1886 г. ему присвоили звание заслуженного профессора.

В университете Коркин читал несколько курсов: сферическую тригонометрию, аналитическую геометрию, начертательную геометрию, высшую алгебру, дифференциальное исчисление, интегрирование дифференциальных уравнений, вариационное исчисление, а также необязательные лекции в университете и для некоторых студентов у себя дома («коркинские субботы») по интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных. Кроме университета он более 30 лет преподавал дифференциальное и интегральное исчисления в Военно-морской академии. Преемник Коркина по академии А. Н. Крылов вспоминал впоследствии: «Как на русском, так и на иностранных языках существовало множество курсов дифференциального и интегрального исчисления, но Коркин не придерживался ни одного из них, и можно сказать, не столько читал, как диктовал нам свой совершенно оригинальный курс, отличавшийся особенною точностью определений, крат-



А. Н. Коркин.

костью, естественностью и изяществом выводов всех формул, отсутствием той излишней щепетильности и строгости, которая не поясняет для техников, каковыми мы были, а затемняет дело и которая необходима лишь для математиков» ²⁶.

К. А. Поссе, слушавший лекции Коркина в университете, писал: «Лекции Коркин читал чрезвычайно просто и ясно; не понимать его могли только те, которые вообще ничего понимать не в состоянии. Теоремы он формулировал всегда очень точно, каждый теоретический вывод, каждую методику пояснял примерами, подробно проделывал все выкладки и после каждой почти лекции диктовал примеры для упражнения, давая студентам материал для домашней работы» ²⁷.

Глубокая математическая эрудиция, простая и ясная манера чтения лекций, особое внимание к слушателям, проявлявшим интерес и способности к математике, — все это производило большое впечатление на студентов. Немало видных русских математиков (А. Н. Крылов, Д. А. Граве, И. И. Иванов, Н. М. Гюнтер и др.) считали себя непосредственными учениками Коркина.

Магистерская диссертация Коркина «Об определении произвольных функций в интегралах уравнений с частными производными» (1860 г.) положила начало циклу его работ, связанных с интегрированием дифференциальных уравнений.

Первая часть диссертации посвящена вопросам представления произвольной функции $f(x)$ в виде двойного интеграла и в виде ряда. Установив формулу

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi[a(x-x')] f(x') dx' da$$

и располагаясь выбором функции $\psi(x)$, удовлетворяющей определенным требованиям, Коркин получил как следствие интегральную формулу Фурье

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos[a(x-x')] f(x') dx' da$$

²⁶ А. Н. Крылов. Собр. трудов. Т. 1. Ч. 1. Изд-во АН СССР, М. — Л., 1951, стр. 82.

²⁷ К. А. Поссе. А. Н. Коркин (некролог). — Журнал Министерства народного просвещения, 1908, № 11, стр. 39.

и некоторые ее обобщения. Пользуясь формулой Фурье и потребовав выполнения условий

$$f(0) = f(l) = 0; \quad f'(0) = f'(l); \\ f'(l) + \beta f(l) = 0, \quad f'(-l) - \beta_1 f(-l) = 0,$$

он нашел и рассмотрел соответствующие тригонометрические ряды Фурье. Кроме того, он подробно изучил вопрос о разложении функции $f(\theta, \varphi)$, определенной на сферической поверхности, в ряд по сферическим функциям, аналогичный ряду Фурье.

Полученные результаты использованы Коркиным во второй части, где он применил методы Пуассона для интегрирования линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами к решению некоторых краевых задач математической физики: о распределении тепла в стержне с очень малыми поперечными измерениями, о распространении тепла в шаре, о движении круглой упругой пластинки с двумя неподвижными круговыми контурами.

В докторской диссертации «О совокупных уравнениях с частными производными первого порядка и некоторых вопросах механики» Коркин дал новый метод (метод Коркина) интегрирования системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

$$f_k(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

где z — искомая функция независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$; $p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}$. К задаче об интегрировании этой системы уравнений можно

подойти, указывал Коркин, с различных точек зрения. Каждое ее уравнение можно рассматривать как уравнение относительно $n+1$ различных неизвестных функций z и ее частных производных. Задача будет решена, если число уравнений будет равно числу неизвестных. В методе интегрирования систем дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, предложенном Якоби, указывается последовательность операций, позволяющая перейти от данной системы к другой, где число уравнений на единицу больше, чем в данной ²⁸. В итоге получится система, число уравнений которой в общем случае будет на единицу больше числа неизвестных частных производных. Если же исходная система не содержит функции z , то число уравнений окончательной системы будет равно числу частных производных функции z , которая в этом случае определяется при помощи квадратуры.

«С этой точки зрения, — писал Коркин, — смотрели на вопрос все занимавшиеся теорией интегрирования совокупных уравнений первого порядка с частными производными. Отсюда следовало, что несмотря на некоторые изменения частных методов Якоби и Бура, сущность оставалась та же самая: последовательное прибавление уравнений к данной системе, посредством приложения теоремы Пуассона к найденным интегралам какого-либо из уравнений данной системы. Это прибавление

²⁸ Коркин называет его методом Якоби и Бура, поскольку основные идеи этого метода содержатся как в мемуарах Бура 1855 и 1862 гг., так и в посмертном мемуаре Якоби, опубликованном в 1861 г.

уравнений делает решительно невозможным приложение метода к некоторым вопросам, зависящим однако существенно от интегрирования совокупных уравнений с частными производными. Оно дает возможность решить вопрос только тогда, когда все неизвестные функции действительно можно получить, т. е. когда вопрос приведен или к квадратуре или к алгебраическим исключениям. До тех пор, пока этого нет, мы ничего не можем сказать о форме неизвестных функций. Между тем есть задачи, где невозможно вполне определить неизвестную функцию, но тем не менее можно до некоторой степени определить ее форму, в чем единственно и состоит вопрос в подобных случаях»²⁹.

Исходя из изложенного, Коркин приходит к другой точке зрения — он рассматривает каждое уравнение системы дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка как уравнение, которому должна удовлетворять неизвестная функция z . Сущность его метода состоит в последовательном уменьшении числа уравнений, которым должна удовлетворять неизвестная функция. Найдя полный интеграл одного из уравнений системы, он применяет преобразование, дающее возможность перейти от данной системы к другой, в которой число уравнений и число независимых переменных будет каждое на единицу меньше, чем в данной системе. К новой системе опять применяется такое же преобразование. Процесс продолжается до тех пор, пока получится одно интегрируемое уравнение.

Раздел диссертации «Интегралы, общие многим задачам о движении свободной точки в плоскости» Коркин посвятил вопросу, с которого, как он писал, и началась теория интегрирования систем дифференциальных уравнений с частными производными. Это вопрос о нахождении сил, при которых задача о движении свободной точки в плоскости имеет один или несколько интегралов, общих с другими подобными задачами. Он был предложен Бертраном и решен им для случая, когда силы, действующие в задаче, зависят не от скоростей и времени, а только от координат движущейся точки. Силы в задачах Коркина зависят и от координат, и от скоростей движущейся точки. К этому общему случаю способ Бертрана не применим, Коркин же дал достаточно общий способ решения подобных задач.

В небольшой заметке А. Н. Коркина «О прямой и обратной теореме Пуассона»³⁰ доказана теорема, состоящая из двух частей: теоремы Пуассона о том, что если φ и ψ — два каких-либо интеграла канонической системы дифференциальных уравнений, играющей важную роль в аналитической механике, то скобка Пуассона (φ, ψ) также является интегралом этой системы; и обратной теоремы о том, что если выражение (φ, ψ) является интегралом системы

$$dt = \frac{dq_1}{A_1} = \frac{dq_2}{A_2} = \dots = \frac{dq_m}{A_m} = \frac{dp_1}{B_1} = \frac{dp_2}{B_2} = \dots = \frac{dp_m}{B_m},$$

²⁹ А. К о р к и н. О совокупных уравнениях с частными производными первого порядка и некоторых вопросах механики. СПб, 1864, стр. 24—25.

³⁰ А. K o r k i n. Sur le théoreme de Poisson et son réciproque. — *Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du Bulletin de l'Académie des sciences de St-Pétersbourg*, 1872, т. 4.

причем φ и ψ — два каких-либо интеграла этой же системы, то система каноническая и ее коэффициенты имеют вид

$$A_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad B_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}.$$

Обратная теорема доказана Коркиным впервые.

Две работы А. Н. Коркин посвятил интегрированию дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка. В мемуаре «О частных дифференциальных уравнениях второго порядка» (записка, составленная по поводу университетского акта 8 февраля 1878 г.) рассматривается уравнение Монжа — Ампера

$$Hr + 2Ks + Lt + N(rt - S^2) + M = 0,$$

где H, K, L, M, N — данные функции от x, y, z, p, q ; буквами p, q, r, s, t обозначены соответственно частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Способ интегрирования, предложенный Монжем и дополненный Ампером, дает возможность в удачных случаях найти интеграл рассматриваемого уравнения. Однако остается открытым вопрос об удовлетворении начальным условиям. Коркин восполняет этот пробел и показывает, что во всех случаях, где способ Монжа применяется удачно, можно удовлетворить и начальным условиям, если их выбрать надлежащим образом. В качестве начальных условий рассматриваются простейшие: неизвестная функция z должна обратиться в заданную наперед функцию $\omega(u)$, если положить $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$, где $\varphi(u)$ и $\psi(u)$ также две данные функции переменной u , кроме того, величины z, p и q для $x = \varphi(u)$ и $y = \psi(u)$ должны удовлетворять заданному уравнению

$$\sigma(x, y, z, p, q) = 0.$$

Как пример рассмотрена задача о проведении минимальной поверхности через данную кривую при данном направлении нормали к поверхности в каждой ее точке. Решая соответствующее задаче уравнение

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0,$$

Коркин получил формулы, выражающие координаты произвольной точки поверхности через данные величины (аналогичные формулы, полученные ранее Шварцем другим путем, Коркину не были известны).

Статья Коркина «О географических картах»³¹ занимает заметное место в исследованиях по математической картографии, начатых Лагранжем и Эйлером.

Исходным моментом для статьи послужил мемуар Оссиана Бонне (1852 г.), в котором вопрос об изображении сферы на плоскости с сохранением площадей при условии взаимной ортогональности меридианов и параллелей сведен к интегрированию некоторого дифференциального уравнения с частными производными второго порядка. Это урав-

³¹ А. К о р к и н. Sur les cartes géographiques. — Math. Annalen, 1890, Bd 35.

нение, однако, никем не было проинтегрировано. Коркин полностью решил более общую задачу, взяв вместо сферы любую поверхность вращения. Работа Коркина, в свою очередь, получила развитие в докторской диссертации его ученика Д. А. Граве.

Две большие работы последнего периода своего научного творчества ³² Коркин посвятил созданному Эйлером методу интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка при помощи интегрирующего множителя. Математики XIX в. (Якоби, Абель, Миндинг, Летников и многие другие) немало занимались этим методом и, в духе Эйлера, высоко ценили его. «Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка с двумя переменными, — писал Летников, — составляет один из элементарных отделов интегрального исчисления и однако нельзя не согласиться, что именно в этой части науки недостаток способов и приемов, сколько-нибудь общих, наиболее ощутителен. Способ интегрального фактора, указанный знаменитым Эйлером, до сих пор остается единственным, имеющим за собой общность идеи и поэтому несомненное научное достоинство; поэтому, я думаю, будет справедливо сказать, что только от усовершенствования теории интегрального множителя можно ожидать в настоящее время каких-либо новых путей для интегрирования или для разыскания дифференциальных уравнений, которые могут быть обынтегрированы» ³³.

Обе работы Коркина непосредственно примыкают к мемуару Ф. Миндинга «Исследования об интегрировании дифференциальных уравнений первого порядка с двумя переменными» (1862 г.), в котором изучается уравнение

$$Mdx + Ndy = 0, \quad (1)$$

где M и N — целые функции от y с коэффициентами, являющимися функциями от x . Миндинг рассматривал интегрирующие множители вида

$$e^U (y - u_1)^{h_1} (y - u_2)^{h_2} \dots (y - u_l)^{h_l} \quad (2)$$

уравнения (1), где U — рациональная функция от y , содержащая x ; $u_1, u_2, \dots, u_l$ — функции только x ; $h_1, h_2, \dots, h_l$ — постоянные. Его интересовал вопрос о роли частных решений в интегрировании дифференциальных уравнений. Известно, писал Миндинг, что общий интеграл линейного уравнения высшего порядка получается из частных интегралов простым сложением. Приложение же частных интегралов к интегрированию уравнений нелинейных, если оно вообще возможно, может существовать только в совершенно другом виде, зависящем от особенных обстоятельств. И действительно, оно весьма редко встречается, однако не совсем неизвестно. Он пытался найти конечные уравнения, связывающие функции M, N и частные решения $u_1, u_2, \dots, u_l$.

³² A. K o r k i n. Sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre. — Math. Annalen, 1897, Bd 48; Etudes des multiplicateurs des équations différentielles du premier ordre. St-P., 1903.

³³ А. В. Л е т н и к о в. Об условиях интегрируемости дифференциальных уравнений. — Математический сборник, 1866, № 1, стр. 297.

уравнения (1), если общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$e^U (y - u_1)^{h_1} (y - u_2)^{h_2} \dots (y - u_l)^{h_l} = C,$$

где U — целая функция от y ; C — произвольная постоянная. Однако ему, как указывал Коркин, это не удалось из-за ошибки, вкравшейся в рассуждения.

Продолжая исследования Миндинга, Коркин решал следующие задачи:

1. Даны коэффициенты целой функции N в виде функций от x и постоянные $m_1, m_2, \dots, m_n$; найти все величины функций $P, u_1, u_2, \dots, u_n$ одного x и целой функции M от y так, чтобы уравнение (1) имело общий интеграл вида

$$P (y - u_1)^{m_1} (y - u_2)^{m_2} \dots (y - u_n)^{m_n} = C.$$

2. Выбирая подходящим образом из величин $P, u_1, u_2, \dots, u_l$ и коэффициентов целых функций M и N такие, которые рассматриваются как данные, найти необходимые и достаточные условия, выраженные конечными уравнениями между данными и неизвестными величинами, для того, чтобы уравнение (1) могло иметь интегрирующим множителем выражение

$$P (y - u_1)^{h_1} (y - u_2)^{h_2} \dots (y - u_l)^{h_l},$$

где $l, h_1, h_2, \dots, h_l$ — данные постоянные.

3. Найти все уравнения (1), имеющие интегрирующими множителями алгебраические функции.

Некоторые результаты этих исследований Коркина были опубликованы в 92-м томе «Comptes rendus» Парижской академии наук за 1896 г. Здесь же появилась статья Пенлеве, в которой он утверждал, будто эти результаты Коркина вытекают как частные случаи из его работ. В связи с этим Коркину пришлось поместить в 113-м томе журнала ответную статью, в которой он доказал необоснованность утверждения Пенлеве.

Заметка А. Н. Коркина «По поводу статьи В. П. Ермакова под заглавием „Дифференциальные уравнения первого порядка, имеющие данный интегральный множитель факториальной формы“» (1905 г.) носит полемический характер. В ней опровергается попытка В. П. Ермакова изложить результаты Коркина в более простом виде.

Несколько работ А. Н. Коркина посвящено самым различным вопросам математического анализа. Небольшая статья «О невозможности решения уравнения $X^n + Y^n + Z^n = 0$ в целых функциях» (1880 г.) вызвана заметкой Лиувилля, в которой он доказывает невозможность найти такие три целые функции X, Y, Z от одной переменной, чтобы

$$X^n + Y^n + Z^n = 0$$

при $n > 2$. Коркин дает свое доказательство, более простое. Заметка напечатана на русском языке в 10-м томе «Математического сборника» за 1882 г.

Статья «Об одной интерполяционной задаче»³⁴ (1882 г.), представляющая собой извлечение из письма Коркина Эрмиту, содержит отыскание общего выражения некоторой функции, определяемой для всех целых положительных значений переменного как результат построения данной операции над данной функцией. Эта статья связана с работой В. П. Ермакова о сходимости рядов.

В работе «О кривизне поверхностей» (1887 г.) Коркин дает остроумное доказательство известной теоремы Гаусса о кривизне поверхностей (выражение этой кривизны через коэффициенты в выражении линейного элемента поверхности) при помощи преобразования переменных.

Небольшая заметка Коркина «Об одном определенном интеграле» (1882 г.) посвящена доказательству одного легко проверяемого тождества, из которого получается известное неравенство Чебышева, оценивающее интеграл от произведения двух функций. Это первое доказательство неравенства Чебышева, опубликованное почти одновременно со статьей самого Чебышева, где это неравенство дано без доказательства.

Другим направлением научных интересов А. Н. Коркина была теория чисел, по которой он совместно с Е. И. Золотаревым выполнил три работы (см. раздел о творчестве Золотарева). Совместно с Золотаревым А. Н. Коркиным написана также небольшая статья «Относительно некоторого минимума» (1873 г.). В ней дается изящное решение задачи о нахождении той из всех целых функций $f(x)$ данной степени n , с дан-

ным коэффициентом при x^n , для которой $\int_0^1 [f(x)] dx$, где $[f(x)]$ — абсолютное значение $f(x)$, будет иметь наименьшее значение. Решение основано на одном свойстве алгебраических непрерывных дробей, подмеченном авторами.

Неопубликованный мемуар А. Н. Коркина «О распределении простых чисел, по главному модулю и по конгруэнтным биномам с таблицей первообразных корней и характеристик, которые относятся к простым числам ниже 4000» содержит обобщения теорем Чебышева об определении первообразных корней простых чисел, заключающихся в известных формах, и ряд предложений о двучленных сравнениях.

Научные исследования А. Н. Коркин не прекращал до последних дней своей жизни. Умер он 31 (19) августа 1908 г.

6

Е. И. Золотарев

Одним из наиболее талантливых учеников П. Л. Чебышева был Егор Иванович Золотарев. Родился Золотарев в 1847 г. в Петербурге в семье часового мастера. В 1857 г. поступил во второй класс гимназии, которую окончил в 1863 г. с серебряной медалью.

³⁴ А. K o r k i n. Sur un probleme d'interpolation.— Bull. des sci. math. et astronom., 1882, t. 6.

В этом же году он начал посещать в качестве вольнослушателя лекции в университете, а в 1864 г. был зачислен студентом физико-математического факультета. В 1867 г. Золотарев окончил университет и сдал соответствующие экзамены, а также представив сочинение на тему «Об интегрировании уравнений волчка», получил звание кандидата. Менее чем через год, он, защитив диссертацию «pro venia legendi» «Об одном вопросе о наименьших величинах» и прочитав две пробные лекции в присутствии членов совета факультета, был допущен к чтению лекций в университете в качестве приват-доцента. Золотарев читал курс теории эллиптических функций для математиков и дифференциальное исчисление для естественников, а впоследствии — также лекции по интегральному исчислению, аналитической механике, введению в анализ и высшей алгебре. Им написаны изданные литографским способом учебники по аналитической механике, введению в анализ и высшей алгебре. С 1869 г. он преподавал аналитическую механику также в Институте инженеров путей сообщения.



Е. И. Золотарев.

В 1869 г. Золотарев сдал экзамен на степень магистра чистой математики и защитил магистерскую диссертацию «Об одном неопределенном уравнении третьей степени». Оппонентами при защите были П. Л. Чебышев и Ю. В. Сохоцкий. Неофициальным оппонентом с весьма строгим критическим разбором работы выступил А. Н. Коркин. Его критика, однако, касалась главным образом технических подробностей изложения, а не содержания работы, явившейся значительным вкладом в теорию кубических числовых полей. В 1873 г. Золотарев был избран штатным доцентом университета. В 1874 г. он защитил докторскую диссертацию «Теория целых комплексных чисел с приложением к интегральному исчислению» (оппонентами были Чебышев и Коркин). Эта работа представляла собой выдающееся исследование, научное значение которого было выяснено вполне только много лет спустя.

В 1876 г. Золотарева избирают экстраординарным профессором университета, а затем, в этом же году, адъюнктом Академии наук по кафедре прикладной математики (после смерти академика О. И. Сомова). В 1872 г. его посылают за границу, где он слушает лекции Куммера (по аналитической геометрии) и Вейерштрасса (по теории аналитических функций), знакомится с Эрмитом. В 1876 г. он вернулся в Петербург. Через два года, в 1878 г., в расцвете творческих сил, Золотарев умер.

Полное собрание сочинений (18 работ) Золотарева, написанных за небольшой период (около 10 лет), было издано только в 1932 г. (в двух томах). Его научные труды можно разделить на четыре группы. К первой относятся магистерская и докторская диссертации с дополнением к последней, напечатанным в 1878 г. под названием «О комплексных числах» (на французском языке), а также полное изложение его теории целых чисел алгебраического поля в работе «О теории комплексных чисел», опубликованной впервые в 1885 г. во Франции в журнале Лиувилля. Ко второй — исследования по теории положительных определенных квадратических форм с вещественными коэффициентами (три работы, опубликованные в журнале «Mathematische Annalen» 1872, 1873, 1877 гг.), проведенные им совместно с А. Н. Коркиным. Третья группа включает работы, посвященные некоторым приложениям эллиптических функций и эллиптических интегралов (семь работ), и последняя — четыре заметки, три из которых посвящены изложению новых методов решения уже решенных вопросов теории чисел и математического анализа, а четвертая (написанная совместно с Коркиным) содержит решение одной важной экстремальной задачи теории алгебраических многочленов.

В магистерской диссертации решена задача об отыскании единиц алгебраического поля $Q(A)$ чисел вида

$$\rho = \alpha + \beta \sqrt[3]{A} + \gamma \sqrt[3]{A^2}, \quad (3)$$

где α, β, γ — рациональные числа; $A > 0$ — целое, отличное от точного куба.

Если обозначить через ρ_k ($k = 1, 2$) числа

$$\rho_k = \alpha + \beta \varepsilon_k \sqrt[3]{A} + \gamma \varepsilon_k^2 \sqrt[3]{A^2},$$

где ε_k при $k = 1, 2$ — отличные от единицы корни уравнения $\varepsilon^3 = 1$, то произведение

$$N(\rho) = \rho \rho_1 \rho_2 = \alpha^3 + A\beta^3 + A^2\gamma^3 - 3A\alpha\beta\gamma$$

называется нормой числа ρ . Число (3) называется единицей поля $Q(A)$, если α, β, γ — целые рациональные числа и $N(\rho) = 1$. Поэтому отыскание всех единиц поля $Q(A)$ сводится к отысканию всех целочисленных решений неопределенного кубического уравнения

$$x^3 + Ay^3 + A^2z^3 - 3Axyz = 1. \quad (4)$$

Уравнение (4) обладает следующим свойством. Если x, y, z есть решение этого уравнения, а $n \geq 2$ — целое, то, полагая

$$x_n + y_n \sqrt[3]{A} + z_n \sqrt[3]{A^2} = (x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{A^2})^n,$$

где x_n, y_n, z_n , как и x, y, z , — целые рациональные числа, получаем новое решение x_n, y_n, z_n уравнения. Из исследований Дирихле о единицах ал-

гебраического числового поля над полем рациональных чисел следует, что все единицы поля $Q(A)$ определяются формулой

$$\rho = (x_0 + y_0 \sqrt[3]{A} + z_0 \sqrt[3]{A^2})^k, \quad k = 1, 2, 3 \dots,$$

где x_0, y_0, z_0 — некоторое, так называемое основное, решение уравнения (4). Здесь положение примерно такое же, как и в случае поля чисел вида $\zeta + \eta \sqrt{P}$, где $P > 0$, целое, отличное от точного квадрата; ζ и η независимо одно от другого пробегают поле рациональных чисел. Уравнение, аналогичное уравнению (4), в этом случае имеет вид

$$x^2 - Py^2 = 1, \quad (5)$$

где x, y — целые. Все решения уравнения (5) определяются формулой

$$x_k + y_k \sqrt{P} = (x_0 + y_0 \sqrt{P})^k,$$

где $k \geq 1$ — целое; x_0, y_0 — так называемое основное решение уравнения (5), получаемое применением метода, в котором существенную роль играет разложение в непрерывную дробь числа $\sqrt{P}$. Для кубических числовых полей в то время общего метода не было (найден только в 1897 г. Г. Ф. Вороным). Поэтому Золотарев разработал специально для этого случая свой метод, основанный на использовании понятия последовательных минимумов определенной положительной квадратичной формы, введенного Эрмитом. Пусть, например,

$$f = (x - az)^2 + (y - bz)^2 + \frac{x^2}{\Delta}, \quad (6)$$

где a и b — заданные иррациональные числа; x, y, z — целые рациональные числа; Δ — вещественный положительный параметр. При заданном значении $\Delta = \Delta_0$ можно привести такую систему x_0, y_0, z_0 целых рациональных чисел, что $f(x_0, y_0, z_0) \leq f(x, y, z)$, где x, y, z — любые рациональные целые числа. Затем можно найти такую возрастающую последовательность $\{\Delta_v\}$ значений Δ и такую последовательность систем x_v, y_v, z_v целых рациональных чисел, что при $\Delta_v < \Delta < \Delta_{v+1}$ справедливо неравенство

$$f_v \equiv f(x_v, y_v, z_v) \leq f(x, y, z),$$

где x, y, z — любые рациональные целые числа. При этом оказывается, что $f_v > f_{v+1}$ и $x_v < x_{v+1}$. Величины $f_v, v = 1, 2, \dots$ называются последовательными минимумами квадратической формы (6). Золотарев разработал метод отыскания последовательных минимумов тройничных квадратических форм и доказал теорему, согласно которой основное решение уравнения (4) находится среди систем целых рациональных чисел x, y, z , реализующих последовательные минимумы квадратической формы

$$2\psi + \frac{\varphi^2}{\Delta},$$

где

$$\varphi = x + y \sqrt[3]{A} + z \sqrt[3]{A^2};$$

$$2\psi = \left(x - y\sqrt[3]{A}\right)^2 + \left(x - z\sqrt[3]{A^2}\right)^2 + \left(y\sqrt[3]{A} - z\sqrt[3]{A^2}\right)^2;$$

$\Delta > 0$ — вещественный параметр.

В докторской диссертации — самой значительной работе Золотарева — развита теория целых чисел в числовом поле Q_x , элементы которого определяются формулой

$$\rho = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{n-1} x^{n-1}, \quad (7)$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ — рациональные числа; x — корень неприводимого в поле рациональных чисел уравнения

$$t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (8)$$

($a_1, a_2, \dots, a_n$ — тоже рациональные числа; $n \geq 2$ — целое). Число (7) называется целым, если оно удовлетворяет уравнению

$$t^n + A_1 t^{n-1} + \dots + A_n = 0,$$

где $A_1, A_2, \dots, A_n$ — целые рациональные числа. Если в выражении (7) числа $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ — целые рациональные, то легко доказать, что ρ — целое число поля Q_x , согласно только что приведенному определению. Если все целые числа поля Q_x могут быть получены таким образом, то условимся называть Q_x алгебраическим полем первого вида. Все остальные поля будем называть алгебраическими полями второго вида. В диссертации Золотарева (точнее, в первой ее части) развита общая теория целых чисел алгебраических числовых полей первого вида над полем рациональных чисел.

Частным случаем таких полей являются так называемые поля деления круга, изученные Куммером. Поле деления круга определяется таким уравнением (8), в котором $a_k = 1$, $k = 1, 2, \dots, n$; $n = p - 1$, где $p \geq 3$ — простое число. Именно в таких полях впервые были введены идеальные целые числа, необходимые для сохранения закона однозначной разложимости целого числа в произведение простых целых чисел. Только путем присоединения идеальных простых чисел к простым числам поля удается создать такой запас простых чисел в поле, который обеспечивает выполнение этого известного еще из арифметики целых рациональных чисел закона, играющего важную роль при решении различных теоретико-числовых задач. Как известно, созданная Куммером теория целых чисел в полях деления круга дала ему возможность доказать большую теорему Ферма для всех так называемых регулярных простых показателей. К сожалению, непосредственно обобщить теорию Куммера на случай любого неприводимого уравнения (8) нельзя, поскольку в ней существенную роль играют особые свойства уравнения деления круга. Поэтому Золотареву понадобилось проявить большую изобретательность, чтобы получить обобщение теории Куммера на произвольное алгебраическое поле первого вида. Свое обобщение он изложил в дополнении к диссертации, названной «О комплексных числах», в 1878 г. (опубликована в «Записках Петербургской академии наук», а также во французском журнале «Mélanges»). Затем в этом же

году он передал в редакцию журнала Лиувилля подробную статью по теории целых чисел общего алгебраического поля над полем рациональных чисел «О теории комплексных чисел». Все эти работы остались незамеченными, и сложилось мнение, что Золотарев только пытался создать теорию целых алгебраических чисел в общем виде, но этого ему не удалось сделать. Приоритет в создании такой теории укрепился за Дедекиндом, который развил ее в форме теории идеалов, т. е. в форме, отличной от теории Золотарева. И лишь в работах И. И. Иванова, опубликованных в 1891 и 1893 гг., впервые была доказана эквивалентность теорий Дедекинда и Золотарева и тем самым — приоритет Золотарева в создании общей теории чисел алгебраического числового поля. В 1925 г. Н. Г. Чеботарев показал, что, по существу, теория Золотарева представляет собой так называемую локальную теорию идеалов.

Выше упоминалось, что во второй части докторской диссертации Золотарев применил созданную им теорию целых алгебраических чисел к решению одной задачи теории интегрирования алгебраических функций. Эта задача заключалась в установлении эффективного метода вычисления (когда это возможно) интегралов вида

$$\int \frac{x + A}{\sqrt{R(x)}} dx, \quad (9)$$

где

$$R(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta;$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — заданные вещественные числа; A — некоторая надлежащим образом подобранная постоянная. Еще Абель доказал, что такой интеграл может быть вычислен в виде конечной комбинации элементарных функций, или, как говорят, в конечном виде, тогда и только тогда, когда разложение радикала $\sqrt{R(x)}$ в бесконечную непрерывную дробь обладает периодичностью, а именно: последовательность соответствующих неполных частных имеет вид

$$x^2 + B_0x + C_0, a_1x + b_1, \dots, a_mx + b_m;$$

$$Bx^2 + Cx + D, a_1x + b_1, \dots, a_mx + b_m, \dots$$

В этом случае интеграл (9) равен

$$\frac{1}{m} \ln (P + Q\sqrt{R(x)}),$$

где P и Q — многочлены, удовлетворяющие условию

$$\frac{P}{Q} = x^2 + B_0x + C_0 + \frac{1}{a_1x + b_1 + \frac{1}{a_2x + b_2 + \dots + \frac{1}{a_mx + b_m}}};$$

m — степень P . Слабым местом теоремы Абеля является отсутствие ограничения сверху числа m в зависимости от коэффициентов многочлена $R(x)$, что лишает его метод практической эффективности, поскольку

при отсутствии периодичности в последовательности неполных частных это нельзя установить, сколько бы ни продолжалось вычисление.

В 1860 г. в заметке «Об интегрировании иррациональных дифференциалов» Чебышев указал такой алгоритм, который при помощи конечного числа действий, не превышающего некоторого довольно просто вычисляемого наперед числа, позволяет либо вычислить интеграл (9) в конечном виде, либо установить невозможность такого вычисления. В этом алгоритме разложение радикала $\sqrt{R(x)}$ в непрерывную дробь также играло существенную роль. Свой метод Чебышев опубликовал без доказательства. Золотарев при помощи теории эллиптических функций Якоби, которой он мастерски владел, обосновал этот метод (1872 г.) и опубликовал свое исследование сначала в Германии, а затем во Франции (1874 г.), чтобы привлечь внимание западноевропейских математиков к полученному усовершенствованию метода Абеля. Однако, к сожалению, эта публикация не имела успеха.

Во второй части докторской диссертации Золотарев разработал метод, аналогичный методу Чебышева, для существенно более трудного случая, когда коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ многочлена $R(x)$ в интеграле (9) являются произвольными вещественными числами. В этом случае понадобился значительно более тонкий и сложный анализ, в котором решающую роль сыграли установленные в первой части арифметические закономерности теории целых чисел алгебраического числового поля первого вида и известные факты теории деления периода эллиптических функций. Однако вторая часть докторской диссертации не переиздавалась за границей, поэтому о ее содержании европейские математики долгое время знали еще меньше, чем о методе Чебышева. В целом докторская диссертация Золотарева — один из наиболее разительных примеров тесной связи теории чисел и математического анализа.

Рассмотрим работы по теории положительных квадратических форм с вещественными коэффициентами, выполненные Золотаревым совместно с Коркиным. Основная проблема, интересовавшая исследователей, заключалась в отыскании наибольшего минимума, которого могут достигать положительные определенные квадратические формы с заданным дискриминантом $D > 0$ при целочисленных значениях переменных. Обозначим множество всех положительных определенных квадратических форм n переменных с заданным дискриминантом $D > 0$ через $\mathfrak{m}_n(D)$. Задача состоит в отыскании такого числа $M_n(D)$, что при $f \in \mathfrak{m}_n(D)$ $0 < \min f \leq M_n(D)$, но при любом $\varepsilon > 0$ найдется по крайней мере одна такая форма $f_\varepsilon \in \mathfrak{m}_n(D)$, что $\min f_\varepsilon > M_n(D) - \varepsilon$. Эрмит доказал, что для любой формы $f \in \mathfrak{m}_n(D)$ справедливо неравенство

$$\min f \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[n]{D}. \quad (10)$$

Отсюда следует, что

$$M_n(D) \leq \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} \sqrt[n]{D}. \quad (11)$$

Однако эта оценка точна только при $n = 2$. Золотарев и Коркин, пользуясь найденным ими новым методом доказательства неравенства (10) и установленными ими неравенствами для тройничных квадратических форм, уточнили неравенство (10) следующим образом. Если $f \in \mathfrak{m}_n(D)$, то

$$\min f \leq \mu_n \sqrt[n]{D}, \quad (12)$$

где

$$\mu_{2m} = \sqrt{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{m-2}{2}}; \quad \mu_{2m+1} = \sqrt[2m+1]{2^m \left(\frac{3}{2}\right)^{m(m-1)}}.$$

Если $n = 3$, то из выражения (12) получаем

$$\min f \leq \sqrt[3]{2D};$$

при $n = 4$

$$\min f \leq \sqrt[4]{4D}.$$

Обе эти оценки, оказывается, точны, следовательно,

$$M_3(D) = \sqrt[3]{2D}, \quad M_4(D) = \sqrt[4]{4D}.$$

При $n \geq 5$ оценки из неравенства (12) уже неточны.

Важным понятием, введенным Золотаревым и Коркиным в теорию квадратических форм, является понятие предельной формы множества $\mathfrak{m}_n(D)$. Форма $f \in \mathfrak{m}_n(D)$ называется предельной, если ее минимум может только уменьшаться при любых изменениях ее коэффициентов, не изменяющих величины D дискриминанта формы. Форма, реализующая $M_n(D)$, содержится среди предельных форм множества $\mathfrak{m}_n(D)$. В работах Золотарева и Коркина найдены все предельные формы для $n = 2, 3, 4, 5$. В случае $n = 5$ оказалось три класса таких форм (все формы, эквивалентные по отношению к группе целочисленных унимодулярных линейных преобразований предельной форме, также являются предельными). Так удалось установить, что $M_5(D) = \sqrt[5]{8D}$, тогда как из неравенства (12) получается только неточная оценка $M_5(D) \leq \sqrt[5]{9D}$. Помимо исчерпывающего перечисления предельных форм в указанных случаях ими найдены также некоторые замечательные предельные формы и для других значений n . Так, оказалось, что при $n \geq 2$ является предельной форма

$$U_n = 2 \sqrt[n]{\frac{D}{n+1}} S,$$

а при $n \geq 3$ — форма

$$V_n = \sqrt[n]{2^{n-2}D} (S - x_1 x_2),$$

где

$$S = \frac{1}{2} \sum_1^n x_v^2 + \frac{1}{2} \left(\sum_1^n x_v \right)^2.$$

Эрмит высказал гипотезу (в письме к Якоби), что форма U_n реализует $M_n(D)$. Золотарев и Коркин при помощи формы V показали, что это не так уже при $n > 3$. При $n = 3, 4, 5$ форма V_n реализует $M_n(D)$, но при $n > 5$ это уже невозможно.

Сохранилась довольно обширная переписка (64 письма) между Золотаревым и Коркиным, относящаяся к 1871—1878 гг. В большинстве из этих писем обсуждаются различные вопросы их совместных исследований по теории квадратических форм, поэтому они являются весьма полезным дополнением к самим работам. Есть в письмах и некоторые данные о других исследованиях самого Золотарева, а также о его зарубежных поездках. Видно, что и Коркин и Золотарев интересовались признаком сходимости знакоположительных рядов, открытым в 1871 г. В. П. Ермаковым.

Результаты Золотарева и Коркина по теории квадратических форм получили высокую оценку Эрмита — общепризнанного авторитета в этой области. После смерти Золотарева Коркин не публиковал больше работ по теории квадратических форм, но по его совету А. А. Марков занялся исследованием вопроса о последовательных минимумах бинарных и тройничных неопределенных форм, получив в этом направлении весьма важные результаты (эта тема фигурировала в одном из последних писем Коркина Золотареву). Впоследствии Блехфельд нашел все классы предельных форм для $n = 6, 7, 8$, а в работах Г. Ф. Вороного понятие предельной формы было обобщено в понятие совершенной формы.

Некоторым приложениям эллиптических функций и эллиптических интегралов кроме рассмотренных выше посвящены и другие работы Золотарева. В статьях «Об одном вопросе о наименьших величинах» (1868 г.), «Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля» (1877 г.) и «О приложениях эллиптических функций к вопросам о максимумах и минимумах» (на французском языке, 1878 г.) решаются некоторые задачи, относящиеся к созданной Чебышевым теории функций, наименее уклоняющихся от нуля на заданном интервале. Приведем некоторые теоремы, доказанные в этих работах, несколько изменяя их редакции.

Теорема 1. Если $\sigma \in \left[-n \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}; n \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n} \right]$, то полином

$$x^n - \sigma x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n$$

не может быть по абсолютной величине меньше чем

$$\frac{1}{2^{n-1}} \left(1 + \frac{\sigma}{n} \right)^n,$$

когда x изменяется на сегменте $[-1; 1]$. Если же $|\sigma| > n \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}$ (σ — вещественное), то в этих же границах изменения x абсолютная величина полинома не может быть меньше чем

$$\frac{1}{2^{n-1}} \left[\frac{V \bar{k} \theta_1^2(0)}{H_1 \left(\frac{K}{n} \right) \theta_1 \left(\frac{K}{n} \right)} \right]^{2n}.$$

Здесь

$$H\left(\frac{2K}{\pi} u\right) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} q^{\left(\frac{2m-1}{2}\right)^2} \cos(2m-1)u;$$

$$\theta_1\left(\frac{K}{\pi} u\right) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} q^{m^2} \cos mu;$$

K и K' — известные постоянные теории эллиптических функций Якоби;
 $q = \exp\left(-\pi \frac{K'}{K}\right)$; модуль k — корень уравнения

$$1 + \frac{\sigma}{n} = \frac{2 \operatorname{sn} \psi}{\operatorname{cn} \psi \cdot dn \psi} \left(\frac{1}{\operatorname{sn} 2\psi} - \frac{\theta'(\psi)}{\theta(\psi)} \right),$$

где $\psi = \frac{K}{\pi}$;

$$\theta\left(\frac{K}{\pi} u\right) = 1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m q^{m^2} \cos mu.$$

Теорема 2. Рациональная дробь

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

($\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — полиномы степени не выше n), удовлетворяющая условию $\left| \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \right| \leq 1$ на сегменте $-1 \leq x \leq 1$, не может превышать по абсолютной величине числа

$$k^{-n} \left(\prod_{m=1}^s \operatorname{sn} \frac{(2m-1)}{n} \right)^{-4},$$

если $|x| \geq \frac{1}{k}$, где k — постоянная; $0 < k < 1$; $\operatorname{sn} u$ — функции Якоби с модулем k ; $s = \left[\frac{n}{2} \right]$.

Оценки, указанные в приведенных теоремах, точны, причем установлен вид экстремальных функций. Первая теорема обобщает известную задачу, решенную Чебышевым, об отыскании наименьшего возможного отклонения от нуля на сегменте $[-1; 1]$ полинома

$$x^n + p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_{n-1} x + p_n, \quad (13)$$

где $n \geq 1$ — заданное число.

В 1928 г. Н. И. Ахиезер открыл глубокую связь между задачей о нахождении полинома вида (13), наименее уклоняющегося от нуля на сегменте $[-1; 1]$, при заданных последовательных начальных коэффициентах $p_1, p_2, \dots, p_j$, $1 \leq j \leq n$, и функцией Грина $(j+1)$ -связной области, получающейся из плоскости путем проведения разрезов по $j+1$ отрезкам вещественной оси. Это дало ему возможность объяснить причину явления «бифуркации» (раздвоения), наблюдающейся при

решении задачи в случае $j = 1$. Интересное дополнение к этой теореме сделал Н. Г. Чеботарев (1925 г.), показав, как в случае $|\sigma| \geq n \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2n}$ получить выражение для экстремального полинома, свободное от символов функций Якоби, которые, по Золотареву, в него входят.

В заметке «О притяжении однородных эллипсоидов» (на французском языке) Золотарев, пользуясь эллиптическими интегралами, дополняет теорему Лежандра о проекциях на оси эллипсоида силы притяжения, оказываемого эллипсоидом на любую точку, находящуюся внутри его. Если эти проекции — X, Y, Z ³⁵, уравнение эллипсоида в декартовых координатах —

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b > c,$$

M — масса эллипсоида, ρ — плотность, ξ, η, ζ — координаты точки, то, полагая

$$n^2 = a^2 - c^2, \quad m^2 = b^2 - c^2, \\ k^2 = 1 - \frac{m^2}{n^2}, \quad \cos \varphi = \frac{c}{a},$$

Лежандр доказал, что

$$\frac{X}{\xi} + \frac{Y}{\eta} + \frac{Z}{\zeta} = 4\pi\rho, \quad \frac{Xa^2}{\xi} + \frac{Yb^2}{\eta} + \frac{Zc^2}{\zeta} = \frac{3M}{n} F(k, \varphi),$$

где $F(k, \varphi)$ — эллиптический интеграл первого рода. Золотарев получил еще одно соотношение между X, Y, Z :

$$\frac{Xa^2(b^2 + c^2)}{\xi} + \frac{Yb^2(c^2 + a^2)}{\eta} + \frac{Zc^2(a^2 + b^2)}{\zeta} = \frac{3MabcS}{\pi\sigma^4},$$

где S — поверхность эллипсоида с полуосями

$$\alpha = \frac{\sigma^2}{a}, \quad \beta = \frac{\sigma^2}{b}, \quad \gamma = \frac{\sigma^2}{c};$$

σ — произвольный положительный параметр.

В другой работе Золотарева — «Заметка об одной формуле М. Лиувилля» (на французском языке) — дано доказательство, при помощи теории эллиптических функций, одной теоретико-числовой формулы, приведенной Лиувиллем без доказательства (как известно, Лиувилль приводит много формул без доказательств, часть из них не доказана и поныне).

Из последних работ Золотарева особенно интересна заметка «Об одном минимуме» (на французском языке), написанная им совместно с Коркиным. Она содержит решение следующей задачи. Из всех полиномов вида

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n,$$

³⁵ Обозначения здесь и ниже несколько изменены.

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — вещественные величины, $n \geq 1$ — заданное целое число, найти тот, который реализует минимум интеграла

$$I(f) = \int_{-1}^1 |f(x)| dx.$$

Оказалось, что экстремальный полином может быть определен формулой

$$f(x) = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\sin[(n+1) \arccos x]}{\sqrt{1-x^2}},$$

а

$$\min I(f) = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

В одной из трех остальных заметок этого периода Золотарев сообщает найденное им новое доказательство закона взаимности теории квадратичных вычетов, в другой — новый вывод ряда Лагранжа с остаточным членом в интегральной форме, в третьей — метод отыскания коэффициентов целых рациональных функций X, Y, Z переменной x , связанных уравнением

$$Y^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} p Z^2 = X^2,$$

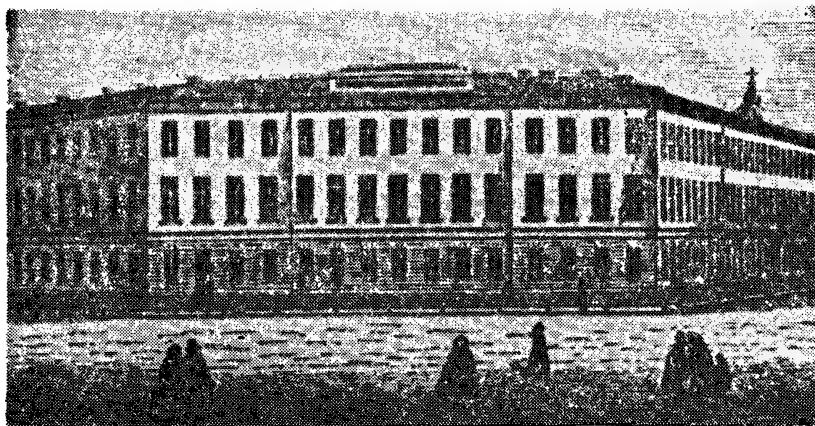
где $p > 2$ — простое целое число. Впоследствии оказалось, что эта задача, связанная с уравнением деления окружности на p частей, была раньше другим методом решена Лиувиллем.

7

Математика в петербургских специальных технических и военных учебных заведениях

В 60—80-е годы XIX в. высшая техническая школа претерпела существенные изменения. Петербургский технологический, Константиновский межевой институты, Московское техническое и другие училища были преобразованы в высшие учебные заведения, хотя и сохраняли еще некоторое время подготовительные классы. Горный институт, институты инженеров путей сообщения, гражданских инженеров, Лесной и другие стали открытыми гражданскими учебными заведениями. Были открыты Рижский политехнический институт (1862 г.) и Сельскохозяйственная академия в Петровско-Разумовском под Москвой (1865 г.).

В этот период в технических и военных учебных заведениях расширяются курсы математики, оживляется научная деятельность преподавателей. Единой программы преподавания в технических школах не было. Не было и единого руководящего органа для высших учебных заведений. Они подчинялись различным министерствам и ведомствам. Каждый институт составлял для себя учебные планы, учитывая собственные возможности и традиции, а в отдельных случаях — и наличие



Петербургский технологический институт (60-е годы XIX в.).

преподавательских кадров, практические потребности. Наибольшее число часов на математику отводилось в Институте инженеров путей сообщения, достаточно большими были математические курсы также в Технологическом и Горном институтах.

Основной преподавательский состав по математике в высшей технической школе был немногочислен. Многие профессора преподавали одновременно в нескольких учебных заведениях. Так, в Горном институте на протяжении более чем полувека (1855—1910 гг.) основные курсы высшей математики читал горный инженер заслуженный профессор Г. А. Тиме, одновременно преподавая в Морской академии. Высшую математику, маркшейдерское дело и прикладную механику в 1839—1870 гг. в институте читал горный инженер П. А. Олышев (1817—1896), геодезию и сферическую тригонометрию в 1867—1908 гг. — Э. А. Коверский.

В Институте инженеров путей сообщения математику преподавали профессора И. С. Янушевский (до 1871 г.) и Ф. Ф. Перрот (читавший некоторое время также в Строительном училище), а затем воспитанники Петербургского университета К. А. Поссе, Н. С. Будаев, Е. И. Золотарев. Практические занятия вели И. А. Богуславский, Н. П. Дуров, Ф. Орлов, Ю. К. Шульц.

На преподавание математики в Петербургском технологическом институте большое влияние оказал профессор, а с 1875 г. — директор института И. А. Вышнеградский. Ведущими преподавателями высшей математики были М. А. Красновский (с 1859 по 1891 г.), А. Н. Коркин и И. А. Евневич.

Научно-методическая деятельность профессоров математики технической школы проявилась прежде всего в составлении новых учебных руководств, соответствовавших требованиям времени. Так, в Институте инженеров путей сообщения в 1865 и 1866 гг. были изданы учебники по дифференциальному исчислению и приложениям его к анализу под редакцией профессора Перрота и по аналитической геометрии, интегральному исчислению и статике — профессора Янушевского. Эти пособия охватывали материал первых двух курсов. Внимание

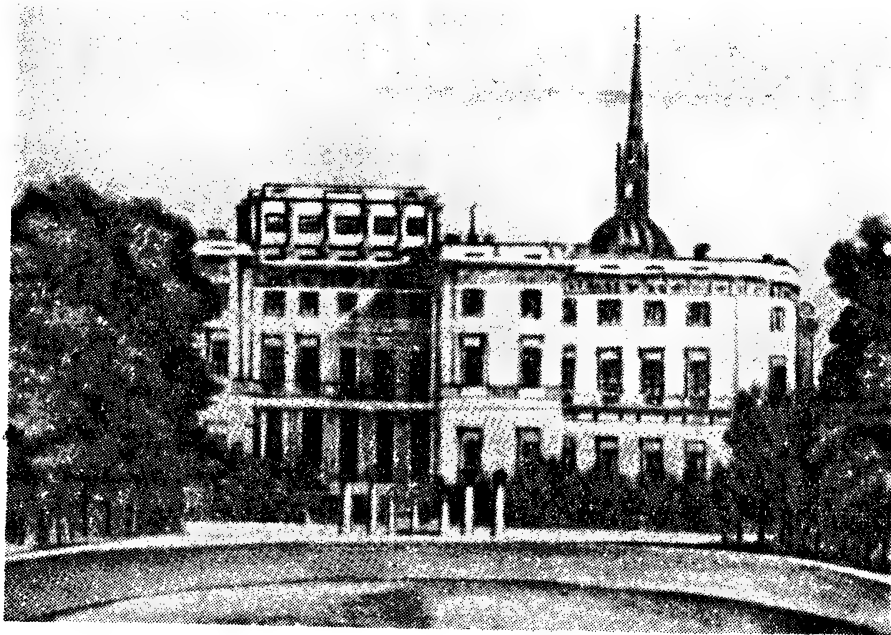
преподавателей математики привлекали различные вопросы практической механики. Например, профессор Ф. Ф. Перрот в своих чисто научных исследованиях касался теории устойчивости сводов и висячих мостов, Н. П. Дуров занимался историей строительного дела и историей литературы и написал руководство по начертательной геометрии, Л. А. Ераков специализировался по паровозо- и вагоностроению.

Большую роль в постановке преподавания математики в Горном институте сыграла деятельность Г. А. Тиме. Георгий Августович Тиме (1831—1910) родился в г. Златоусте в семье главного медицинского инспектора уральских заводов. В 20 лет окончил курс Горного института и начал службу на пароходостроительной фабрике Воткинского завода. В 1853 г. был послан на уральские заводы и Алтай для обозрения горных разработок, а затем в Германию и Бельгию для изучения горной механики и маркшейдерского дела. С 1855 г. Тиме преподает математику в Горном институте, а с 1862 — также в Морской академии. В Горном институте он читал кроме математики теоретическую механику, начертательную геометрию и маркшейдерское дело.

За границей Г. А. Тиме слушал лекции Вейерштрасса и Римана. Затем, в 1865 г. он один из первых в России прочел в Морской академии публичные лекции по теории функций комплексного переменного. Его лекции посещали такие выдающиеся ученые, как П. Л. Чебышев, В. Я. Буняковский, О. И. Сомов и др. В 70-е годы профессор Тиме читал в институте специальный курс теории эллиптических функций, а также другие аналогичные курсы. Несколько ранее он издал перевод курса теории эллиптических функций Бетти, а в 1903 г. — свой труд по аналитической механике. Однако основная научная заслуга Г. А. Тиме состоит в создании русской литературы по маркшейдерскому искусству. Он первый обратил внимание на основные недостатки в постановке горно-геометрического дела в России и в своих трудах заложил основы для новой постановки маркшейдерской службы в соответствии с возросшими запросами горной промышленности, разработал вопросы о применении триангуляции как основы горно-геометрических съемок, о точном методе ориентирования съемок относительно астрономического меридиана, о методике подземных съемок, о методах устранения погрешностей измерений при подземных и других маркшейдерских съемках и др.

Г. А. Тиме сыграл также большую роль в деле распространения математических знаний. Он принимал участие в издании первого математического журнала «Вестник математических наук» (Вильно, 1862). Благодаря его неутомимой энергии в Горном институте была создана одна из лучших в стране математическая библиотека. Число его учеников огромно для того времени — около двух тысяч. Как отмечают современники, лекции Тиме отличались простотой, ясностью, сжатостью.

В рассматриваемый период существенные организационные преобразования претерпело Штурманское училище. В 1872 г. оно было слито с Морским инженерным и Кронштадтским артиллерийским училищами. Новое заведение стало называться Техническим училищем Морского ведомства. В Штурманском и Морском инженерном училищах математику



Главное инженерное училище в Петербурге.

преподавали А. Ф. Худынцев, В. П. Харин, К. Е. Зембжицкий, П. А. Дьячков. В Техническом училище Морского ведомства высшую математику читал воспитанник академического курса морских наук по механическому отделу лейтенант А. И. Пароменский.

Преподавателями математики в Михайловской артиллерийской академии были Н. С. Будаев, П. Л. Лавров, П. М. Альбицкий, Н. А. Забудский и др. Альбицкий — воспитанник Московского университета и Михайловской академии, автор «Курса внутренней баллистики» (1867 г.) и других работ (около 20) в этой области. Забудский — воспитанник Михайловской академии (окончил в 1877 г.), сначала репетитор по математике, а затем известный специалист по баллистике, заслуженный профессор и член-корреспондент Парижской академии наук. Он слушал лекции в Петербургском университете и Сорбонне. В 1880 г. защитил диссертацию «О канонических уравнениях движения и дифференциальных уравнениях движения продолговатого снаряда, принимая воздух, как возмущающую причину». Принимал большое участие в практической работе по улучшению материального оснащения русской армии. Его перу принадлежит большое количество выдающихся научных работ по математике, механике, баллистике (внешней и внутренней), материальной части артиллерии, в том числе известный курс «Теория вероятностей и применение ее к стрельбе и пристрелке» (1898 г.).

В Академии Генерального штаба на геодезическом отделении (открытом в 1854 г.) читался курс астрономии, в который входили также сферическая тригонометрия, теория вероятностей, элементы приближенных вычислений, теория интерполяции, способ наименьших квадратов. Курс читал профессор Петербургского университета А. Н. Савич, издавший в 1857 г. пособие по этому предмету.

Из специальных высших военных учебных заведений школами, в которых курс математики в рассматриваемый период читался в наиболее широком объеме, были Михайловская артиллерийская академия и училище при ней. Курс математики в училище был обширнее курсов всех других наук, кроме артиллерии.

В Артиллерийском и Главном инженерном училищах изучались дополнительные главы элементарной математики, а также начальный курс высшей математики (в двух старших классах), в котором большое внимание уделялось приближенным вычислениям и применению их на практике. В Морском корпусе, именовавшемся с 1867 по 1891 г. Морским училищем и являвшемся, по существу, высшим учебным заведением, на изучение математики, механики и физики отводилось 25% учебного времени (на все другие общеобразовательные предметы — 35 и на специальные — 40%). В 1862 г. офицерские классы училища были преобразованы в Академические курсы морских наук с двухлетним сроком обучения, а в 1877 г. на их базе учреждена двухгодичная Николаевская морская академия с тремя отделениями: гидрографическим, кораблестроительным и механическим. В Главном инженерном училище и Николаевской инженерной академии в этот период высшую математику преподавали П. Е. Рощин — автор известного учебника по дифференциальному и интегральному исчислению, Н. С. Будаев, а также Н. А. Фицтум фон Экстедт. Ведущими преподавателями Морской академии и Морского корпуса были профессор Г. А. Тиме, читавший аналитическую геометрию и алгебру, и А. Н. Коркин — математический анализ.

8

Жизнь и научная деятельность С. В. Ковалевской

Среди выдающихся отечественных математиков и механиков XIX в. видное место занимает С. В. Ковалевская — первая русская женщина, ставшая всемирно известным ученым. Софья Васильевна Ковалевская родилась 15 (3) января 1850 г. в Москве. Ее отец Василий Васильевич Корвин-Круковский был генерал-лейтенантом артиллерии. Мать Елизавета Федоровна — дочь генерала-топографа Ф. Ф. Шуберта и внучка известного астронома академика Ф. Ф. Шуберта. Детство С. В. Ковалевская провела в имении родителей, в с. Палибино Витебской губернии, где получила хорошее образование у домашнего учителя И. И. Малевича. Уже в детские годы у нее появился интерес к математике. Этому, по словам самой Ковалевской ³⁶, благоприятствовали беседы с дядей П. В. Корвин-Круковским, который «из разных книг набрался кое-каких математических сведений и любил пофилософствовать по их поводу», а также случайное

³⁶ С. В. Ковалевская. Воспоминания и письма. Изд-во АН СССР, М., 1951, стр. 52—53.



С. В. Ковалевская.

обстоятельство — одна из детских комнат в Палибино была оклеена листами из математической книги (как оказалось, это были листы из литографированных лекций М. В. Остроградского по дифференциальному исчислению). «Листы эти, — пишет С. В. Ковалевская, — испещренные странными, непонятными формулами, скоро обратили на себя мое внимание. Я помню, как я в детстве проводила целые часы перед этой таинственной стеной, пытаюсь разобрать хоть отдельные фразы и найти тот порядок, в котором листы должны были бы следовать друг за другом. От долгого, ежедневного созерцания внешний вид многих из формул так и врезался в моей памяти, да и самый текст оставил по себе глубокий след в мозгу, хотя в самый момент прочтения он и остался для меня непонятным.

Когда много лет спустя, уже пятнадцатилетней девочкой, я брала первый урок дифференциального исчисления у известного преподавателя математики в Петербурге Александра Николаевича Страннолюбского, он удивился, как скоро я охватила и усвоила себе понятия о пределе и о производной, «точно я наперед их знала». Я помню, он

именно так и выразился. И дело, действительно, было в том, что в ту минуту, когда он объяснял мне эти понятия, мне вдруг живо припомнилось, что все это стояло на памятных мне листах Остроградского, и самое понятие о пределе показалось мне давно знакомым».

В четырнадцатилетнем возрасте С. В. Ковалевская, совершенно не зная тригонометрии, сумела самостоятельно разобраться в смысле тригонометрических формул, встретившихся ей в учебнике физики, а также воссоздать простейшие теоремы тригонометрии. Этим она привела в изумление профессора математики Н. П. Тыртова, посещавшего семью Корвин-Круковских. Именно по настоянию Н. П. Тыртова С. В. Ковалевской с 15 лет было разрешено брать уроки по высшей математике у А. Н. Страннолюбского во время зимних приездов семьи в Петербург. Есть сведения, что юная Ковалевская по поводу занятий математикой советовалась с П. Л. Чебышевым ³⁷.

Стремясь освободиться от родительской опеки, С. В. Ковалевская в 18 лет вышла замуж за Владимира Онуфриевича Ковалевского, впоследствии известного палеонтолога. Осенью 1868 г. Ковалевские переехали в Петербург. В это время в России женщинам доступ в университеты был запрещен, поэтому в 1869 г. для продолжения образования С. В. Ковалевская уехала за границу. Сначала она остановилась в Гейдельберге, где слушала лекции по математике и физике у Кенигсбергера, Кирхгофа, Дюбуа-Реймона и Гельмгольца, а затем в 1870 г. переехала в Берлин и стала ученицей знаменитого Вейерштрасса. Однако занималась она с ним частным образом, так как к слушанию лекций в Берлинском университете допущена не была. Занятия продолжались четыре года (1870—1874 гг.) с перерывами на время поездок Ковалевской в Париж (весной 1871 г.) и в Россию (летом 1872 и 1873 гг.). Вейерштрасс был очень высокого мнения о математическом таланте своей ученицы. Своему другу математику Л. Фуксу он писал: «...Я могу с уверенностью сказать, что у меня было очень мало учеников, которые могли бы сравниться с ней в том, что касается ее способностей, суждений, прилежания и любви к науке» ³⁸.

В период учебы у Вейерштрасса С. В. Ковалевская не только глубоко изучила некоторые высшие разделы теоретической и прикладной математики, в частности теории самого Вейерштрасса, но и сама выполнила три важные научные работы. По ходатайству Вейерштрасса ученый совет Геттингенского университета присудил Ковалевской за эти работы без экзаменов с высшей похвалой степень доктора философии ³⁹.

³⁷ П. Я. Полубаринова-Кочина. Софья Васильевна Ковалевская. — В кн.: С. В. Ковалевская. Научные работы. Изд-во АН СССР, М., 1948.

³⁸ С. В. Ковалевская. Научные работы, стр. 346.

³⁹ За свою жизнь С. В. Ковалевская напечатала девять научных работ на немецком и французском языках в иностранных журналах. Сейчас все эти работы переведены на русский язык и изданы отдельной книгой, цитированной выше. Достаточно полные обзоры научного наследия С. В. Ковалевской можно найти в статьях: Н. Е. Жуковский. О трудах С. В. Ковалевской по прикладной математике. — Математический сборник, 1891, т. 16, вып. 1, стр. 10—20;

Первая работа «К теории дифференциальных уравнений в частных производных» (1875 г.) посвящена доказательству существования аналитического (голоморфного) решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений в частных производных. Решения ищутся в виде сходящихся степенных рядов. Эту идею впервые применил Коши как к обыкновенным дифференциальным уравнениям, так и к уравнениям в частных производных. Вейерштрасс, а после него Брио и Буке усовершенствовали метод Коши в отношении уравнения

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \quad (14)$$

и системы уравнений вида

$$\frac{dy_i}{dx} = F_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (15)$$

где x — независимое переменное, $y_1, y_2, \dots, y_n$ — неизвестные функции. Ковалевской принадлежит дальнейшее, более общее и более сложное развитие идеи Коши. В начале работы она рассматривает систему однородных дифференциальных уравнений первого порядка, линейных относительно частных производных от искомых функций $y_1, y_2, \dots, y_m$ по независимым переменным $x, x_1, \dots, x_n$:

$$\frac{\partial y_i}{\partial x} = \sum_{k,l} F_{k,l,i}(y_1, y_2, \dots, y_m) \frac{\partial y_k}{\partial x_l} \quad (16)$$

($i, k = 1, 2, \dots, m; l = 1, 2, \dots, n$).

Соответствующую теорему Ковалевской можно сформулировать в следующем виде. Пусть функции $y_1, y_2, \dots, y_m$ переменных $x, x_1, \dots, x_n$ при $x = a$ превращаются в заданные начальные функции $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), которые разлагаются в ряды по целым положительным степеням разностей $x_i - a_i$, сходящиеся в окрестности $|x_i - a_i| < \rho$ ($i = 1, 2, \dots, m$). Пусть, далее, коэффициенты $F_{k,l,i}$ разлагаются в ряды по целым положительным степеням $y_i - b_i$, сходящиеся при выполнении условий

$$|y_i - b_i| < r \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

где

$$b_i = \varphi_i(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Тогда существует единственная система функций $y_1, y_2, \dots, y_m$, которые удовлетворяют уравнениям (16), превращаются при $x = a$ в указанные выше начальные функции $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ и разлагаются в окрестности точки $(a, a_1, \dots, a_n)$ в абсолютно сходящиеся ряды по целым положительным степеням разностей $x - a, x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n$.

П. А. Некрасов. О трудах С. В. Ковалевской по чистой математике. — Там же, стр. 21—38; П. Я. Полубаринова-Кочина. Научные работы С. В. Ковалевской. — Усп. мат. наук, 1950, т. 5, вып. 4 (38), стр. 3—14.

Теорема доказывается по методу мажорантных рядов. Затем легко распространяется на линейную неоднородную систему

$$\frac{\partial y_i}{\partial x} = \sum_{k,l} F_{k,l,i}(y_1, y_2, \dots, y_m) \frac{\partial y_k}{\partial x_l} + f_i(y_1, y_2, \dots, y_m) \quad (17)$$

$(i, k = 1, 2, \dots, m; l = 1, 2, \dots, n).$

Далее рассматривается нелинейное уравнение

$$R\left(x, x_1, \dots, x_n, y, \dots, \frac{\partial^{\alpha+\alpha_1+\dots+\alpha_n} y}{\partial x^\alpha \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \dots\right) = 0, \quad (18)$$

где R — целая рациональная функция от независимых переменных $x, x_1, \dots, x_n$, искомой функции этих переменных y и ее частных производных. Задача состоит также в определении степенного ряда относительно разностей $x - a, x - a_1, \dots, x - a_n$, сходящегося внутри некоторой окрестности точки $(a, a_1, \dots, a_n)$. Система уравнений вида (18) исследуется относительно искомых функций $y_1, y_2, \dots, y_m$. Существование аналитических решений задачи Коши для указанных уравнений и систем уравнений высших порядков доказано путем их сведения к системам уравнений (16) или (17) преобразованием переменных. Отдельно рассмотрены так называемые нормальные уравнения и системы уравнений в частных производных высшего порядка, когда в эти уравнения входят наиболее высокие из возможных производных по основной переменной x и когда уравнения разрешены относительно этих производных. Общие уравнения и системы уравнений приводятся к нормальным с помощью линейных преобразований независимых переменных.

Некоторые важные детали, относящиеся к рассмотренной работе, раскрываются в письме Ковалевской известному математику Миттаг-Леффлеру от 15 июля 1885 г. Ковалевская пишет, что вопрос о приоритете решения задачи Коши для уравнений в частных производных «обстоятельно обсуждался во Французской академии наук в связи с работой Дарбу по тому же вопросу, написанной и представленной несколькими месяцами позже меня... Когда я писала свою работу, я, действительно, как и Вейерштрасс, не знала, что Коши занимался этим вопросом, и это было большой ошибкой с нашей стороны. Однако в свое время Вейерштрасс указал Эрмиту, что ни Коши, ни Дарбу не заметили главных условий, при которых дифференциальное уравнение в частных производных всегда имеет интеграл... Ни один из них не подозревал даже, что возможны случаи, как например,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2},$$

когда формально существует ряд от x, y , удовлетворяющий этому уравнению, если при $x = a$ взять произвольное значение функции $\varphi = \varphi_0(y/b)$, но что этот ряд будет сходящимся только при частном выборе начальной функции; в общем случае ряд будет расходящимся. Именно

этому результату моих исследований Вейерштрасс всегда придавал наибольшее значение»⁴⁰.

В самом деле, Ковалевская показала, что ряд

$$\sum_{v=0}^{\infty} \frac{d^{2v} \varphi_0(y/b) (x-a)^v}{dy^{2v} v!},$$

формально удовлетворяющий уравнению теплопроводности, будет сходящимся, лишь если $\varphi_0(y/b)$ будет целой функцией, для которой коэффициенты ряда по степеням $y-b$ достаточно быстро убывают.

Вторая работа С. В. Ковалевской «Дополнения и замечания к исследованию Лапласа о форме кольца Сатурна» (1885 г.) посвящена следующей задаче Лапласа. Заполненное однородной массой кольцо, образованное вращением эллипса вокруг прямой, не пересекающей его, но лежащей в его плоскости и параллельной одной из его главных осей, вращается с равномерной скоростью вокруг этой прямой (оси кольца). Поверхность кольца покрыта бесконечно тонким слоем однородной жидкости, притягивающейся кольцом и, кроме того, центральным телом (планетой), центр тяжести которого совпадает с центром кольца. Спрашивается, могут ли быть определены элементы кольца (полуоси производящего эллипса и расстояние от центра эллипса до оси вращения) и его скорость вращения так, чтобы жидкость сохраняла положение равновесия (относительно поверхности кольца). Для последнего, как известно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось уравнение

$$V + \frac{M}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 = c, \quad (19)$$

где ω — угловая скорость вращения кольца; V — потенциал кольца в некоторой точке его поверхности; r — расстояние этой точки до оси вращения; z — ее расстояние до экваториальной плоскости; M — масса центрального тела, которая принимается сосредоточенной в его центре тяжести; c — постоянная.

Лаплас решал задачу в предположении, что расстояние от центра кольца до центра производящего эллипса очень велико по сравнению с полуосями последнего. Это дало ему возможность в первом приближении заменить кольцо Сатурна эллиптическим цилиндром. Вообще решение Лапласа представляет собой только первое приближение к решению задачи, причем из него не видно, какого порядка члены опущены.

С. В. Ковалевская решает задачу о равновесии кольца Сатурна с большей точностью, так, чтобы по желанию можно было ограничиться членами того или другого порядка. Предполагается, что контур фигуры, создающей кольцо, мало отличается от эллипса и подобно ему обладает осью симметрии, пересекающей при своем продолжении ось кольца под

⁴⁰ П. Я. Полубаринова-Кочина. Научные работы С. В. Ковалевской. — Усп. мат. наук, 1950, т. 5, вып. 4 (38), стр. 5 (символом $\varphi(y/b)$ Ковалевской обозначен степенной ряд по целым положительным степеням $y-b$).

прямым углом, причем каждая прямая, параллельная оси симметрии, пересекает этот контур только в двух точках.

План решения задачи таков. Выбирается прямоугольная система координат с осью z , которая совпадает с осью вращения кольца и координатной плоскостью (x, y) , проходящей через ось симметрии контура фигуры, создающей кольцо. В этой системе координат поверхность кольца задается параметрическими уравнениями вида

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - a \cos t; \quad (20)$$

$$z = a(\beta_1 \sin t + \beta_2 \sin 2t + \beta_3 \sin 3t + \dots),$$

где t ($0 \leq t \leq 2\pi$) — действительный параметр; $a, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ — постоянные, причем a считается малой величиной по сравнению с единицей, а $\beta_2, \beta_3, \dots$, и их сумма — малыми по сравнению с β_1 . Указывается способ определения коэффициентов $\beta_1, \beta_2, \dots$ так, чтобы левая часть уравнения (19) всюду отличалась от постоянной на малую величину любого порядка малости относительно a . При этом выясняется, что коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \dots$ последовательно убывают, вследствие чего, взяв во второй формуле (20) надлежащее число членов, можно получить решение задачи с желаемой степенью точности.

Решение Лапласа соответствует только одному первому члену. Ковалевская доводит решение до двух первых членов и получает второе приближение. Это приближение дает для контура фигуры, создающей кольцо, форму овала, т. е. яйцевидную замкнутую кривую, имеющую в отличие от эллипса лишь одну ось симметрии. От получения дальнейших приближений она воздержалась из-за трудностей вычисления, а также потому, что, по исследованиям Максвелла, «стало сомнительным, приемлемо ли вообще воззрение Лапласа о строении колец Сатурна»⁴¹. Ковалевская занималась также вопросом устойчивости жидкого кольца как фигуры равновесия, но не получила определенных результатов. Впоследствии была доказана неустойчивость такого кольца.

В третьей работе — «О приведении некоторого класса абелевых интегралов третьего ранга к эллиптическим интегралам» (1884 г.) — С. В. Ковалевская решает задачу, предложенную ей Вейерштрассом: при каких условиях гиперэллиптический интеграл вида

$$\int \frac{(c_0 + c_1 z + c_2 z^2) dz}{\sqrt{(z - a_0)(z - a_1) \dots (z - a_7)}}$$

приводится к эллиптическому интегралу

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}.$$

Показано, что это приведение возможно при некотором определенном выборе величин c_0, c_1 и c_2 только в двух случаях:

⁴¹ С. В. Ковалевская. Научные работы, стр. 149.

1) когда величины $a_0, a_1, a_2, \dots, a_7$ удовлетворяют одновременно уравнениям

$$1 = \frac{(a_0 - a_1)(a_2 - a_7)(a_3 - a_4)(a_5 - a_6)}{(a_0 - a_7)(a_1 - a_2)(a_3 - a_6)(a_4 - a_5)},$$

$$1 = \frac{(a_0 - a_5)(a_1 - a_6)(a_2 - a_3)(a_4 - a_7)}{(a_0 - a_3)(a_1 - a_4)(a_2 - a_5)(a_6 - a_7)};$$

2) когда эти же величины удовлетворяют уравнению

$$1 = \frac{(a_0 - a_4)(a_1 - a_3)(a_2 - a_6)(a_5 - a_7)}{(a_0 - a_6)(a_1 - a_5)(a_2 - a_4)(a_3 - a_7)}.$$

Итак, за первые три научные работы С. В. Ковалевская получила степень доктора философии. Об этих работах Вейерштрасс писал Фуксу следующее: «Я лично без всяких колебаний допустил бы каждую из названных работ в качестве диссертации на степень доктора. Но ввиду того, что это первый случай, когда женщина желает получить степень за математические работы, то факультет не только имеет все основания поставить строгие требования, но это и необходимо в интересах как самой аспирантки, так и моих»⁴².

В 1874 г. Ковалевская вернулась в Петербург. Однако у себя на родине она не могла получить работу по специальности. Ей было отказано в сдаче магистерских экзаменов. В 1874—1880 гг. Ковалевская отошла от исследований по математике, если не считать доклада на 6-м съезде русских естествоиспытателей в Петербурге (декабрь 1879 г.) по старой работе об абелевых интегралах, и занялась литературно-публицистической деятельностью. Она сотрудничала в газетах и журналах, где помещала научные очерки и театральные рецензии, написала повесть «Нигилистка» о жизни русских революционеров, которая вышла в свет на немецком языке в 1896 г., а на русском — лишь после Октябрьской революции.

В 1881 г. Ковалевская уехала за границу, побывала в Берлине, у Вейерштрасса, и в Париже, где французские ученые тщетно пытались устроить ей профессию на Высших женских курсах в Севре. В апреле 1883 г. трагически погиб муж Ковалевской. Он был директором нефтяной компании. Компания потерпела крах, а он сам в ожидании суда покончил с собой. Ковалевская, находившаяся в то время в Париже, очень тяжело перенесла известие о смерти мужа. Оправившись после болезни, она приехала в Россию и, убежденная в честности мужа, добилась установления его невиновности.

В августе 1883 г. в Одессе состоялся 7-й съезд русских естествоиспытателей и врачей, на котором Ковалевская прочла доклад «О преломлении света в кристаллических средах». Это была основная работа, выполненная ею в 1881—1883 гг. (опубликована в 1883 г.). Вторая работа по этому вопросу — «О распространении света в кристаллической среде» (1884 г.) — представляет собой резюме первой.

В «Лекциях по упругости» Ламе свел задачу о распространении све-

⁴² С. В. Ковалевская. Научные работы, стр. 346.

товой волны в кристаллических средах двойной преломленности к интегрированию следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) - b^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) - c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= b^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) - a^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где x, y, z — прямоугольные координаты точки колеблющейся среды; ξ, η, ζ — компоненты перемещения этой точки из ее положения равновесия; t — время; a, b, c — три положительные постоянные, главные оси упругости рассматриваемого тела. Он нашел частное решение этой системы в виде

$$\xi = X \cos 2\pi \frac{t-\lambda}{\tau}, \quad \eta = Y \cos 2\pi \frac{t-\lambda}{\tau}, \quad \zeta = Z \cos 2\pi \frac{t-\lambda}{\tau}, \quad (22)$$

где X, Y, Z — некоторые функции координат точки; τ — продолжительность полного колебания, и показал, что световые волны определяются поверхностями

$$\frac{x^2}{r^2 - a^2} + \frac{y^2}{r^2 - b^2} + \frac{z^2}{r^2 - c^2} = 1,$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, представляющими собой так называемые поверхности Френелевых волн. Однако решение Ламе имеет недостаток: функции X, Y и Z становятся неопределенными вдоль оптических осей среды, а колебание — физически невозможным. В решении Ковалевской нет этого недостатка. Пользуясь методом Вейерштрасса, она находит решение системы (21) в виде

$$\begin{aligned} \xi &= \iiint \varphi_1(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) du dv dw \\ \eta &= \iiint \varphi_2(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) du dv dw \\ \zeta &= \iiint \varphi_3(u, v, w) f(x+u, y+v, z+w) du dv dw. \end{aligned}$$

Здесь φ_1, φ_2 и φ_3 — вполне определенные функции; f — произвольная функция; интегрирование совершено вдоль области, заключенной между двумя поверхностями волны. С помощью указанных интегралов составляется частное решение системы, в котором косинусы в формулах (22) заменяются эллиптическими функциями 1-го рода.

Впоследствии Вольтерра, занимаясь такой же проблемой, показал, что решение Ковалевской, как и решение Ламе, неверно, так как оно не учитывает всех условий задачи вследствие многозначности рассматриваемых функций. Но работа Ковалевской все же представляет интерес, так как в ней изложена теория Вейерштрасса интегрирования линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Оставшись после смерти мужа с пятилетней дочерью, С. В. Ковалевская должна была серьезно подумать о своей дальнейшей судьбе. Надеяться получить место хотя бы рядового преподавателя математики в высшем учебном заведении в России она не могла и поэтому приняла приглашение профессора математики Г. Миттаг-Леффлера в Стокгольмский университет на должность приват-доцента. Осенью 1883 г. Ковалевская переехала в Стокгольм, а с 1884 г. и до конца жизни она профессор университета, первая в мире женщина-профессор. В Стокгольмском университете в течение восьми лет Ковалевская прочла 12 курсов: теорию уравнений в частных производных, элементарную алгебру, теорию потенциала, теорию движения твердого тела, теорию алгебраических, эллиптических, абелевых и якобиевых функций по Вейерштрассу, приложение анализа к теории целых чисел и др.

В это же время Ковалевская интенсивно занимается научными исследованиями, готовит к публикации четыре работы: три — по механике твердого тела, относящиеся к задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки, и одну — по теории потенциала.

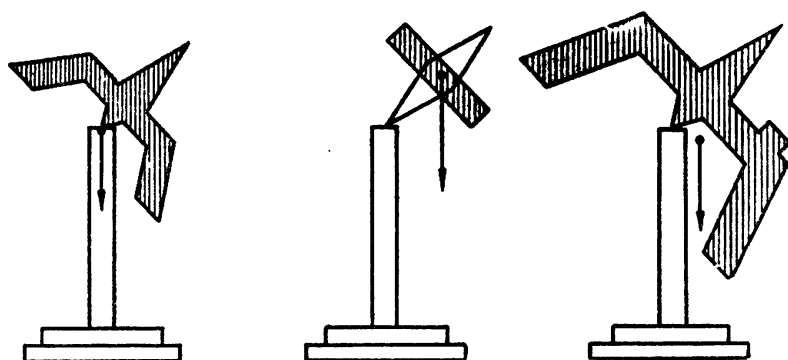
Проблема о движении твердого тела в случае, когда центр его тяжести находится в точке опоры, аналитически была исследована Эйлером. Полное ее решение геометрически представил Пуансо, показавший, что интеграла живых сил и интеграла площадей вполне достаточно, чтобы дать полную картину движения. Лагранж решил задачу для случая, когда эллипсоид инерции относительно точки опоры является эллипсоидом вращения и на оси вращения этого эллипсоида лежит центр тяжести тела. К этим двум интегралам он добавил еще интеграл, выражающий постоянство угловой скорости около оси вращения эллипсоида инерции. Дальнейшие работы Максвелла, Сильвестра, Мак-Куллаха, Якоби, Сомова, Дарбу и других исследователей содержали доказательства различных геометрических и аналитических теорем, относящихся к двум названным случаям движения. При этом в аналитических исследованиях выяснилось, что в обоих случаях задача решается при помощи эллиптических функций, а искомые величины выражаются однозначными функциями времени t , не имеющими никаких других особых точек кроме полюсов⁴³.

Основная работа С. В. Ковалевской по рассматриваемой проблеме — «Задача о вращении твердого тела около неподвижной точки» (опубликована в Стокгольме в 1889 г.). Рассматриваемая задача описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B - C)qr + Mg(y_0\gamma'' - z_0\gamma'), \quad \frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'' \\ B \frac{dq}{dt} &= (C - A)rp + Mg(z_0\gamma - x_0\gamma''), \quad \frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma \\ C \frac{dr}{dt} &= (A - B)pq + Mg(x_0\gamma' - y_0\gamma), \quad \frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma', \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

⁴³ Н. Е. Жуковский. О трудах С. В. Ковалевской по прикладной математике. — Математический сборник, 1891, т. 16, стр. 10—20.

Модели волчков для
трех случаев движе-
ния твердого тела.



где A, B, C — главные оси эллипсоида инерции тела относительно неподвижной точки; p, q, r — проекции угловой скорости вращения на эти оси; $\gamma, \gamma', \gamma''$ — косинусы углов между ними и направлением силы тяжести; M — масса тела; g — ускорение силы тяжести; x_0, y_0, z_0 — координаты центра тяжести тела в прямоугольной системе координат, начало которой находится в неподвижной точке, а оси совпадают с осями эллипсоида инерции. В начале работы Ковалевская ставит вопрос: можно ли получить общее решение этой системы в виде рядов

$$\left. \begin{aligned} p &= t^{-n_1} (p_0 + p_1 t + p_2 t^2 + \dots), \quad \gamma = t^{-m_1} (f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + \dots) \\ q &= t^{-n_2} (q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + \dots), \quad \gamma' = t^{-m_2} (g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \dots) \\ r &= t^{-n_3} (r_0 + r_1 t + r_2 t^2 + \dots), \quad \gamma'' = t^{-m_3} (h_0 + h_1 t + h_2 t^2 + \dots) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где $n_1, n_2, n_3, m_1, m_2, m_3$ — целые положительные числа. Для представления этого решения ряды должны содержать пять произвольных постоянных (шестая считается включенной в t). Подставляя ряды (24) в систему (23) и сравнивая коэффициенты, она получает равенства $n_1 = n_2 = n_3 = 1, m_1 = m_2 = m_3 = 2$, а исследуя условия, при которых ряды (24) содержат пять произвольных постоянных, приходит к выводу, что такое решение возможно лишь в трех случаях:

случай Эйлера — $x_0 = y_0 = z_0$;

случай Лагранжа — $A = B, x_0 = y_0 = 0$;

новый случай — $A = B = 2C, z_0 = 0$.

В последнем случае (случае Ковалевской) центр тяжести рассматриваемого тела лежит в плоскости экватора эллипсоида инерции относительно неподвижной точки, который должен быть эллипсоидом вращения, а его главные оси должны удовлетворять условию

$$A = B = 2C.$$

Для наглядного сравнения трех случаев вращения твердого тела (Эйлера, Лагранжа и Ковалевской) Н. Е. Жуковский нарисовал соответственно три волчка (см. рисунок). Характерная особенность случая Ковалевской — с поворотом волчка около оси вращения изменяется

момент действующей на него силы.

Принимая в своем случае $C = 1$, $Mg x_0 = c_0$, Ковалевская исследует систему уравнений (23) в виде

$$\left. \begin{aligned} 2 \frac{dp}{dt} &= qr, & \frac{d\gamma}{dt} &= r\gamma' - q\gamma'' \\ 2 \frac{dq}{dt} &= -pr - c_0\gamma'', & \frac{d\gamma'}{dt} &= p\gamma'' - r\gamma \\ \frac{dr}{dt} &= c_0\gamma', & \frac{d\gamma''}{dt} &= q\gamma - p\gamma'. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

К известным интегралам живых сил и площадей

$$2(p^2 + q^2) + r^2 = c_0\gamma + l_1^2;$$

$$2(p\gamma + q\gamma') + r\gamma'' = l,$$

где l и l_1 — постоянные интегрирования, и к очевидному соотношению

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1$$

прибавляется новый алгебраический интеграл

$$[(p + qi)^2 + c_0(\gamma + \gamma'i)][(p - qi)^2 + c_0(\gamma + \gamma'i)] = k^2,$$

где k — действительная постоянная. В результате ряда выкладок решение системы (25) сводится к отысканию некоторых функций s_1 и s_2 , удовлетворяющих уравнениям

$$\frac{ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{ds_2}{\sqrt{R(s_2)}} = 0;$$

$$\frac{s_1 ds_1}{\sqrt{R(s_1)}} + \frac{s_2 ds_2}{\sqrt{R(s_2)}} = dt,$$

где $R(s)$ — многочлен пятой степени. За открытие нового случая разрешимости задачи о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки в 1888 г. С. В. Ковалевская получила премию Парижской академии наук. Через год она получила премию Стокгольмской академии наук за вторую работу на эту же тему.

Исследования Ковалевской о вращении твердого тела были продолжены. Н. Е. Жуковский дал геометрическую интерпретацию уравнений для вспомогательных переменных s_1 и s_2 . Н. Б. Делоне исследовал частные случаи движения гироскопа Ковалевской и сконструировал прибор, воспроизводящий это движение. Аналогичную работу выполнил Н. И. Мерцалов. Частный случай, когда решение получается в рациональных функциях времени, исследовал Б. К. Млодзеевский. Леви-Чивита принадлежит изучение стационарных движений гироскопа Ковалевской и их устойчивости. Меттлером выполнена работа о периодических и асимптотических решениях уравнений несимметричного тяжелого волчка ⁴⁴.

⁴⁴ П. Я. Полубаринова-Кочина. Софья Васильевна Ковалевская. — В кн.: С. В. Ковалевская. Научные работы, стр. 333.

Последняя работа С. В. Ковалевской — «Об одной теореме г. Брунса» (опубликована в 1890 г.) — относится к вопросу об аналитическом продолжении потенциала. В 1871 г. дерптский математик Брунс установил возможность такого продолжения для внешнего потенциала тела на внутреннюю область при условии, что тело ограничено регулярной поверхностью S . Для установления этой теоремы он доказывает существование аналитической функции $U(x, y, z)$, удовлетворяющей уравнению Пуассона

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi\rho$$

(ρ — плотность тела) и обладающей следующими свойствами: 1) на всей поверхности S выполняются равенства

$$U = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z},$$

2) в каждой точке этой поверхности можно разложить U в ряд по целым и положительным степеням $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$. Ковалевская приводит дифференциальный оператор ΔU к системе криволинейных координат, что дает ей возможность непосредственно доказать существование функции $U(x, y, z)$.

Исследования С. В. Ковалевской о вращении твердого тела принесли ей мировую славу. О ней писали в газетах и журналах. Петербургская академия наук по предложению академиков Чебышева, Имшенецкого и Буняковского 7 ноября 1889 г. избрала ее членом-корреспондентом, приняв несколькими днями раньше специальное решение о допуске женщин к избранию в члены-корреспонденты. По этому поводу П. Л. Чебышев телеграфировал Ковалевской: «Наша Академия наук только что избрала Вас членом-корреспондентом, допустив этим нововведение, которому не было до сих пор прецедента. Я очень счастлив видеть исполненным одно из моих самых пламенных и справедливых желаний»⁴⁵. В планы дальнейших научных исследований Ковалевской входило решение задачи о вращении твердого тела в весьма общем случае. Однако этим планам не суждено было осуществиться. 10 февраля (29 января) 1891 г. С. В. Ковалевская умерла от воспаления легких. Похоронена она в Стокгольме.

⁴⁵ С. В. К о в а л е в с к а я. Воспоминания и письма, стр. 354.

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В НАУЧНЫХ ЦЕНТРАХ СТРАНЫ В 60—80-х годах XIX в.

1

Математика в Московском университете. Московское математическое общество

К 60-м годам XIX в. в Московском университете — крупнейшем учебном и научном центре России — математика начинает занимать одно из ведущих мест. После принятия устава 1863 г. значительно расширяется круг математических дисциплин. На кафедре чистой математики были утверждены три профессора, читавшие аналитическую геометрию, анализ, высшую алгебру, теорию эллиптических функций, теорию чисел, теорию вероятностей, высшую геометрию, а также введенные новые обязательные и специальные курсы. Значительно повысился и уровень преподавания. Наряду с лекциями по основным предметам проводились практические занятия.

Передовые традиции, заложенные в университете Н. Д. Брашманом и Н. Е. Зерновым, продолжили А. Ю. Давидов (с 1850 г.) и их ученик Н. В. Бугаев (с 1865 г.). Давидов был (12 лет) также деканом физико-математического факультета. Он читал теорию вероятностей (впервые в Московском университете), теорию функций комплексного переменного и теорию эллиптических функций. Н. В. Бугаев продолжил и расширил чтение курса по теории функций комплексного переменного, а также включил новейшие научные идеи в другие свои курсы по теории эллиптических функций и теории конечных разностей. Почти одновременно с Бугаевым в середине 60-х годов в университет пришел В. Я. Цингер. В 1885 г. специальным курсом по синтетической теории конических сечений начал свою преподавательскую деятельность ученик Цингера Б. К. Млодзеевский.

К концу XIX в. в Московском университете вводятся специальные курсы по высшей алгебре. Теория чисел окончательно отделяется от нее и читается как особая дисциплина. Появляются учебники и монографии по высшей алгебре. В качестве пособий рекомендуются курсы Серре, Тихомандрицкого, Сохоцкого. Но самое содержание университетского курса высшей алгебры на протяжении второй половины XIX в. больших изменений не претерпело. Теория определителей выделилась в отдельную вспомогательную дисциплину, а университетский курс высшей алгебры представлял собой теорию численного решения алгебраи-

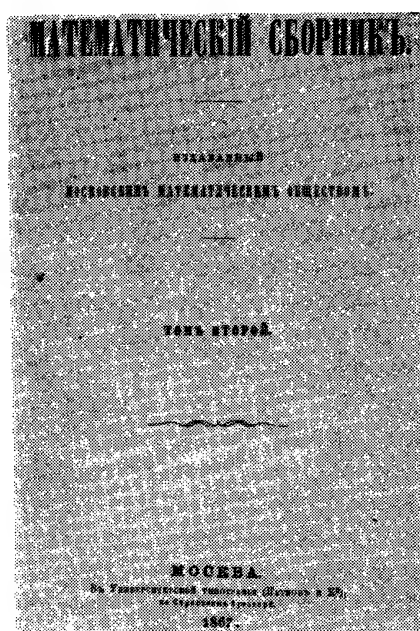
ческих уравнений, включая решение в радикалах уравнений третьей и четвертой степеней, теорию симметричных функций и применение к алгебраическим уравнениям. В 80-х годах общий курс высшей алгебры читал профессор В. Я. Цингер, а затем профессор Б. К. Млодзеевский. Приват-доцент П. М. Покровский читал дополнительный специальный курс высшей алгебры.

В 60-е годы ведущие математики и механики университета создали Московское математическое общество. Инициатива создания общества принадлежит Н. Д. Брашману. С ним сотрудничали А. Ю. Давидов, Ф. А. Бредихин, В. Я. Цингер, Ф. А. Слудский, Н. А. Любимов, А. В. Летников, К. М. Петерсон и др. Активное участие в организации общества, как упоминалось выше, принимал П. Л. Чебышев.

Московское математическое общество с начала своей деятельности (протокол первого заседания датирован 27 (15) сентября 1864 г.) стало крупным научным центром, вокруг которого группировались ученые России. Деятельность его вскоре получила международное признание. По его образцу в России создавались другие математические общества: в 1879 г. — в Харькове, в апреле 1880 г. — в Казани, в 1890 г. — в Киеве и Петербурге.

Президентом Московского математического общества единогласно был избран Н. Д. Брашман, вице-президентом — А. Ю. Давидов и секретарем — В. Я. Цингер. Действительными членами общества могли быть магистры и доктора математических наук, а также все, кто плодотворно занимался наукой, независимо от принадлежности к высшей школе. Например, один из учредителей общества К. М. Петерсон преподавал в гимназии. В дальнейшем общество всегда придерживалось этого принципа. Официальное признание Московское математическое общество получило 28 января 1867 г., после выхода в свет I тома «Математического сборника» (октябрь 1866 г.).

Первоначально общество было весьма немногочисленным — всего 13 членов, однако к концу XIX в. оно насчитывало уже свыше 100 чел. Создавалось общество для «взаимного содействия в занятиях математическими науками», но вскоре оно ставит перед собой более важную цель: «содействовать распространению математических наук в России». Вначале в состав Московского математического общества входили математики, механики, астрономы и физики. Однако постепенно оно становилось все более математическим, точнее механико-математическим. Деятельность его в области математики в основном была направлена на разработку анализа, дифференциальной геометрии, теории дифферен-



«Математический сборник» (титульный лист второго тома).

циальных уравнений, теории чисел и отдельных частных задач некоторых других разделов.

В 1866 г. был создан печатный орган Московского математического общества — «Математический сборник». Уже первый том сборника содержал выдающиеся работы «Разложение в ряды при помощи непрерывных функций» П. Л. Чебышева, «Об отношениях и сродствах между кривыми поверхностями» К. М. Петерсона. Во II—X томах сборника было два отдела. В первом публиковались статьи, относящиеся к различным областям физико-математического цикла¹, во втором научно-популярные работы. Впоследствии второй отдел был ликвидирован (начиная с XI тома, 1882 г.). Объем сборника был весьма внушителен (до 1000 страниц). Научное направление его не всегда было постоянным. Сравнивая тематику его статей за первые 25 лет существования, можно заметить, что число теоретических исследований по математике возросло, а число работ прикладного характера резко уменьшалось, хотя члены Московского математического общества всегда интересовались актуальными вопросами прикладного характера. «Математический сборник» быстро завоевал всеобщее международное признание.

После смерти Брашмана президентом общества стал А. Ю. Давидов, вице-президентом — В. Я. Цингер, секретарем — М. Ф. Хандриков. Этот порядок передвижения по ступеням должностей сохранялся до 1917 г.

Продолжая традиции своего учителя Брашмана, Давидов создал в Московском университете школу теоретической механики. Математические работы Давидова большей частью имеют близкое отношение к теоретической механике, в области которой его научные заслуги наиболее значительны. Под влиянием Брашмана он занимался изучением теории вероятностей и ее приложений. Из научных работ по теории вероятностей наибольшее значение имела его статья «Приложения теории вероятностей к статистике» (1855 г.). Ему принадлежат работы по математическому анализу, в частности мемуар «О геометрическом представлении эллиптических функций первого вида» (1867 г.), в котором он дал простое и наглядное геометрическое истолкование эллиптических функций при помощи особой кривой, чем оказал большую услугу студентам, изучавшим теорию эллиптических функций, в то время еще мало разработанную и трудную для понимания дисциплину. Его последняя работа «Об одной общей формуле в теории определенных интегралов» (1884 г.) вызвала широкий интерес не только у отечественных, но и у зарубежных математиков. Одной из интереснейших работ Давидова является статья «О максимальном числе положений равновесия однородной треугольной призмы, погруженной в жидкость», в которой установлено, что число положений равновесия трехгранной призмы не может быть больше 12.

Статьи Давидова по отдельным вопросам элементарной математики актуальны и в настоящее время. Из них наиболее интересны «Элемен-

¹ В частности, в III томе (1868 г.) была напечатана впервые на русском языке знаменитая работа Лобачевского «Геометрические исследования теории параллельных» (в переводе Летникова).

тарный вывод формулы $e^{mx} = \cos mx + i \sin mx$ (1867 г.) и «Распространение формулы бинома на дробные отрицательные и показательные» (1868 г.).

Кроме университета Давидов посвятил значительную часть своей деятельности средней школе. В течение 25 лет он был инспектором и членом попечительного совета над частными учебными заведениями Москвы. Его учебники для средних учебных заведений по геометрии, алгебре и тригонометрии содержали глубокий теоретический материал. По ним преподавали элементарную математику много десятилетий. Например, «Элементарная геометрия» Давидова выдержала 39 изданий.

Одним из преподавателей математики Московского университета был Василий Яковлевич Цингер (1836—1907). В 1853 г. он поступил на физико-математический факультет Московского университета. В 1857 г. окончил университет со степенью кандидата математических наук и был оставлен при нем на три года. В 1862 г. начал преподавать математическую физику. В этом же году защитил магистерскую диссертацию «Способ наименьших квадратов» и был избран на должность доцента по кафедре чистой математики, а в декабре 1867 г. — докторскую, «О движении свободной жидкой массы». Цингер был также (после А. Ю. Давидова) президентом Московского математического общества.

Исследования В. Я. Цингера относятся преимущественно к геометрии и механике. Важнейшие из его математических работ: «Способ наименьших квадратов» (1862 г.), «Построение кривой третьего порядка по девяти данным точкам» (1868 г.), «Об основной теореме высшей геометрии» (1869 г.). Более всего Цингера привлекала проективная геометрия. Он развивал идеи Шаля и Штейнера. Ему принадлежит перевод на русский язык классической работы М. Шаля «Исторический обзор происхождения и развития геометрических методов», который печатался в виде особого приложения к «Математическому сборнику» (1883 г.). В. Я. Цингер был неутомимым пропагандистом синтетических методов в геометрии. Преподавание синтетической геометрии в России только начиналось и он поднял его на уровень, соответствовавший университетской кафедре.

Преподавателем математики в университете, активнейшим членом Московского математического общества, сменившим В. Я. Цингера на посту президента, был Николай Васильевич Бугаев (1837—1903). Родился он в семье военного врача. В 1855 г. закончил гимназию в Москве и поступил в Московский университет. Увлеченный техническими приложениями математики, Бугаев по окончании университета (1858 г.) поступил в Петербургское военно-инженерное училище, где слушал лекции М. В. Остроградского, однако не окончил его. В 1863 г. он защитил магистерскую диссертацию «Сходимость бесконечных рядов по их внешнему виду» и был послан за границу на два с половиной года для подготовки к профессорскому званию. В феврале 1866 г. по возвращении из-за границы, Бугаев защитил докторскую диссертацию «Числовые тождества, находящиеся в связи со свойствами символа E » (опубликована в первом томе «Математического сборника»), после чего получил

должность профессора в Московском университете. В 1878 г. он был избран секретарем, а в 1886 г. — деканом физико-математического факультета и оставался им до конца своей жизни.

Исследования Бугаева относятся главным образом к математическому анализу и теории чисел. Проблема построения общей теории, объединяющей по возможности с одних позиций многочисленные существовавшие признаки сходимости числовых рядов, после выхода в свет «Курса алгебраического анализа» Коши (1821 г.) и работ Абеля приобрела большую актуальность. Решению этой проблемы и была посвящена магистерская диссертация Бугаева, в которой он создал теорию сопряженности рядов. Сопряженными рядами Бугаев назвал ряды, которые бывают в одно время сходящимися и расходящимися. Речь идет об образовании из данного ряда последовательности рядов, сходящихся либо расходящихся одновременно с исходным рядом. Простейшим примером двух сопряженных рядов могут служить ряды

$$u_1 + u_2 + \dots u_n + \dots, \quad (1)$$

$$u_1 + 2u_2 + \dots 2^n u_{2^n} + \dots \quad (2)$$

Ряд (1) относительно ряда (2) называется предшествующим, а второй относительно первого — последующим. Установив эти понятия, Бугаев

формулирует теорему о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \geq u_{n+1} > 0)$ в зави-

симости от ряда $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n u_{2^n}$ и далее, обобщая, доказывает, что если $\psi(x)$ —

положительная дифференцируемая и монотонно возрастающая функция, выражающая закон сопряженности, причем $\psi(\infty) = \infty$, то ряды

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \psi'(n) u \psi(n)$ являются сопряженными. Он показал, что интег-

ральный признак Коши дает возможность получить более общий закон сопряженности рядов. Из этого закона как частный случай вытекает показательная сопряженность Коши, соответствующая тому частному случаю, когда $\psi(n) = a^n$, а предыдущая теорема получается при $\psi(n) = 2^n$.

К основным признакам сходимости Бугаев относит простые признаки

$$\lim \frac{2u_{2n}}{u_n} < 1, \quad \lim \frac{2nu_n^2}{u_n} < 1$$

и т. д., которые по чувствительности равносильны сложным признакам Моргана

$$\lim \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) n > 1,$$

$$\lim \left[\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) n - 1 \right] n > 1.$$

Он показывает, что его приемами можно вывести бесчисленное множество признаков сходимости, как известных, так и отчасти новых, а также формулирует правила сходимости бесконечных произведений.

Бугаева привлекали различные задачи алгебры. В частности, он изучал вопросы, связанные с отделением корней, исследовал функцию $E(x)$, которая обозначает наибольшее целое число, содержащееся в положительном действительном числе x .

Бугаев пропагандировал и популяризировал приложения математики к технике. В конце 60-х годов он становится одним из учредителей Общества распространения технических знаний и возглавляет его учебный отдел. Значительное внимание Бугаев уделял и среднему образованию. Еще в 1869 г. он настаивал на введении элементов высшей математики в программу средней школы.

Некоторые из его учебников для средней школы выдержали более 10 изданий. В 1879 г. Петербургская академия наук избрала Бугаева членом-корреспондентом, он был почетным членом Юрьевского и Казанского университетов, Харьковского и Казанского математических обществ, Общества любителей естествознания, Московского общества испытателей природы, действительным членом Чешского Королевского общества.

Длительное время ректором Московского университета был Павел Алексеевич Некрасов (1858—1924). Магистерская диссертация Некрасова, опубликованная в «Математическом сборнике» за 1884 г., посвящена теории трехчленных уравнений вида $u^m - pu^n - q = 0$. Ему удалось определить области, в которых находились корни уравнения, существенно используя при этом методы теории функций комплексного переменного. Он представил корни уравнения и их степени в виде бесконечных рядов, получив таким образом общие формулы. Полученные разложения использованы им при вычислении корней, в задачах теории дифференциальных уравнений и т. д. Диссертация Некрасова обратила на себя внимание и была перепечатана на немецком языке в «Mathematische Annalen». Петербургская академия наук отметила ее премией имени Буняковского. В дальнейшем Некрасов занимался исследованием в основном дифференциальных уравнений.

Как упоминалось выше, членом Московского математического общества был К. М. Петерсон, один из видных геометров второй половины XIX в. Карл Михайлович Петерсон (1828—1881) родился в Риге. Окончил Рижскую губернскую гимназию, физико-математический факультет



К. М. Петерсон.

Дерптского университета, где его учителями были такие выдающиеся геометры середины XIX в., как Зенфф и Миндинг. В 1853 г. К. М. Петерсон представил факультету сочинение «Об изгибании поверхностей» на соискание степени кандидата. Диссертация получила высокую оценку. В истории математики она в известном смысле считается началом русской дифференциальной геометрии. К сожалению, в свое время диссертация не была опубликована. Существовало мнение, что основные уравнения теории поверхностей — дифференциальные уравнения, связывающие коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, — принадлежат итальянским математикам Майнарди и Кодацци. Между тем еще за несколько лет до появления исследований Майнарди и Кодацци такие уравнения (в своеобразной и хотя во многом отличной от современной, но по существу к ней сводящейся форме) были получены Петерсоном в кандидатской диссертации.

Суть уравнений, о которых идет речь (на современном математическом языке), заключается в следующем. Если поверхность задается в трехмерном точечном пространстве уравнением в векторной форме

$$\bar{r} = \bar{r}(x^1, x^2), \quad (3)$$

то в каждой ее точке можно определить три некопланарных вектора

$$\bar{r}_i = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x^i} \quad (i = 1, 2), \quad \bar{n} = \frac{[\bar{r}_1 \bar{r}_2]}{|[\bar{r}_1 \bar{r}_2]|}$$

($\bar{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности). Производные этих векторов

$$\bar{r}_{ij} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial x^j} = \frac{\partial \bar{r}_j}{\partial x^i}, \quad \bar{n}_i = \frac{\partial \bar{n}}{\partial x^i}$$

могут быть разложены по ним же:

$$\bar{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \bar{r}_k + b_{ij} \bar{n}, \quad \bar{n}_i = b_i^j \bar{r}_j, \quad i, j, k = 1, 2, \quad (4)$$

где коэффициенты Γ_{ij}^k , b_{ij} , b_i^j выражаются посредством коэффициентов двух основных фундаментальных форм поверхности

$$\varphi_1 = d\bar{r}^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad \varphi_2 = -d\bar{r} d\bar{n} = d^2 \bar{r} \bar{n} = b_{ij} dx^i dx^j, \quad (5)$$

а именно:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right), \quad b_i^j = -b_{ik} g^{kj},$$

где

$$g_{ij} = \bar{r}_i \bar{r}_j, \quad g_{ij} g^{ik} = \delta_j^k.$$

Если поверхность задана уравнением (3), то совершенно очевидно, что для нее уравнения (4) тождественно выполняются. Для нее всегда выполняются и равенства

$$\bar{r}_{ijp} = \bar{r}_{ipj}, \quad \bar{n}_{ij} = \bar{n}_{ji}. \quad (6)$$

Однако, если, наоборот, задать коэффициенты g_{ij} , b_{ij} как шесть функций от параметров x^1 , x^2 , то они будут служить коэффициентами двух квадратичных форм некоторой поверхности тогда и только тогда, когда система уравнений (4) вполне интегрируема. Условие полной интегрируемости имеет вид (6), что в развернутом виде записывается так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^p} - \frac{\partial \Gamma_{ip}^k}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^t \Gamma_{tp}^k - \Gamma_{ip}^t \Gamma_{tj}^k + b_{ij} b_p^k - b_{ip} b_j^k &= 0, \\ \frac{\partial b_{ij}}{\partial x^p} - \frac{\partial b_{ip}}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^k b_{kp} - \Gamma_{ip}^k b_{kj} &= 0, \quad i, j, k, p, t = 1, 2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Это и есть уравнения, которые до недавнего времени приписывались Гауссу. Майнард и Кодацци и которые в настоящее время называются уравнениями Гаусса и Петерсона — Кодацци. Среди уравнений (7) только три независимых.

Петерсон обычным путем вводит коэффициенты первой и второй квадратичных форм поверхности (при этом вторая форма у него оказывается умноженной на квадратичный корень из дискриминанта первой):

$$\varphi_1 = ds^2 = E dl^2 + 2E' dl d\lambda + E'' d\lambda^2;$$

$$\varphi_2 \sqrt{EE'' - E'^2} = e dl^2 + 2e' dl d\lambda + e'' d\lambda^2.$$

Задаваясь целью изучить вопрос об изгибании поверхности, Петерсон вводит в рассмотрение тангенциальную кривизну кривой и показывает, что она не изменяется при изгибании. Введя затем нормальные кривизны $\frac{1}{r'}$, $\frac{1}{r''}$ двух линий кривизны и угол наклона ν одной из них к координатной линии, он выписывает систему дифференциальных уравнений, которые, с одной стороны, определяют систему кривых, лежащих на поверхности, с другой — систему этих же кривых как объектов пространственной геометрии. В связи с тем, что в коэффициенты уравнений входят только E , E' , E'' и r' , r'' , ν , это послужило ему основанием для утверждения, что поверхность в пространстве вполне определяется заданием шести функций. Поскольку, далее, величины r' , r'' , ν вполне определяются, если заданы коэффициенты двух квадратичных форм E , E' , E'' и e , e' , e'' , и, наоборот, коэффициенты e , e' , e'' вполне определяются заданием величин E , E' , E'' , r' , r'' , ν , то, очевидно, утверждение Петерсона равносильно утверждению, что поверхность в пространстве вполне определяется заданием двух квадратичных форм. Лишь в 1867 г. оно было вновь сформулировано и доказано Бонне, чье имя и носит ныне. По справедливости же оно должно быть названо именем Петерсона.

Величины E , E' , E'' не изменяются при изгибании поверхности, чего нельзя сказать о величинах r' , r'' , ν , изменения которых и определяют изгибание. Эти величины, замечает Петерсон, не произвольны, а

связаны между собой тремя уравнениями, которым он придает следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dv}{ds} + \frac{\cos v}{\tau_1} + \frac{\sin v}{\tau_2} \right) \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r''} \right) &= \frac{\delta \left(\frac{1}{r'} \right)}{\delta s}, \\ \left(\frac{\delta v}{\delta s} - \frac{\sin v}{\tau_1} + \frac{\cos v}{\tau_2} \right) \left(\frac{1}{r''} - \frac{1}{r'} \right) &= \frac{d \left(\frac{1}{r''} \right)}{ds}, \\ \frac{1}{r'r''} &= \frac{\delta \left(\frac{ds}{\tau'} \right)}{\delta s ds} + \frac{d \left(\frac{\delta s}{\tau''} \right)}{\delta s ds}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где τ_1, τ_2 — радиусы геодезических кривизн координатных линий (определяются коэффициентами первой формы и их производными); символы дифференцирования d и δ соответствуют линиям кривизны; τ', τ'' — радиусы геодезических кривизн линий кривизны. Если выразить $r', r'', \tau', \tau'', \tau_1, \tau_2, v$ посредством коэффициентов первой и второй форм, то получим уравнение (7). Третье из уравнений (8) является уравнением Гаусса.

О жизни Петерсона после окончания им Дерптского университета и переезда в Москву сохранилось немного сведений. Известно лишь, что с 1865 по 1881 г. он работал приватным преподавателем математики в Петропавловском немецком училище, где одним из его ближайших сотрудников был А. Ю. Давидов. Общение с Давидовым, очевидно, способствовало сближению Петерсона с кругом преподавателей Московского университета. Все свои основные работы он публиковал в «Математическом сборнике». Основное содержание этих работ составляют свойства кривых и поверхностей, в частности вопросы изгибаия поверхностей на так называемом главном основании. Работами Петерсона было положено, по сути, начало московской школе дифференциальной геометрии, представителями которой являются Б. К. Млодзеевский, Д. Ф. Егоров, С. П. Фиников, С. С. Бюшгенс и др. Кроме работ по дифференциальной геометрии Петерсон написал несколько сочинений об интегрировании уравнений с частными производными. За эти работы Новороссийский университет в 1865 г. присвоил ему степень доктора чистой математики *honoris causa*.

2

Математика в Казанском университете

На протяжении 1860—1890 гг. в Казанском университете продолжали свою деятельность несколько профессоров, работавших при Н. И. Лобачевском или же бывших его непосредственными учениками. К ним принадлежит выдающийся педагог заслуженный профессор П. И. Котельников. Он был преподавателем кафедры прикладной механики, а также читал математические дисциплины в

помощь Н. И. Лобачевскому. Впоследствии неоднократно читал и специальные математические курсы (функции комплексного переменного, теорию эллиптических функций, проективную геометрию, векторное исчисление и др.).

Наиболее важные научные результаты математических исследований рассматриваемого периода получены учеными следующего поколения. Это прежде всего труды по дифференциальным уравнениям В. Г. Имшенецкого, работавшего в Казанском университете в 1860—1871 гг., диссертация по теории римановых пространств Ф. М. Суворова, ценные работы В. П. Максимовича, преподававшего в Казанском университете с 1882 по 1885 г. (О важнейших научных работах и деятельности А. В. Васильева, П. С. Назимова и П. С. Порецкого см. гл. XII.)

К рассматриваемому периоду относятся также исследования Э. П. Янишевского (диссертация по теории дифференциальных уравнений), А. К. Жбиковского (диссертации об эйлеровых интегралах, 1867 г., и о приложении формул Эйлера, Маклорена и Стирлинга к теории вероятностей, 1871 г.), В. В. Преображенского и Г. Н. Шебуева (об уравнениях математической физики и по механике). Э. П. Янишевский преподавал в университете с 1854 по 1881 г. После защиты докторской диссертации (1865 г.) стал профессором по кафедре чистой математики. А. К. Жбиковский окончил Петербургский университет в 1850 г., с 1868 г. (с некоторыми перерывами) он приват-доцент Казанского университета. В. В. Преображенский окончил Московский университет в 1868 г. После защиты магистерской диссертации (1874 г.) был учителем гимназии в Москве, а с 1876 г. — доцентом Новороссийского университета, где защитил (1879 г.) докторскую диссертацию. Профессором кафедры практической механики Казанского университета избран в 1883 г. Преображенский пользовался большой популярностью у молодежи. Он поддерживал требования студентов — участников известной сходки 16 (4) декабря 1887 г., в которой принимал активное участие В. И. Ленин, и подал в отставку в знак протеста против действий реакционной администрации университета. Впоследствии работал в Новороссийском университете. Г. Н. Шебуев (1850—1900) окончил Казанский университет в 1873 г. В 1876 г. был направлен в Московское техническое училище для совершенствования в области прикладной механики. С 1878 по 1893 г. преподавал механику в Казанском реальном училище и продолжал научные исследования в области теоретической физики. С 1879 по 1893 г. — приват-доцент Казанского университета, где читал курсы математической физики, общей физики, аналитической механики и др. Опубликовал около 20 исследований.

Особенно важное значение для развития математики в университете в этот период, как отмечалось выше, имели научные исследования В. Г. Имшенецкого, Ф. М. Суворова, В. П. Максимовича (деятельность Имшенецкого рассмотрена в гл. VI). Федор Матвеевич Суворов (1845—1914), сын священника, окончил гимназию (с золотой медалью) и Казанский университет (1867 г.). Однако материальное положение не позволяло Суворову заняться подготовкой к научной деятельности. Э. П. Янишевский добился назначения ему денежного пособия, и в 1869 г. он

сдал магистерские экзамены, а затем, работая хранителем музея механики, сумел написать и защитить в 1871 г. содержательную диссертацию². В диссертации проведено исследование трехмерных римановых пространств и найдены скалярные инварианты (характеристики) этих пространств. Она посвящена продолжению и развитию идей Лобачевского. Направление исследований Суворову указал В. Г. Имшенецкий.

После защиты диссертации Ф. М. Суворов приступил к чтению лекций, сначала он доцент, а с 1884 г. — профессор. Докторскую диссертацию, посвященную трактовке мнимых элементов в геометрии³, Суворов защитил в 1885 г. В 1896 г. ему было присвоено звание заслуженного профессора. Более 40 лет читал он лекции по основным математическим курсам: аналитической геометрии, начертательной геометрии, неопределенным интегралам, приложениям интегрального исчисления к геометрии, определенным интегралам, вариационному исчислению, дифференциальным уравнениям и др. Некоторые из этих курсов были изданы. Суворов был также деканом факультета (1899—1905 гг.), редактором «Ученых записок» университета по физико-математическому циклу (с 1892 г.), активно участвовал в организации и работе физико-математического общества.

Из научных работ Суворова наиболее значительна его магистерская диссертация, первое в России исследование, посвященное развитию теории римановых пространств. Диссертации Ф. М. Суворова предшествовали кроме исходной лекции Римана, опубликованной в 1868 г., исследования Христоффеля и Липшица (1869, 1870 гг.), но о них Ф. М. Суворов узнал уже позднее, когда закончил работу. Свои результаты, частично совпадающие с результатами Христоффеля и Липшица, он получил независимо от них. Им выяснен ряд фактов, впоследствии полученных и понятых лишь на основе применения тензорных методов. Исследование трехмерных пространств являлось, естественно, очередной задачей, так как теория двумерных пространств (теория поверхностей) была в основном уже разработана. Суворов нашел независимые скалярные инварианты второго порядка, названные им характеристиками системы (пространства), и показал, что для эквивалентности двух тернарных квадратичных форм необходимо совпадение соответствующих инвариантов. Попутно им, по существу, найдена теорема о выражении тензора кривизны пространства V_3 , посредством симметричного тензора 2-й валентности, которая обычно приписывается Риччи (1895 г.). Он исследовал также ряд геометрических вопросов, связанных с пространством V_3 , вложенным в евклидово пространство четырех измерений (аналог сферического отображения, главные направления и главные гауссовы кривизны). Решение их обычно приписывается Риччи и Леви-Чивита (1901 г.) или Бьянки (1902 г.), хотя они нашли его через 30 лет

² Ф. М. Суворов. О характеристиках систем трех измерений. Магистерская диссертация. Казань, 1871.

³ Ф. М. Суворов. Об изображении воображаемых точек и воображаемых прямых на плоскости и о построении кривых линий второй степени, определенных помощью воображаемых точек и касательных. Докторская диссертация. Казань, 1884.

после Суворова. Особо выделены пространства постоянной кривизны, изучены их геодезические и отмечена их суть в геометриях Лобачевского и Евклида или сферической (со ссылками на известные работы Миндинга и Бельтрами).

Докторская диссертация Ф. М. Суворова менее значительна, хотя трактовка материала в ней весьма основательна. Она посвящена развивавшимся в эти годы вопросам интерпретации мнимых элементов в геометрии. В ней дан сравнительный анализ проективной теории Штаудта, в которой мнимые элементы вводятся с помощью инволюций и теории Мари. Выясняется их некоторое родство, а также неполнота трактовки вопроса у Мари. Анализу подвергается и метод Лагерра, основанный на использовании круговых точек. Отмечается его эффективность во многих геометрических конструкциях. Далее развиваются геометрические построения, связанные с образами 2-го порядка, и метрические вопросы для мнимых элементов.

Владимир Павлович Максимович (1850—1889) начал свое специальное математическое образование в Петербургском университете в 1866 г., где обратил на себя внимание П. Л. Чебышева. Однако, стремясь к самостоятельным исследованиям, он ушел еще с первого курса. Завершил свою подготовку Максимович в Политехнической школе в Париже, где за диссертацию «Новый метод интегрирования систем в полных дифференциалах» ему была присуждена ученая степень доктора (1879 г.). Вернувшись в Россию, он сдал магистерские экзамены в Петербургском университете и в апреле 1882 г. защитил в Казанском университете магистерскую диссертацию «Рассуждение о разложении в ряды функций от корней уравнений и о некоторых формулах приближения», в которой разработал оригинальный метод приближенного решения алгебраических уравнений. С этого времени Максимович начал преподавать в Казанском университете (приват-доцент, а с 1883/84 г. — доцент). Принимал активное участие в работе физико-математической секции общества естествоиспытателей. В марте 1885 г. защитил докторскую диссертацию, в которой доказал важную теорему о невозможности выразить в квадратурах интеграл общего линейного дифференциального уравнения 2-го порядка. С августа 1885 по март 1887 г. находился за границей, по возвращении перешел в Киевский университет.

3

Математика в Харьковском университете

В начале рассматриваемого периода в Харьковском университете математику и теоретическую механику преподавали профессоры И. Д. Соколов и Е. И. Бейер, а также ученики Бейера, впоследствии профессора университета, Д. М. Деларю, М. Ф. Ковальский и А. П. Шимков.

Профессор кафедры теоретической механики И. Д. Соколов преподавал в Харьковском университете около 25 лет (с 1839 по 1864 г.). Из них приблизительно 13 лет он был деканом физико-математического

факультета. (О деятельности Соколова в Харьковском университете до 60-х годов см. гл. III.) С 1860 по 1864 г. Соколов читал кроме всех разделов курса теоретической механики, включавшего и гидродинамику, теорию вероятностей и начертательную геометрию. В 1860 г. он издал учебное руководство по динамике, в котором как бы подытожил свой многолетний опыт преподавания механики. Это руководство было одним из первых русских учебников по аналитической механике. Содержание его близко к лекционному курсу Остроградского, читанному в Институте корпуса инженеров путей сообщения. В 1864 г. И. Д. Соколов был назначен ректором Новороссийского университета.

Е. И. Бейер на протяжении многих лет (см. гл. III) преподавал все математические курсы в университете по программе факультета, но к специализации в какой-нибудь одной области математики не стремился и научно-исследовательской работой занимался мало. Не имея докторской степени, он долгое время оставался в должности адъюнкта. С 1858 г. он экстраординарный профессор. Степень доктора (без защиты диссертации), а также звание ординарного профессора Бейер получил лишь в 1867 г., когда ему уже была назначена пенсия за выслугу лет. Основанием для присуждения степени доктора Бейеру послужила его актовая речь «Об интегрировании линейных дифференциальных уравнений с каким угодно числом изменяемых величин» (опубликована в 1858 г.), представлявшая собой обзор методов интегрирования дифференциальных уравнений Пфаффа. Бейер не только преподавал в университете. Он принимал деятельное участие в организации Харьковского математического общества, был его первым председателем. В 1872 г. Бейер вышел на пенсию, получив к этому времени звание заслуженного профессора.

Даниил Михайлович Деларю (1839—1905) родился в Одессе. В 1860 г. окончил Харьковский университет, а в 1861 г. был принят в качестве его преподавателя. В 1864 г. он защитил в университете магистерскую диссертацию «Общая теория алгебраического решения уравнений», а в 1868 г. — докторскую диссертацию «О разыскании особых решений дифференциальных уравнений первого порядка, зависящих от двух переменных» и был назначен ординарным профессором. Обе диссертации Д. М. Деларю носили обзорный характер. Большой интерес из них представляла магистерская, в которой впервые на русском языке были изложены основы теории Галуа, в то время еще малоизвестной даже на родине Галуа, во Франции. Вначале Деларю преподавал высшую алгебру и дифференциальное исчисление, а после ухода Е. И. Бейера на пенсию — также вариационное исчисление и интегрирование дифференциальных уравнений. В 1865/66 учебном году он читал лекции также на кафедре теоретической механики. Многие из читанных им курсов были литографированы, а «Курс дифференциального исчисления и теории алгебраических функций» и «Курс теории дифференциальных уравнений» изданы, первый в 1869 г., второй — в 1880 г. Деларю принимал активное участие в организации Харьковского математического общества и выработке его устава. В первом выпуске сообщений общества он опубликовал небольшую статью «Заметка об одном приложении из

теории сходимости бесконечных рядов» (1879 г.). В 1883 г. Деларю перешел на кафедру теоретической механики, где с 1872 г. читал уже В. Г. Имшенецкий (см. гл. VI), а в 1885 г. подал в отставку в связи с тяжелой болезнью. Преемником его по кафедре теоретической механики был А. М. Ляпунов.

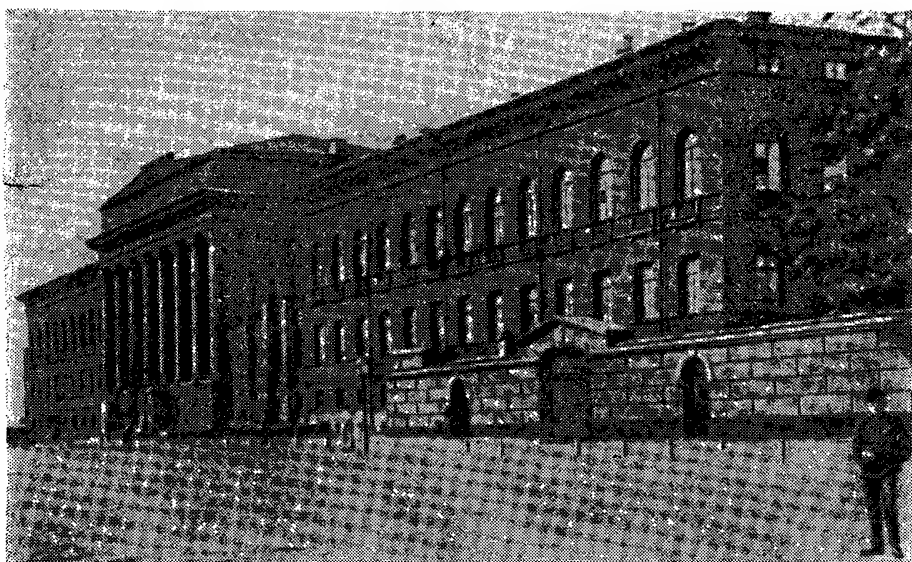
Матвей Федорович Ковальский (1836—1900) родился в Волынской губернии в мелкопоместной дворянской семье. В 1860 г. окончил Харьковский университет, в 1866 г. защитил магистерскую диссертацию «Теория интегрирующего множителя дифференциальных уравнений вида $f(x, y) dx + F(x, y) dy = 0$ », в 1868 г. — докторскую — «О числе постоянных, входящих в общий интеграл дифференциального уравнения». В 1872 г. получил звание ординарного, а в 1891 г. — заслуженного профессора. В университете М. Ф. Ковальский преподавал с 1866 г., читал различные курсы: интегрирование функций, интегрирование дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных), высшую алгебру, теорию вероятностей, исчисление конечных разностей, вариационное исчисление и теорию эллиптических функций. Изданы были лишь его лекции по интегральному исчислению и интегрированию дифференциальных уравнений, а из его научных исследований кроме диссертаций — заметка об интегрировании нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (напечатана в «Сообщениях Харьковского математического общества»).

В 1873 г. на кафедру чистой математики был приглашен, по ходатайству Д. М. Деларю и рекомендации Н. В. Бугаева, К. А. Андреев, воспитанник Московского университета. Уже в 1875 г. он защитил магистерскую диссертацию «О геометрическом образовании плоских кривых», имевшую важное научное значение. После защиты был утвержден штатным доцентом кафедры чистой математики. В первые годы преподавания в университете Андреев читал аналитическую геометрию и приложения анализа к геометрии, а затем — высшую алгебру и некоторые разделы математического анализа (подробнее о нем см. гл. X, XI).

4

Математика в Киевском университете

В 60—80-х годах XIX в. уровень преподавания математических дисциплин в Киевском университете значительно повысился. Возрос также вклад преподавателей в развитие научной и методической математической литературы. Это было время постепенного утверждения Киевского университета как одного из центров научной математической мысли. Здесь читались не только все математические предметы, предусматривавшиеся уставом 1863 г., но и новые курсы — теория чисел, теория вероятностей, неевклидова геометрия и др. В конце 70-х годов появились стабильные планы, предметы распределялись по семестрам и курсам. Постепенно изменялась и методика преподавания математики: на физико-математическом факультете наряду с лекциями вводились, хотя и не систематические, практические занятия.



Здание Киевского университета (60-е годы XIX в.).

Алгебраический анализ в университете преподавали до 1864 г. Н. А. Дьяченко, до 1867 г. — П. Э. Ромер, а с 1867 г. — М. Е. Ващенко-Захарченко. Аналитическую геометрию читали до 1868 г. Ромер и Дьяченко, а затем — Ващенко-Захарченко. После ухода в отставку профессора Дьяченко дифференциальное и интегральное исчисления преподавал Ромер. Он впервые в университете прочел как самостоятельный курс теорию функций комплексного переменного. Лекции по разностному и вариационному исчислениям читал Ващенко-Захарченко, а затем Ермаков. Курс интегрирования дифференциальных уравнений после Ромера перешел к Ермакову. Теорию чисел и эллиптические функции в основном читал Ващенко-Захарченко, он же с 1866 г. ввел как самостоятельный предмет теорию определителей.

Несколько изменилось распределение предметов между преподавателями в 80—90-х годах. Ващенко-Захарченко читал высшую алгебру и аналитическую геометрию, а Максимович — курс теории функций. В связи с болезнью П. Э. Ромера его курсы были переданы частично В. П. Ермакову и Б. Я. Букрееву. Ермаков по-прежнему читал интегрирование дифференциальных уравнений, а также курс элементарной математики, введенный в 1886 г. Курсы теории вероятностей, вариационного и разностного исчислений перешли к Максимовичу.

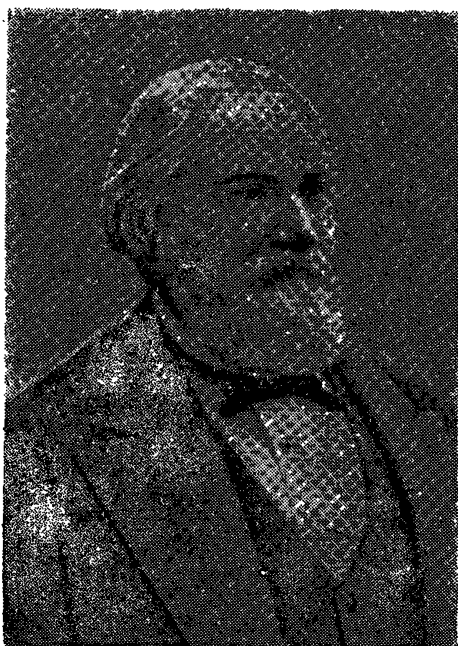
Кроме лекций и обязательных практических занятий со студентами математического отделения проводились вечерние семинарские занятия, на которых зачитывались и обсуждались их самостоятельные научные рефераты. Это была новая форма занятий по математике, введенная в 1882 г. По основным предметам университетского курса математики в 70—80-х годах были изданы учебные пособия Ващенко-Захарченко и Ермакова. Они использовались во многих университетах.

Остановимся на деятельности наиболее выдающихся профессоров Киевского университета.

Павел Эмилиевич Ромер (1835—1899), воспитанник Киевского университета, известен своими работами по векторной алгебре и ее приложениям к геометрии. В 1861 г. он защитил магистерскую диссертацию «Разыскание первых приближенных величин корней алгебраических уравнений» и был назначен адъюнктом по кафедре чистой математики. В 1862 г. Ромер был послан за границу, где заинтересовался работами Гамильтона по теории кватернионов и начал работать в этом направлении. По возвращении из-за границы он получил должность доцента, а в 1867 г. защитил докторскую диссертацию «Основные начала метода кватернионов». Диссертация познакомила русских математиков с новыми вопросами, получившими развитие в дальнейшем. В 1863 г. Ромер был избран ординарным профессором. В 1867—1868 гг. он написал статью о приложениях метода кватернионов к геометрии — продолжение его основного труда — докторской диссертации. В университете Ромер преподавал до 1891 г. В 1891 г. он был уволен по болезни (в звании заслуженного профессора).

Михаил Егорович Ващенко-Захарченко (1825—1912) после окончания с серебряной медалью гимназии в Киеве учился два года на математическом отделении философского факультета Киевского университета, затем уехал за границу, где слушал лекции Коши и Лиувилля. Возвратившись в Киев, он сдал экзамены за весь университетский курс и представил для получения степени кандидата работу «Об определенных интегралах». Вскоре им уже было опубликовано несколько статей, а также изданы в русском переводе «Конические сечения» Дж. Салмона (1860 г.). В 1862 г. Ващенко-Захарченко защитил магистерскую диссертацию «Символическое исчисление и приложение его к интегрированию линейных дифференциальных уравнений», в которой провел исследование по операционным методам (один из первых в России). После защиты диссертации он был допущен в качестве приват-доцента к чтению обязательных курсов по теории вероятностей, а затем по теории чисел. Докторскую диссертацию «Риманова теория функций составного переменного» Ващенко-Захарченко защитил в конце 1866 г. В следующем году он был избран экстраординарным, а в 1868 г. — ординарным профессором.

Ващенко-Захарченко — автор 12-ти учебных руководств, по которым училось не одно поколение студентов. Несколько изданий выдержали его учебники «Лекции по разностному исчислению» (1868 г.) и «Вариационное исчисление» (1890 г.), а также пособия по алгебре «Теория определителей и теория форм» (1877 г.), «Высшая алгебра. Теория подстановок и приложение ее к алгебраическим уравнениям», «Алгебраический анализ или высшая алгебра» (1887 г.). В 1887 г. вышел печатный курс Ващенко-Захарченко «Аналитическая геометрия двух или трех измерений», в 1883 г. — «Элементарная геометрия», представляющая собой курс геометрии для средней школы с учетом идей Н. И. Лобачевского. В 1897 г. был издан его курс «Проективная геометрия», включавший некоторые новые результаты.



М. Е. Ващенко-Захарченко.

Значительный вклад внес Ващенко-Захарченко также в историко-математическую литературу. Известна его книга «„Начала“ Евклида» с пояснительным введением и толкованиями, а также ценными библиографическими указателями. Он был одним из первых ученых-популяризаторов идей неевклидовой геометрии в России. Ему принадлежит обширная работа «История математики», т. I («Исторический очерк развития геометрии», 1883 г.) — первая книга предполагавшегося трехтомного труда. Изданы также его работы по истории аналитической геометрии и некоторые другие исследования по истории математики.

Василий Петрович Ермаков (1845—1922) окончил физико-математический факультет Киевского университета в 1868 г., получив за работу «Статика, изложенная с помощью метода кватернионов» степень кандидата. По ходатайству П. Э. Ромера и М. Е. Ващенко-Захарченко был оставлен при университете для подготовки к профессорскому званию. Вскоре в жизни Ермакова произошло событие, сделавшее его имя известным математической общественности. На III съезде русских естествоиспытателей и врачей, происходившем в 1871 г. в Киеве, Ермаков выступил с докладом о новом признаке сходимости рядов. Сообщение молодого ученого было высоко оценено, П. Л. Чебышев отметил большое значение этого признака, а также указал на связь его с признаком особых решений дифференциальных уравнений. Высоко оценили работу также А. Н. Коркин и Е. И. Золотарев.

Вопросы сходимости рядов привлекали внимание многих ученых, изучавших закон образования их членов. Такие исследования проводили Гаусс, Раабе, Дюамель, Морган, Бертран и др. В. П. Ермаков обобщил ряд предшествующих исследований по этому вопросу и вывел новый эффективный признак сходимости числовых рядов. В своих исследованиях он исходит из теоремы Коши, в которой вопрос о сходимости и расходимости знакопостоянного убывающего ряда $f(0) + f(1) + f(2) + \dots$ сводится к вопросу о сходимости или расходимости интеграла

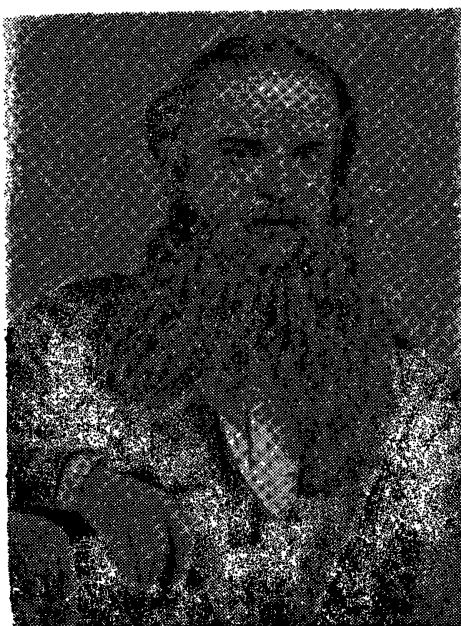
$$\int_a^{\infty} f(x) dx. \quad (9)$$

Далее Ермаков вводит такую функцию $\varphi(x)$, которая для всех величин, превосходящих некоторое положительное число, была бы постоянно положительна и удовлетворяла неравенству $\varphi(x) > x$. Отсюда $\varphi(\infty) =$

$= \infty$. Затем он доказывает, что «интеграл (9) будет величиной конечной, если отношение

$$\frac{\varphi'(x) f[\varphi(x)]}{f(x)} \quad (10)$$

с возрастанием x до ∞ стремится к пределу, меньшему единицы, и бесконечно большой, если отношение (10) для величин x , превосходящих некоторое постоянное положительное число, постоянно больше или равно единице. Может быть еще и третий случай: отношение (10) для величин x , превосходящих некоторое постоянное положительное число, может быть меньше единицы и с возрастанием x до ∞ стремится к единице. Этот случай является сомнительным»⁴. Сопряженных функций $\varphi(x)$ можно выбрать бесчисленное множество. Ермаков из практических соображений выбирает $\varphi(x) = e^x$ и получает



В. П. Ермаков.

признак сходимости. В нем он рассматривает отношение $\frac{e^x f(e^x)}{f(x)}$, считая ряд $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + \dots$ сходящимся, если это отношение при $x \rightarrow \infty$ стремится к пределу, меньшему единицы, и расходящимся, если оно при тех же x больше или равно единице. Ермаков приводит пример сомнительного случая: ряд $f(1) + f(2) + f(3) + \dots$, где

$$f(x) = \prod_{k=0}^{k=\xi} \frac{1}{\ln kx}$$

($\ln_k x = \ln \ln_{k-1} x$; x — положительное число; ξ — наибольшее целое число $\xi(x) \geq 0$, удовлетворяющее неравенству $\ln_{\xi} x \geq 1$).

Доказательство признака Ермакова было предметом исследований Б. Я. Букреева, А. Н. Островского, В. А. Зморовича и других ученых.

1 октября 1871 г. по ходатайству физико-математического факультета университета Ермаков был послан за границу для совершенствования своих знаний. В это время он опубликовал большую работу «Общая теория равновесия и колебания упругих твердых тел», за которую получил золотую медаль. Близкое знакомство с П. Л. Чебышевым, А. Н. Коркиным, В. Г. Имшенецким сыграло важную роль в определении его дальнейших научных интересов: он сосредоточил свои исследования на вопросах математической физики и интегрирования дифференциальных уравнений.

Еще в начале научной деятельности В. П. Ермаков занимался общей теорией интегрирования линейных дифференциальных уравнений

⁴ В. П. Ермаков. Новый признак сходимости и расходимости бесконечных знакопостоянных рядов. — Университетские известия, 1872, № 3, стр. 7—8.

высших порядков в частных производных с постоянными коэффициентами. Этой теме посвящена его магистерская диссертация, после защиты которой (в Петербургском университете в 1874 г.) он был избран доцентом чистой математики Киевского университета, где читал лекции по теории чисел, теории вероятностей, разностному исчислению и тригонометрии. Через три года (в 1877 г.) Ермаков защитил докторскую диссертацию «Интегрирование дифференциальных уравнений механики». Новым в ней было доказательство теоремы о возможности сведения интегрирования нескольких систем канонических уравнений к интегрированию одной системы. Исходя из этой теоремы он доказал, что, имея один интеграл канонических уравнений, можно понизить число переменных в этих уравнениях на два, переходя таким образом к теореме Ли.

В 1884 г. Ермаков был избран членом-корреспондентом Петербургской академии наук, а в 1888 г. получил звание ординарного профессора.

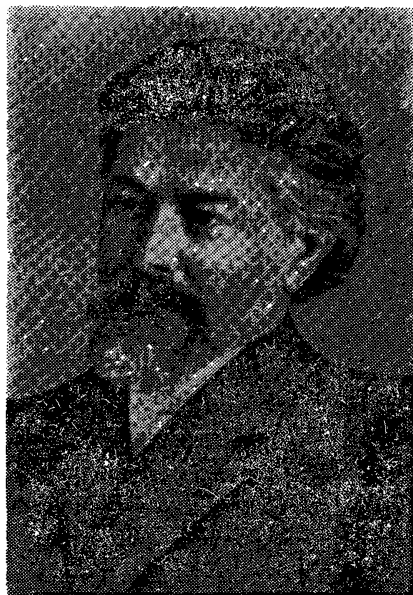
5

Математика в Новороссийском университете

В мае 1865 г. в Одессе на базе Ришельевского лицея был открыт Новороссийский университет. Вскоре он стал крупным научным центром России. Физико-математический факультет университета в целом был хорошо обеспечен преподавателями (профессорами Ришельевского лицея и приглашенными из других высших учебных заведений). Однако кафедра чистой математики оставалась вакантной. Временно на ней преподавали профессора кафедры прикладной математики (механики) И. Д. Соколов (первый ректор университета) и К. И. Карастелев (1829—1886) — из Ришельевского лицея. Соколов читал высшую алгебру. Основные математические курсы (дифференциальное, интегральное и вариационное исчисления, интегрирование дифференциальных уравнений, теорию вероятностей) в первые годы вел Карастелев. Геометрию читали В. П. Алексеев, М. А. Андреевский, А. В. Бессель (1839—1870), а также доцент кафедры астрономии Л. Ф. Беркевич (1828—1896), под руководством которого была организована университетская астрономическая обсерватория.

Заметным событием в жизни физико-математического факультета было избрание в 1867 г. доцентом кафедры чистой математики ученика М. В. Остроградского Е. Ф. Сабина (1831—1909). Егор Федорович Сабинин родился в Коломне. Окончил гимназию в Москве. Математическое образование получил в Петербурге, в Главном педагогическом институте, где успешно занимался под руководством М. В. Остроградского. После окончания института (1856 г.) несколько лет преподавал математику в гимназии в Москве. В 1861 г. опубликовал первую свою работу, а в 1866 г. защитил в Московском университете магистерскую диссертацию «Об условиях, служащих к отысканию и различению максимум и минимум двойных интегралов». В Новороссийском университете Сабинин работал более 20 лет. Читал дифференциальное, интегральное и вариационное исчисления. В 1868 г. он защитил докторскую

диссертацию «Исследование наибольших и наименьших значений определенных многократных интегралов» (напечатана в первом томе «Записок Новороссийского университета», 1868). Это была первая защита диссертации по математике в Новороссийском университете. После защиты диссертации Сабинин был избран профессором чистой математики.



С. П. Ярошенко.

В своих работах Сабинин обобщает и развивает исследования М. В. Остроградского по вариационному исчислению. Пользуясь методами Л. Эйлера и К. Якоби, он изучает главным образом экстремумы кратных интегралов. Однако наибольший вклад в развитие математики Сабинин внес своей преподавательской деятельностью. Несколько его учеников стали впоследствии профессорами Новороссийского университета. Одним из них был С. П. Ярошенко.

Семен Петрович Ярошенко (1846—1917) родился в Херсоне. После окончания гимназии учился в Ришельевском лицее в Одессе, затем, (в 1864 г.) на физико-математическом факультете Киевского университета, откуда в 1865 г. перешел на второй курс математического отделения физико-математического факультета Новороссийского университета. Здесь Ярошенко выполнил первую научную работу об особых решениях дифференциальных уравнений. Работа была удостоена золотой медали, а ее автор — степени кандидата.

Окончив университет (1868 г.), Ярошенко успешно сдал магистерский экзамен и, продолжая развивать тему своей студенческой работы, подготовил магистерскую диссертацию, в которой дал критический обзор ранее известных методов нахождения особых решений обыкновенных дифференциальных уравнений и предложил оригинальные методы нахождения особых решений уравнений в частных производных первого порядка. После защиты магистерской диссертации (1870 г.) его избирают доцентом университета по кафедре чистой математики. В 1871 г. он защищает докторскую диссертацию «Теория определителей и ее применения», в которой дает свои доказательства ряда предложений теории определителей. В этом же году его избирают экстраординарным, в 1873 г. (после выхода «Начал новой геометрии» — первой в русской математической литературе работы, специально посвященной проективной геометрии, где в доступной форме были изложены основы этой науки) — сверхштатным ординарным, а в 1876 г. — ординарным профессором чистой математики. Он читал алгебру и геометрию, специальный курс по проективной геометрии. Несколько лет был ректором университета.

Первый русский физик-теоретик профессор Н. А. Умов (1846—1915), воспитанник Московского университета, известен своими работа-

ми по теории распространения энергии в телах, земному магнетизму, оптике и другим областям математической физики. Значительная часть этих работ выполнена им в Новороссийском университете (1871—1893 гг.). Здесь он издал курс математической физики (1878—1887 гг.), здесь написал близкую к этому курсу статью «Геометрическое значение интегралов Френеля» (1885 г.), в которой предложил оригинальную конструкцию механического интегратора. Умов был одним из передовых университетских ученых, принесших известность молодому университету. В круг этих ученых входили великие русские естествоиспытатели профессора естественного отделения физико-математического факультета физиолог И. М. Сеченов, биологи И. И. Мечников и А. О. Ковалевский. Ученые-материалисты, поддерживаемые профессорами физико-математического факультета механиком В. Н. Лигиным, химиком А. А. Вериго, геологом Н. А. Головкинским, а также несколькими профессорами юридического и историко-филологического факультетов, вели напряженную борьбу с реакционной частью профессуры за сохранение университетских свобод, против притеснений передовых преподавателей, против преследования революционно настроенных студентов. Они же были стержнем созданного при университете в 1870 г. Новороссийского общества естествоиспытателей, посредством которого широко распространяли естественнонаучные знания среди населения.

Для развития математики в университете большое значение имело создание при обществе естествоиспытателей по инициативе и под руководством Умова математического отделения (1876 г.). По существу, это отделение стало играть роль Одесского физико-математического общества. На его заседаниях обсуждались оригинальные и обзорного характера сообщения преподавателей университета и других членов общества по математике, физике, астрономии, отмечались выдающиеся события научной жизни. В 1878 г. вышел первый том «Записок математического отделения Новороссийского общества естествоиспытателей». Этот новый научный журнал стал основным изданием, в котором печатались работы одесских математиков, до того публиковавшиеся в отдельных выпусках «Записок Новороссийского университета», московском «Математическом сборнике» и иностранных журналах.

После Умова в 1880—1889 гг. математическое отделение общества возглавлял воспитанник Новороссийского университета профессор В. Н. Лигин (1846—1900). Он читал в университете практическую и теоретическую механику, а с начала 70-х годов — и начертательную геометрию.

Активное участие в работе математического отделения Новороссийского общества естествоиспытателей принимал В. В. Преображенский, доцент (с 1876 г.), а затем экстраординарный профессор (с 1879 г.) кафедры чистой математики. В лице В. В. Преображенского университет приобрел замечательного преподавателя и ученого.

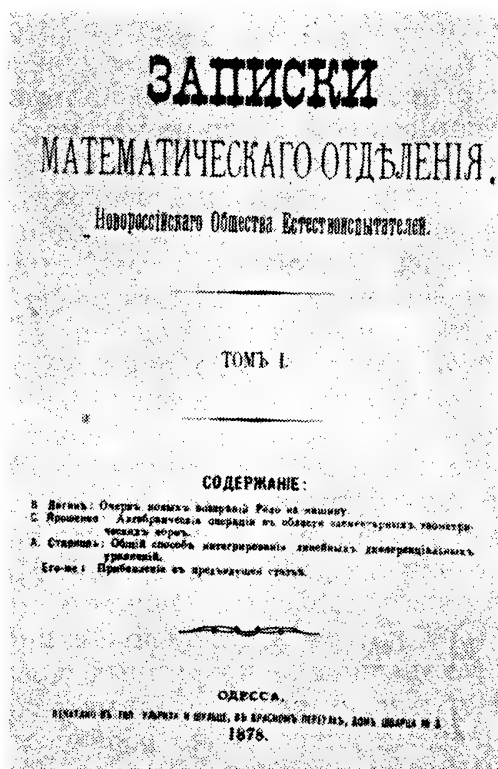
Владимир Васильевич Преображенский (1846—1905) родился в Симбирской губернии. Учился в Симбирской гимназии, в Петербургском и Московском университетах. В 1868 г. окончил с золотой медалью математическое отделение Московского университета и был оставлен при

нем для подготовки к профессорскому званию. После сдачи магистерского экзамена и учебы за границей Преображенский несколько лет преподавал в Московском технологическом училище, гимназии, на Высших женских курсах. В 1874 г. он защитил при Московском университете магистерскую диссертацию «Об интегрировании уравнений с частными производными высших порядков», а в 1876 г. был назначен преподавателем Новороссийского университета. В университете Преображенский читал высшую алгебру, дифференциальное исчисление, специальный курс по теории эллиптических функций и другие математические предметы. Свои научные интересы он сосредоточил в основном на теории дифференциальных уравнений в частных производных и их приложениях, прежде всего к механике. В его докторской диссертации «О логарифмическом потенциале» (защитил в 1879 г.) теория логарифмического потенциала построена на основе общей теории интегрирования уравнений в частных производных. В конечном виде получено решение ряда краевых задач для уравнения Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ при различных граничных условиях.

Одесские математики принимали участие в работе съездов русских естествоиспытателей и врачей. Особенно значительной была их роль в проведении VII съезда, проходившего летом 1883 г. в Одессе. Подготовкой съезда занимался физико-математический факультет университета. Председателем съезда был избран И. И. Мечников. В работе математической секции приняли участие знаменитые русские ученые Н. Е. Жуковский и С. В. Ковалевская, профессора: Киевского университета — В. П. Ермаков, Харьковского — К. А. Андреев, Новороссийского — Н. А. Умов и В. В. Преображенский.

Съезд проходил в условиях жестокой реакции, которая все больше распространялась в стране после убийства Александра II. Усилилась реакция и в университетах. В 1882 г. вынуждены были уйти из Новороссийского университета И. И. Мечников, В. В. Преображенский и другие прогрессивные ученые.

После ухода В. В. Преображенского на кафедре чистой математики создалось трудное положение. Для преподавания высшей алгебры на должность приват-доцента был приглашен в 1883 г. И. В. Слешинский



«Записки математического отделения Новороссийского общества естествоиспытателей» (титульный лист первого тома).

(1854—1891). Он окончил в 1875 г. с золотой медалью и степенью кандидата математическое отделение физико-математического факультета Новороссийского университета. Затем выдержал в университете магистерский экзамен по математике и некоторое время был учителем математики в киевских и одесских средних учебных заведениях. В 1881—1882 гг. Слешинский совершенствовал свои математические знания в Берлине, где слушал лекции Вейерштрасса, Кронекера, Куммера, Брунса. Возвратившись в Одессу в начале 1883 г., он защитил диссертацию на право преподавания «Исследование второй вариации простого интеграла» и был допущен к чтению курса высшей алгебры. Слешинский читал также теорию чисел, теорию вероятностей, элементарную математику и методику математики. Со временем основным его курсом было дифференциальное исчисление. В 1886 г. он прочел в университете специальный курс по теории эллиптических функций, а в 1889 г. — по теории функций комплексного переменного.

Научные интересы Слешинского в 80-е годы были сосредоточены на теории непрерывных дробей. Начав с рассмотрения применения непрерывных дробей к решению дифференциального уравнения Риккати (1886 г.), он в дальнейшем перешел к изучению условий сходимости бесконечных непрерывных дробей, особенно в комплексной области. Найденные им достаточные условия сходимости дробей с постоянными членами значительно обобщают ранее известные результаты Зейделя, Шлемилля, Томе, Лорана и других и сохраняют свое значение до настоящего времени. Еще больший интерес вызывают установленные на их основе теоремы о сходимости функциональных непрерывных дробей, в частности теорема о том, что дробь $\frac{c_1 x^{p_1}}{1 + \frac{c_2 x^{p_2}}{1 + \dots}}$ ($c_1, c_2, \dots$ — постоян-

ные, p_1, p_2 — натуральные числа), которая получается при обращении в непрерывную дробь ряда по возрастающим степеням x , в случае выполнения условия $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ сходится при всех конечных значениях x

и представляет трансцендентную функцию с одной существенно особой точкой $x = \infty$. Если же $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c \neq 0$, то в случае одинаковых $p_1, p_2, \dots$ дробь сходится при всех значениях x , лежащих в комплексной плоскости вне продолжения прямой, соединяющей точку 0 с точкой $-\frac{1}{4c}$. Другая теорема утверждает, что дробь $\frac{k_2}{a_1 x + b_2 + \frac{k_2}{a_1 x + b_2 + \dots}}$, для которой

$\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = k, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, сходится во всех точках комплексной плоскости, за исключением точек отрезка прямой, который делится в точке $-\frac{b}{a}$ пополам, имеет длину $\frac{4 \sqrt{|k|}}{|a|}$ и направление вектора $\frac{\sqrt{-k}}{a}$. Основные результаты исследований по теории непрерывных дробей Слешинский подытожил и изложил в магистерской

диссертации «О сходимости непрерывных дробей», которую успешно защитил в конце 1889 г. Диссертация являлась наиболее значительным математическим сочинением из написанных в рассматриваемый период в Одессе.

6

Математика в Дерптском университете

В 60—80-х годах XIX в. ведущим преподавателем математики в Дерптском университете продолжал оставаться Ф. Миндинг. Он по-прежнему возглавлял кафедру прикладной математики. К 25-летию Пулковской обсерватории Миндинг приурочил публикацию своего сочинения «Рассуждение о формах, к которым английский математик Гамильтон приводит интегралы аналитической механики» (издано в Дерпте на латинском языке в 1864 г.). В этой работе он обращается к вопросам общей аналитической механики и развивает методы, тесно связанные с более поздними работами Бельтрами (1869 г.) и Липшица (1870 г.) о дифференциальных квадратичных формах. Миндинг исходит из возможности представления дифференциальной квадратичной формы в виде

$$\sum_1^n a_{ik} dp_i dp_k = dV^2 + \theta_1^2 + \dots + \theta_{n-1}^2,$$

где

$$\theta_m = c_{mm} dp_m + c_{m,m+1} dp_{m+1} + \dots + c_{mn} dp_n.$$

Если исключить величины c_{ik} , для V получается дифференциальное уравнение с частными производными, которое при

$$\sum a_{ik} dp_i dp_k = (U + h) T dt^2$$

совпадает с уравнением Якоби — Гамильтона. Миндинг указывает, что методы Якоби и Гамильтона обобщают преобразования Гаусса, которыми первая квадратичная форма произвольной поверхности приводится к полугеодезическому виду

$$du^2 + g^2 dv^2,$$

и тем самым предвосхищает мысль о том, что траектории динамической системы могут быть рассмотрены как геодезические линии некоторого риманова пространства.

Внес вклад Миндинг и в теорию цепных дробей. Еще в Берлине он написал учебник арифметики (1832 г.), в котором рассматривал также цепные дроби. В 1869 г. в «Бюллетене Петербургской академии наук» был напечатан его мемуар. В нем, исходя из правила Эйлера для составления числителя и знаменателя при обращении правильной цепной дроби в обыкновенную, он сформулировал новое правило, применимое и в случае цепной дроби общего вида. Эти результаты известны в настоящее время под названием формул Эйлера — Миндинга.

В работе, написанной на латинском языке в 1863 г., Миндинг выражает среднюю кривизну поверхности посредством коэффициентов двух

квадратичных форм, не замечая, что этот вывод фактически был дан в кандидатской диссертации его ученика К. Петерсона (1853 г.). Кроме того, он получает формулы, которые были найдены Монжем (1784 г.). На основании этих формул С. Ли в 1879 г. рассматривал минимальные поверхности как поверхности переноса мнимых изотропных линий. Миндинг использует их (1875) для решения задачи о проведении минимальной поверхности через заданную линию.

Последние работы Миндинга посвящены теме одного из первых его исследований — изопериметрической проблеме на кривой поверхности (напечатаны в «Бюллетене Петербургской академии наук» — 1876 г. и в журнале Крелле — 1879 г.). Он интегрирует уравнения для кривых постоянной геодезической кривизны $k_g = \text{const}$, т. е. линий «кратчайшего охвата» на поверхностях вращения, и дает следующее обобщение для формулы Клеро:

$$r \sin \theta = \pm k_g \int r ds + \text{const.}$$

Это обобщение означает, что величина $r \sin \theta$ (r — радиус параллели, θ — угол между кривой и параллелью) при малых значениях пропорциональна площади «кольца» на поверхности, заключенного между двумя параллелями, одна из которых касается кривой $k_g = \text{const}$, а другая проходит через рассматриваемую точку. Доказывается, что замкнутые линии $k_g = \text{const}$ на поверхности вращения в общем случае состоят из четырех дуг, две из которых лежат на параллелях. Эти дуги соединяются гладко, разумеется, с сохранением геодезической кривизны.

Ближайшим сотрудником Миндинга по кафедре чистой математики более 30 лет (с 1852 г.) был П. Гельмлинг. В 1871—1885 гг. математические курсы читал также доцент, впоследствии профессор физической географии и метеорологии, Вейраух. Гельмлинг преподавал, как и его предшественник К. Э. Зенфф, все общие математические предметы: элементарную математику, аналитическую геометрию, дифференциальное и интегральное исчисления, теорию кривых и поверхностей, высшую геометрию. Кроме того, он читал некоторые специальные курсы — теорию аналитических и эллиптических функций, теорию коллинеаций и корреляций в однородных координатах и др. В 1880 г. ему было присвоено звание заслуженного профессора; в 1887 г. он вышел в отставку.

Научное наследие Гельмлинга состоит из десяти работ, опубликованных в 1850—1881 гг. отдельными изданиями в Гейдельберге, Митаве и Дерпте. Почти все они посвящены исследованию линейных дифференциальных уравнений второго и третьего порядков. В одной из них (1879 г.) исследовано общее уравнение Риккати. В периодических научных изданиях напечатана только одна его статья — «Новые способы интегрирования» («Мемуары Петербургской академии наук», 1881 г.). Заметного влияния на дальнейшее развитие теории дифференциальных уравнений работы Гельмлинга не оказали.

Фридрих Вейраух (1841—1891) родился в Майнце. Университетский курс проходил в Гейдельберге и Гисене. В 1860 г. получил в Гисене степень доктора философии (по математике) и приехал в Прибалтику, где в 1863 г. выдержал экзамен на старшего учителя математики.

С 1865 г. преподавал в гимназии Аренсбурга (ныне Кингиссеп, о. Сааре-ма, ЭстССР). В 1869 г. защитил в Дерпте магистерскую диссертацию «Исследование уравнения первой степени с многими неизвестными» и в 1871 г. получил должность доцента по кафедре физической географии и метеорологии в Дерптском университете. В 1875 г. его утвердили в звании экстраординарного, а в 1877 г. — ординарного профессора по этой же кафедре. Вначале Вейраух читал только математику: алгебраический анализ, теорию определителей и линейных преобразований, теорию инвариантов и ковариантов, теорию диофантовых уравнений и цепных дробей, теорию бесконечных рядов. Затем, в 1881 г. занялся также проблематикой своей кафедры. С 1871 по 1881 гг. он опубликовал ряд статей по диофантову анализу, исследуя в особенности число решений неопределенных уравнений разных классов, и по теории определителей, где его интересовали так называемые унимодулярные и дважды ортосимметрические определители.

В конце 70-х годов Миндинг и Гельмлинг начали привлекать к чтению специальных математических предметов астрономов-наблюдателей Дерптской обсерватории. Ученик Вейерштрасса по Берлинскому университету Генрих Брунс (1848—1919) был приглашен в 1872 г. в Пулково, а в 1873 г. — в Дерптский университет, где читал теорию аналитических функций и ее применения. Однако в Дерпте Брунс долго не задержался: в 1876 г. он получил приглашение в Берлинский университет на должность профессора математики. В Дерпте он опубликовал работу «О периодах эллиптических интегралов первого и второго рода» (1875 г.). В Германии Брунс стал известен своими исследованиями по небесной механике.

Иоган-Оскар Баклунд (1846—1916), воспитанник Упсальского университета, работал в Дерпте астрономом-наблюдателем в 1875—1879 гг. Читал алгебраический анализ (1877 г.) и теорию эллиптических функций (1878 г.). В 1883 г. был избран академиком Петербургской академии наук, с 1895 г. он директор Пулковской обсерватории.

Астрономом-наблюдателем начал свою деятельность в Дерптском университете и А. Линдстедт. Андерс Линдстедт (1854—1939) родился в Сундборне (Швеция). Окончил в 1874 г. Упсальский университет. Короткое время был астрономом-наблюдателем в Гамбурге. В 1877 г. преподавал в Лунде, здесь же получил степень доктора философии (по астрономии). В 1879 г. Линдстедт был приглашен в Дерптский университет на должность астронома-наблюдателя. Здесь он сразу начал читать математические курсы: теорию аналитических (эллиптических и абелевых) функций, новую геометрию и алгебру, теорию алгебраических кривых, интегрирование дифференциальных уравнений с применением в механике. В 1880 г. Линдстедт организовал при университете математический семинар и руководил самостоятельными занятиями студентов. После ухода Миндинга в отставку (1883 г.) его выдвинули на должность ординарного профессора прикладной математики. В это время он читал аналитическую механику, теорию аналитических функций, теорию чисел, теорию дифференциальных уравнений и вариационное исчисление и продолжал руководить семинаром. В начале 1886 г.

Линдстедт уехал в Стокгольм, где преподавал в Высшем техническом училище.

Наиболее выдающимися участниками семинара Линдстедта были П. Кадикис и Ф. Молин. У Линдстедта и Гельмлинга учился П. Боль. В 1886 г. он представил на конкурс сочинение «Теория и приложение инвариантов линейных дифференциальных уравнений», написанное в духе работ Гельмлинга. Сочинение было удостоено золотой медали. Все эти три питомца Дерптского университета, особенно Молин и Боль, сыграли затем заметную роль в математической жизни Прибалтики и всей России.

Петер Кадикис (1857—1923), сын латышского крестьянина из Кулдигского уезда, после окончания университета в 1885 г. защитил магистерскую диссертацию по теории шестизначных характеристик тэта-функции Римана, которую написал под руководством Линдстедта. В 1886 г. он получил направление в Томск, где ему обещали место профессора математики в готовившемся к открытию университете. Университет был открыт в 1888 г., но без физико-математического факультета, и Кадикис стал преподавателем Томского реального училища. В 1891 г. он вернулся в Дерпт, читал лекции в университете на правах приват-доцента, а затем по неизвестным причинам снова уехал в Сибирь, на этот раз — в Красноярск, где преподавал в гимназии. В 1918—1919 гг. Кадикис работал в Петрограде инспектором в Главной палате мер и весов, а в 1919—1922 гг. возглавлял Латвийское управление мер и весов.

Федор Молин (1861—1941) преподавал в Дерптском университете с 1885 г. До 1900 г. он был доцентом, несмотря на то, что в 1892 г. получил степень доктора чистой математики. Деятельность Молина в Дерпте освещена в гл. XII.

Профессора математики в Дерптском университете менялись часто. В конце 80-х годов XIX в. здесь читали О. Штауде, заменивший Линдстедта на кафедре прикладной математики, и Ф. Шур, занявший кафедру чистой математики после Гельмлинга.

Эрнст Отто Штауде (1857—1928), уроженец Саксонии. Окончил в 1881 г. Лейпцигский университет, затем в течение года участвовал в семинарах Ф. Клейна. В Дерпт он был приглашен (по рекомендации Г. Брунса) в 1883 г. на должность приват-доцента. К этому времени Штауде написал 12 научных статей об особых свойствах поверхностей второго порядка и их систем, в том числе известные статьи о построении этих поверхностей с помощью нити. В 1886 г. он был утвержден в должности профессора прикладной математики. Читал аналитическую механику, теорию дифференциальных уравнений, вариационное исчисление и теорию аналитических функций. Опубликовал несколько работ по кинематике периодических движений. В 1888 г. Штауде уехал в Росток.

Фридрих Шур (1856—1932), родился вблизи Познани. Университетское образование получил в Бреславле и Берлине. В Берлине ему была присуждена (1879 г.) степень доктора философии (по математике). С 1881 г. он читает в Лейпцигском университете (вначале приват-доцент, с 1884 г. — экстраординарный профессор). В 1888 г. Шура приглашают

(также по рекомендации Брунса) в Дерпт на место ординарного профессора чистой математики. К этому времени он автор 20 статей. Первые его работы посвящены комплексам прямых 1-го и 2-го порядков и поверхностям 3-го и 4-го порядков. В 1885—1887 гг. появились три классические работы Шура по римановым пространствам постоянной кривизны, одна из которых содержит известную теорему о точечном постоянстве кривизны в этих пространствах. В Дерпте Шур читал только элементарные курсы аналитической геометрии и дифференциального и интегрального исчисления. Опубликовал несколько статей по теории непрерывных групп преобразований и начал свои исследования по основаниям геометрии. К этим исследованиям он привлек своего ученика К. Ю. Купфера. В статье, напечатанной в 1893 г. в отчетах Дерптского общества естествоиспытателей, Купфер дал первое доказательство коммутативности умножения отрезков в неевклидовой геометрии. Д. Гильберт в своей классической работе «Основания геометрии» цитирует эту статью Купфера и некоторые работы Шура. Купфер после окончания университета, в 1894—1905 гг. был ассистентом, а затем доцентом Рижского политехникума, пропагандировал идеи Лобачевского в Прибалтике. Впоследствии увлекся ботаникой и стал одним из наиболее крупных ботаников Прибалтики. Шур преподавал в Дерпте только четыре года. В 1892 г. его пригласили в Аахен.

7

Математика в других высших учебных заведениях. А. В. Летников

В 1862 г. в Варшаве была открыта Главная школа с четырьмя отделениями: историко-филологическим, физико-математическим, юридическим и медицинским. Это было, по сути, высшее национальное учебное заведение с примерно такой же программой, как и в университетах. Преподавание велось главным образом на польском языке. Однако Главная школа просуществовала недолго. В 1869 г. специальная комиссия представила на утверждение Александру II проект Указа об открытии на базе Главной школы нового университета в Варшаве, и в 1869 г. был открыт Варшавский императорский университет. Он состоял из четырех факультетов: историко-филологического, физико-математического, юридического и медицинского. На физико-математическом факультете было два отделения: естественное и математическое. Основной контингент студентов составляли выходцы из дворянства, дети крупных чиновников и духовенства. Первым ректором Варшавского университета был Петр Алексеевич Лавровский (1827—1886) — известный ученый-филолог, славист, ученик и последователь русского лингвиста И. И. Срезневского.

Уровень преподавания математики в университете в начальный период был невысоким. Из преподавателей-математиков Главной школы в университете остались только Пенчарский и Зайончковский. Выбор математических дисциплин как по содержанию, так и по объему

определялся личными возможностями преподавателей. Научно-исследовательская работа почти не проводилась. Однако положение существенно изменилось с приходом в университет М. А. Андреевского, Н. Н. Алексеева, Н. Я. Сонины.

Михаил Аркадьевич Андреевский (1847—1879) пришел в Варшавский университет во второй половине 1870 г. В 1866 г. он получил степень кандидата в Харьковском университете. В 1870 г. защитил в Московском университете магистерскую диссертацию «Об интегрирующем множителе дифференциального уравнения 2-го порядка» и получил назначение в Варшавский университет. Через год он защитил, также в Москве, докторскую диссертацию «Об интегрировании однородных дифференциальных выражений с некоторыми приложениями» (опубликована в Варшаве в 1870 г.). В Варшавском университете М. А. Андреевский развернул большую педагогическую и научно-исследовательскую деятельность. Он читал дифференциальные уравнения, теорию чисел, вариационное исчисление и другие математические предметы, а с 1871 г. — также спецкурс по эллиптическим функциям. Основным направлением его научных интересов была теория интегрирования дифференциальных уравнений. Исследования Андреевского печатались во многих отечественных и зарубежных журналах, в частности в «Математическом сборнике», «Трудах II съезда естествоиспытателей и врачей», журнале «*Nouvel annales des mathematiques*». Его работы в области интегрального исчисления, особенно в области определенных интегралов, сыграли заметную роль в дальнейшем развитии этого направления исследований.

Николай Николаевич Алексеев (1828—1881) в 19 лет окончил физико-математический факультет Московского университета. В течение ряда лет преподавал в высших учебных заведениях. Опубликовал ряд статей, работ и учебников. В 1861—1862 гг. издал «Курс интегрального исчисления», который по содержанию и методике изложения превосходил другие руководства этого времени. В 1865 г. вышел в свет курс по аналитической геометрии Алексеева. Известен также его курс лекций по теории эллиптических функций.

Алексеев занимался в основном интегральным исчислением и теорией дифференциальных уравнений. В первом томе «Математического сборника» напечатаны его работы «Свойство интегралов от алгебраических иррациональных функций, которые выражаются одними логарифмами» и «Интегрирование дифференциалов, содержащих корень квадратный из многочлена 4-й степени, и дифференциалов, содержащих корень кубический из многочленов 3-й степени». Во втором томе — статья «Криволинейные ортогональные координаты в приложении к исследованию кривизны кривых на различных поверхностях», в третьем — «О значении интегрирующего фактора при определении вида интеграла дифференциального однородного уравнения первого порядка» и в пятом — «Исследования о функциях, подобных функциям Лежандра». В 1864 г. в «*Comptes rendus*» Парижской академии наук была помещена статья Алексеева «О приведении интеграла, содержащего квадратичный корень из многочлена четвертой степени, к канонической форме

эллиптического интеграла и о вычислении модуля», привлекая внимание зарубежных математиков.

В 1869 г. Алексееву присуждается звание доктора математических наук без защиты диссертации, по совокупности работ в области теории интегрирования, а в 1871 г. он получает место ординарного профессора чистой математики в Варшавском университете. Сначала он профессор, а затем декан факультета. Читает ряд курсов: математический анализ, высшую алгебру, аналитическую геометрию, теорию определенных интегралов, интегрирование дифференциальных уравнений, теорию вероятностей и др. Работает над совершенствованием учебных пособий. В 1877 г. Алексеев уходит в отставку, а в 1879 г. его приглашают на должность адъюнкта Петербургской академии наук по отделу чистой математики. Здесь он написал две научные работы.

Особое влияние на развитие математической мысли в Варшавском университете оказал московский математик Н. Я. Сонин. Его жизнь, научная и педагогическая деятельность освещены в гл. VIII.

Рассмотрим преподавание математики в высших технических учебных заведениях.

В Московском техническом училище и Константиновском межевом институте в подготовительном и средних классах преподавался курс элементарной математики. Основной курс высшей математики включал аналитическую геометрию, дифференциальное и интегральное исчисления, элементы высшей алгебры (в основном, теорию решения уравнений), теорию дифференциальных уравнений. Во Львовской технической академии к курсу высшей математики некоторое время примыкала тригонометрия. Как самостоятельные предметы высшая алгебра и сферическая тригонометрия читались в Константиновском межевом институте. Из дополнительных предметов в межевом и технологическом институтах особое внимание уделялось теории вероятностей. В последнем, а также в Рижском и Львовском политехнических институтах изучалась и коммерческая арифметика. Из прикладных предметов особое значение придавалось механике.

В Московском техническом училище математику преподавали А. В. Летников, Н. Е. Жуковский, А. А. Ломовский, Ф. Е. Орлов, В. В. Преображенский, П. А. Чирков и др. В Константиновском межевом институте ведущими преподавателями были А. В. Летников, А. А. Ломовский, В. Е. Сердобинский; практические занятия по элементарной математике вели П. Н. Азанчевский, Н. Н. Алексеев, В. М. Лавров, П. А. Некрасов, Ф. И. Соснин, Н. Н. Юденич и др. В Ново-Александровском институте сельского хозяйства и лесоводства высшую математику, геодезию и механику читал профессор А. А. Зелинский, начертательную геометрию — доцент Ф. И. Верлинский. В Московском сельскохозяйственном институте в этот период математика, по-видимому, не изучалась, механику здесь читал до 1872 г. В. К. Делла-Вос, затем А. К. Эшпиман. В Рижском политехническом институте первыми профессорами математики были Г. Шмидт и Цефус. Большой вклад в преподавание математики в этом институте внес Г. Кизерицкий (воспитанник Дерптского университета, с 1864 по 1896 г. профессор математики,

а с 1875 по 1895 г. — директор института). Синтетическую и начертательную геометрию читал профессор А. А. Бек, коммерческую арифметику — К. Моль, элементарную математику и механику — профессор К. Д. Ловис. Приват-доцентами по математике в институте были Г. Вейдеман и Г. Гюнтнер, воспитанники Дерптского университета. Во Львовской технической академии математику преподавали профессор Л. Жмурко и В. Зайончковский.

Наиболее выдающимся преподавателем математики в высших технических учебных заведениях в 60—80-е годы был член-корреспондент Петербургской академии наук А. В. Летников.

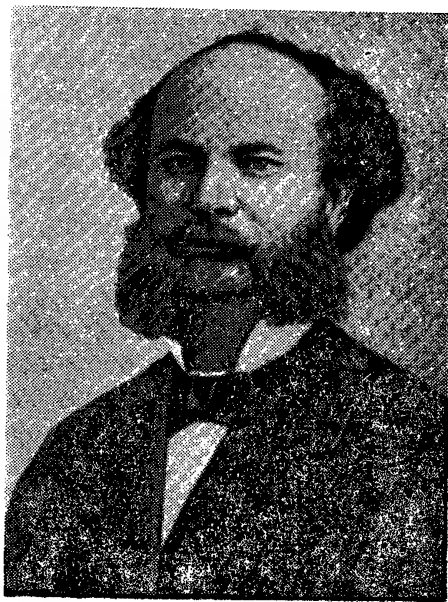
Алексей Васильевич Летников (1837—1888) родился в Москве. Учился в гимназии, затем в межевом институте. По окончании института (1856 г.) два года был вольнослушателем Московского университета, а затем около трех лет слушал лекции выдающихся французских математиков Серре, Шаля, Бертрана, Лиувилля, Пьюизе и других в Политехнической школе и Сорбонне. В конце 1860 г. Летников возвратился в Москву и начал читать курс теории вероятностей в офицерском классе Константиновского межевого института. Он принимает активное участие в организации и деятельности Московского математического общества. На заседаниях общества Летников прочел 15 докладов, в которых изложил содержание почти всех своих работ. В первом томе «Математического сборника» он опубликовал свою первую работу по теории дифференциальных уравнений, где обобщены результаты Ф. Г. Миндинга и оригинально изложены отдельные вопросы теории уравнения Риккати.

По существовавшему положению Летников мог быть допущен к магистерскому экзамену и защите диссертации только при наличии университетского диплома. Диплома у него не было. Но ему в 1867 г. была присуждена степень доктора Лейпцигского университета за работу по теории дифференциальных уравнений. Тем самым он получил право на сдачу магистерского экзамена и в 1868 г. успешно защитил диссертацию «Теория дифференцирования с произвольным указателем». В этом же году его назначают исполняющим обязанности профессора, а через год — профессором кафедры математики в реорганизованном Московском техническом училище. Он читал ряд специальных курсов. Некоторое время был инспектором училища и принимал непосредственное участие в руководстве педагогическим процессом. Одновременно преподавал в Константиновском межевом институте, а с 1883 г. был также директором Московского коммерческого училища. Написал пособия по общим разделам анализа (дифференциальному и интегральному исчислениям и их приложениям, теории дифференциальных уравнений) и вариационному исчислению.

В начале 1874 г. Летников защитил докторскую диссертацию, в которой развил тему своей магистерской диссертации. Эту тему он исследовал преимущественно во всех своих других работах, хотя и был ученым широких научных интересов.

Особой заслугой А. В. Летникова является развитие теории дифференцирования с произвольным указателем, зачатки которой встречались в работах Лейбница, Лапласа, Эйлера и др. Математической

корректностью постановки вопроса отличается уже его магистерская диссертация, где он впервые предлагает обобщение производной как междупредельной производной, т. е. ищет аналог определенного, а не неопределенного интеграла. Наиболее важной работой в этой области является докторская диссертация Летникова, во втором разделе которой изложены новые основания теории междупредельного дифференцирования, а в третьем разделе — ее применения к интегрированию дифференциального уравнения второго порядка весьма общего вида. В дальнейших работах Летников получает новые результаты и обобщения, новые формулы и излагает применение своих идей.



А. В. Летников.

Научную работу А. В. Летников сочетал с общественной деятельностью, с участием во многих обществах и съездах. Он был одним из тех ученых, которые поняли переворот в геометрии, совершенный Н. И. Лобачевским. Как педагог Летников пользовался заслуженным авторитетом среди учеников и коллег. Свои взгляды по основным вопросам образования и преподавания математики он высказал в актовой речи «О системах реального образования» (1871 г.). В этой речи приведены исторические сведения о развитии среднего образования в Европе и дан обзор его состояния в основных западноевропейских странах. Летников отстаивал необходимость сочетания классических гимназий с развитой сетью реальных училищ и специальных школ.

8

Математическая учебная литература для средней школы

На постановку и уровень преподавания математики в низших и средних учебных заведениях значительное влияние оказал П. Л. Чебышев. Как член ученого комитета Министерства народного просвещения (с 1856 по 1873 г.⁵), он уделял большое внимание совершенствованию учебной литературы по математике и смежным предметам. При подготовке нового устава для гимназии Чебышев отмечал, что книги по арифметике и геометрии Буссе, по алгебре Тихомандрицкого, Больмана, Беллавеня в обработке Погорельского, а также Сомова, по тригонометрии Дмитриева и семизначные логарифмические таблицы, издан-

⁵ Материалы, относящиеся к деятельности П. Л. Чебышева в ученом комитете Министерства народного просвещения, опубликованы в кн.: П. Л. Чебышев. Полн. собр. соч. Т. 5, стр. 312—403.

ные Буссе, «представляют собой достаточные средства для преподавания в гимназиях математики». Из других учебных книг он считал возможным использовать в качестве руководств курсы арифметики Буняковского, Симашко, Щеглова, курс алгебры Цветкова, курсы геометрии Погорельского, Лежандра, курсы тригонометрии Миквица, Перовщикова, Симашко. В качестве пособий Чебышев предлагал ряд книг, в том числе «Основания общей арифметики» (1862 г.) старшего учителя математики Минской гимназии А. Жбиковского. Эта книга представляла собой полный и подробный курс арифметики со включением многих вопросов алгебры и значительно отличалась от других руководств по арифметике полнотой изложения. Автор ее приобрел известность открытием новых признаков делимости чисел ⁶.

В 1865 г. ученый комитет Министерства народного просвещения объявил конкурс на составление учебных руководств по арифметике, алгебре, геометрии, тригонометрии и космографии. На конкурс поступило около 20 сочинений, но ни одно из них не удовлетворяло требованиям краткости и ясности изложения, точности определения и строгости выводов. Чебышев и не ожидал от конкурса желаемых результатов. Он считал, что улучшения руководств «по свойству математических предметов нельзя достигнуть объявлением конкурсов, так как составление курсов по этим предметам, при поспешной работе, не может выйти особенно удачным; такие курсы должны составляться годами и представлять собою результаты продолжительной педагогической деятельности» ⁷.

С появлением новых учебных руководств Чебышев считал необходимым использовать в гимназических курсах все, что окажется в этих книгах достойным, не отдавая предпочтения какой-либо одной из них. Составленный по его докладу 1867 г. каталог учебных математических руководств и пособий, которые следовало использовать в гимназиях и прогимназиях, содержал 39 наименований. В этот каталог были включены и новые учебные пособия, получившие в дальнейшем широкое распространение в школьном преподавании.

Большую известность приобрели книги преподавателей Московской четвертой гимназии А. Ф. Малинина и К. П. Буренина «Руководство арифметики для гимназий» (1867 г.) и «Собрание арифметических задач для гимназий» (1867 г.). Кроме собственно арифметики они содержали некоторые вопросы теории чисел, тесно связанные с арифметикой. Из-за погрешностей в изложении эти книги были допущены учебным комитетом лишь в качестве пособий для гимназий, однако они пользовались огромным успехом: первая из них издавалась 15 раз, вторая — 18.

В каталоге 1867 г. среди руководств по алгебре названы «Начальная алгебра» О. И. Сомова (изд. 2-е, 1864 г.) и «Начальная алгебра» А. Ю. Давидова (1866 г.) — наиболее распространенные учебники по математике. Первое руководство выдержало семь изданий (последнее в 1901 г.),

⁶ А. Z b i k o w s k y. Note sur la divisibilité des nombres. — Bull. de l'Acad., 1861, t. 3, col. 151—153.

⁷ П. Л. Ч е б ы ш е в. Полн. собр. соч. Т. 5, стр. 330.

второе — 24 издания (последнее в 1922 г.). «Начальная алгебра» Давидова была очень близкой по научным и методическим достоинствам к учебнику Сомова. Однако она отличалась более полным содержанием, в частности, большое место в ней отведено задачам. В качестве руководства по алгебре для гимназий ученый комитет одобрил книгу «Руководство алгебры и собрание алгебраических задач» А. Ф. Малинина и К. П. Буренина (1870 г.). По мнению Чебышева, это руководство содержало все, что по плану преподавания математики в гимназиях должно было входить в состав курса, и отличалось полнотой и ясностью изложения. Книга выдержала семь изданий (1870—1884 гг.).

Наиболее распространенным руководством по геометрии была «Элементарная геометрия в объеме гимназического курса» А. Ю. Давидова (1864 г.). Она выдержала 39 изданий (последнее в 1922 г.). Ясность и сжатость изложения, большое количество удачно подобранных задач отличали руководство Давидова от других учебников по геометрии. В нем, как и в других пособиях Давидова, проявилось стремление увязывать изложение теоретических вопросов гимназического курса математики с практикой.

По тригонометрии наиболее удачным оказалось «Руководство прямолинейной тригонометрии для гимназий» А. Ф. Малинина (1865 г.). Эта книга выдержала 15 изданий и благодаря высоким научным и методическим достоинствам принесла автору большую известность (как и другие книги, написанные им совместно с Бурениным). Другим учебным руководством по тригонометрии был «Курс прямолинейной тригонометрии и собрание тригонометрических задач» профессора Московского технического училища Н. А. Шапошников (1880 г., изд. 2-е — 1885 г.). Хотя программа выдвигала на первый план решение треугольников, Шапошников, в отличие от своих предшественников, основное внимание обращает на теорию тригонометрических функций. Большую известность получил «Методический сборник алгебраических задач» Н. А. Шапошникова и Н. К. Вальцова, вышедший в 1887 г. (до 1917 г. выдержал 24 издания, затем — еще 28 изданий).

Дальнейшее обновление учебной литературы по математике и постановки ее преподавания в средних учебных заведениях, начавшееся с середины 80-х годов, прежде всего связано с деятельностью А. П. Киселева (1852—1940). Его учебники «Арифметика» (1884 г.), «Элементарная алгебра» (1888 г.) и «Элементарная геометрия» (1892 г.) благодаря простоте и общедоступности изложения являются наиболее распространенными руководствами и в наши дни.

Отечественные математики и педагоги в 60—80-х годах достигли больших успехов в постановке преподавания математики в средних учебных заведениях и подготовке учебных руководств. Это позволило почти полностью отказаться от использования в преподавании математики сочинений зарубежных авторов. Лишь два из них, в том числе «Алгебра» Бертрана, были одобрены в качестве пособий для гимназий.

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В АКАДЕМИИ НАУК В 1890—1917 гг.

Петербургская академия наук была ведущим центром математической школы, созданной Чебышевым. Наиболее выдающимися представителями этой школы являются академики А. А. Марков, А. М. Ляпунов, В. А. Стеклов, Н. Я. Сони́н, А. Н. Крылов.

1

А. А. Марков

Андрей Андреевич Марков родился 14 (2) июня 1856 г. в семье мелкого чиновника в Рязанской губернии. В 60-е годы семья Марковых переехала в Петербург, и будущий академик получил среднее образование в одной из петербургских гимназий. Гимназия в те годы была «классической», учеба основывалась на зубрежке древних языков, что Маркову было не по нраву. Приспосабливаться он не любил и не умел и получал преимущественно посредственные оценки. Серьезно увлекался только математикой, которую к окончанию гимназии уже частично знал в объеме университетского курса, а также интересовался публицистикой Чернышевского, Добролюбова, Писарева.

В 1874 г. Марков поступил в Петербургский университет, где в это время работали такие выдающиеся математики, как П. Л. Чебышев, А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев. В 1878 г. он окончил университет со степенью кандидата, получил золотую медаль физико-математического факультета за сочинение на предложенную тему «Об интегрировании дифференциальных уравнений при помощи непрерывных дробей» и был оставлен при университете для подготовки к профессорскому званию. Через два года Марков защитил магистерскую диссертацию, а еще через четыре года — докторскую. Диссертации, а также другие работы первых лет научной деятельности сразу обеспечили ему почетное место среди отечественных математиков. За десять лет он прошел все три ступени академической лестницы: в 1886 г. — адъюнкт Академии наук, с 1890 г. — экстраординарный, а с 1896 г. — ординарный академик.

Преподавательскую деятельность Марков начал в 1880 г. в Петербургском университете и не прекращал до последнего года жизни, даже тогда, когда здоровье катастрофически ухудшилось и он стал ин-

валидом. Будучи в отставке, он продолжал на правах академика читать в университете теорию вероятностей и некоторые другие курсы. Его сын, выдающийся советский математик А. А. Марков, вспоминает: «В 1920/21 учебном году я водил его на лекции под руку, чего раньше никогда не требовалось. Это были лекции по теории вероятностей, соответствовавшие его известной книге. Как один из слушателей, я могу засвидетельствовать, что они читались безукоризненно, несмотря на то, что лектор едва держался на ногах»¹.

Научную деятельность Марков, как и его учитель П. Л. Чебышев, начал исследованиями по теории чисел. Основная его проблематика в этой области примыкает к предмету занятий более молодых его наставников, А. Н. Коркина и Е. И. Золотарева, — нахождению экстремальных квадратичных форм данного определителя. Этот трудный вопрос теории чисел по постановке и методам, примененным для его исследования, является классическим: в истории связанных с ним идей и задач мы находим имена Эйлера, Лагранжа, Гаусса, Чебышева, Эрмита. Коркину и Золотареву принадлежат результаты по определению точных пределов минимумов положительных квадратичных форм. Они же совместно начали (1878 г.) исследование неопределенных двойничных квадратичных форм и нашли две первые экстремальные формы положительного определителя, отметив существенное отличие таких форм от неопределенных форм отрицательного определителя. Марков получил окончательные результаты по нахождению экстремальных двойничных квадратичных форм положительного определителя в двух статьях² и магистерской диссертации³. Оказалось, что определение минимумов форм связано с решением в целых числах неопределенного уравнения $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$. Марков показал, как находятся все решения этого уравнения в числах, не превосходящих любого наперед заданного числа.

Сопоставим результаты Маркова с результатами, полученными до него.

Для определенных двойничных квадратичных форм (с отрицательным определителем D) было доказано существование однотипной верхней границы минимумов — она равна $\sqrt{\frac{4}{3}|D|}$. Кроме того, для таких форм характерно, что верхняя граница их минимумов сколь угодно точно аппроксимируется при любом k , $\frac{4}{3} > k > 0$, и можно найти формы определителя D , минимум которых равен $\sqrt{k|D|}$. С переменной знака определителя D двойничных квадратичных форм сплошной спектр как бы переходит в дискретный. Коркин и Золотарев обнаружили, что точной

¹ Биография А. А. Маркова — В кн.: А. А. Марков. Избр. труды. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1951, стр. 612—613.

² А. А. Markoff. Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. — Math. Ann., 1879, Bd. 15, S. 381—406; Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. — Math. Ann., 1880, Bd. 17, S. 379—399.

³ О бинарных квадратичных формах положительного определителя. Рассуждение А. Маркова. СПб, 1880.

верхней границей минимумов является минимум формы, и, разумеется, всех ей эквивалентных, $\sqrt{\frac{4}{5}D} (x^2 - xy - y^2)$, равный $\sqrt{\frac{4}{5}D}$. Если же исключить эти формы, то точная верхняя граница минимумов скачком снижается до $\sqrt{\frac{1}{2}D}$. Это был труднонаходимый и труднообосновываемый результат. Высокую оценку дал ему французский математик Эрмит. Однако Марков пошел значительно дальше. Он показал, что числа $\frac{4}{5} (= N_1)$ и $\frac{1}{2} (= N_2)$ начинают бесконечно убывающий ряд положительных чисел

$$N_1, N_2, N_3, \dots, N_k, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} N_k = \frac{4}{9},$$

каждому из которых соответствует класс неопределенных двойничных квадратичных форм определителя D и минимума, равного $\sqrt{N_k D}$; если значение какой-либо неопределенной двойничной квадратичной формы по абсолютной величине не меньше $\sqrt{N_k D}$, где D — ее определитель, то минимум ее значений совпадает с одним из чисел

$$\sqrt{N_k D}, \sqrt{N_{k-1} D}, \dots, \sqrt{N_1 D}.$$

Марков обнаружил также другое отличие от случая отрицательного определителя: предельному значению $\frac{4}{9}$ соответствует бесконечно много классов форм определителя D , т. е. форм, минимум которых равен $\frac{2}{3}\sqrt{D}$. Кроме того, определение чисел N_k оказалось связанным с решением в целых числах неопределенного уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz, \quad (\alpha)$$

а именно, любое

$$N_k = \frac{1}{\frac{9}{4} - \frac{1}{m^2}},$$

где целое число m вместе с бесконечным множеством пар целых чисел n и p дает решение уравнения (α) . Всякому решению (m, n, p) в целых числах уравнения (α) соответствуют числа N_k , равные

$$\frac{1}{\frac{9}{4} - \frac{1}{m^2}}, \quad \frac{1}{\frac{9}{4} - \frac{1}{n^2}}, \quad \frac{1}{\frac{9}{4} - \frac{1}{p^2}}.$$

В магистерской диссертации двадцатичетырехлетнего ученого проявились основные характерные черты его дарования и его математического стиля. Одной из них является стремление к решению четко сформулированных, конкретных математических задач. Эти типично для чебышевской школы и вполне соответствовало натуре А. А. Маркова, не терпевшего многословия и неопределенности, недоброжелательно относившегося к большой общности в постановке вопросов и рассужде-

ниях. Другая черта, присущая Маркову, как и всей школе Чебышева, заключается в стремлении доводить решение до конца, вплоть до численного результата. Марков был весьма незаурядным вычислителем. Достаточным свидетельством этого являются его «Таблица значений

интеграла $\int_x^\infty e^{-t^2} dt$ (1888 г.) и магистерская диссертация, где приводятся таблицы, вычисление которых требовало немалого искусства.

В работах по теории чисел Марков не использует геометрические представления и геометрический язык, хотя позднее было показано, что во многих родственных областях геометрические представления являются вполне естественными и раскрывают сущность вопроса ⁴. Геометрические вопросы вообще не входили в его тематику работ. Поэтому можно думать, что он «не признавал» геометрии. Но, вероятно, геометрические интерпретации не использовались Марковым потому, что при его подходе к математической строгости они не могли служить доказательством для него, а дополнительное включение их не вязалось с его стилем изложения.

Отличительная особенность работ Маркова — сочетание законченности результатов со сжатостью и строгостью формы. Язык их прост и выразителен, нет никаких отступлений, не относящихся к сути излагаемого вопроса. Такими были и лекции Маркова. Они «всегда имели деловой характер; никаких отступлений в сторону, не имеющих отношения к предмету, никаких вводных фраз, ничего показного; случалось, что лекция начиналась, если надо, раньше, чем А. А. доходил до доски» ⁵.

От проблемы минимумов неопределенных двойных квадратичных форм — предмета магистерской диссертации — естественным был переход к проблеме минимумов квадратичных форм с большим числом переменных. В решении этой проблемы возникли большие трудности. Лишь после многолетних исследований в 1901 г. в работе «О неопределенных тройных квадратичных формах» ⁶ Марков получил две первые экстремальные формы с тремя переменными (одна из них была известна А. Н. Коркину) и указал третью, экстремальность которой доказал позднее ⁷. В связи с этими исследованиями он выполнил большое количество вычислений, составивших отдельную работу, которую он опубликовал в 1909 г. ⁸. Марков получил первые две экстремальные

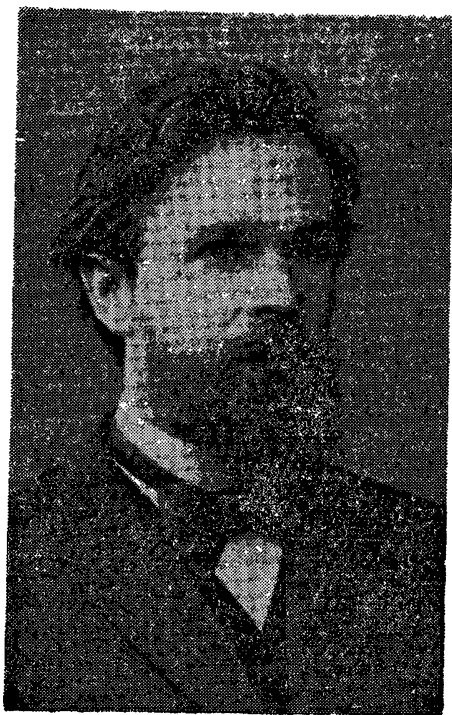
⁴ Б. Н. Делоне. Петербургская школа теории чисел. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1947, стр. 141—193.

⁵ Н. М. Гюнтер. О педагогической деятельности А. А. Маркова. — Известия Российской академии наук, 1923, т. 17, стр. 37.

⁶ А. А. Марков. О неопределенных тройных квадратичных формах. — В кн.: Избр. труды, 1951, стр. 143—163.

⁷ А. А. Markoff. Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies. — Math. Ann., 1903, Bd. 56, S. 233—251.

⁸ А. А. Марков. Таблица неопределенных тройных квадратичных форм, не представляющих нуль, для всех положительных определителей $D \leq 50$. — В кн.: Избр. труды, 1951, стр. 165—198.



А. А. Марков (70-е годы).

формы и для неопределенных квадратичных форм с четырьмя переменными⁹.

Рассмотренные исследования Маркова составляют его основной вклад в теорию чисел. В развитии другой области этой теории — учении об алгебраических числах — сыграла роль его работа о чисто кубических полях¹⁰. Она посвящена памяти Е. И. Золотарева, написана в духе его теории идеальных чисел¹¹ и содержит большую таблицу единиц кубических полей, определяемых кубическими корнями из всех чисел, не делящихся на кубы, от 2 до 70. К этой работе примыкают исследования ученика А. А. Маркова Г. Ф. Вороного по обобщению алгоритма непрерывных дробей на кубическую область, а также многие дальнейшие исследования других отечественных математиков¹². Вполне оправдалось предвидение Маркова, выраженное им в таких словах: «В этом мемуаре я предполагаю применить общую теорию целых

чисел, зависящих от корня алгебраического уравнения, разработанную трудами Куммера, Дедекинда и Золотарева, к случаю чисел, зависящих от корня кубического из целого рационального числа, надеясь, что этот частный случай, интересный сам по себе, может способствовать также развитию общего случая.

В частности, я хочу показать, как следуя идеям Золотарева, которого, к нашему глубокому сожалению, столь рано похитила у науки преждевременная смерть, можно легко получить разложение на простые множители всех целых чисел, зависящих от корня кубического из целого рационального числа»¹³.

Кроме теории чисел Марков почти с самого начала самостоятельной научной деятельности занимался теорией вероятностей, ставшей с конца 90-х годов главным предметом его исследований. В области теории вероятностей работал П. Л. Чебышев. Но поскольку некоторые свои утверждения Чебышев высказал без полного и достаточно строгого доказательства, Марков, посвятивший теории вероятностей свыше 25 работ,

⁹ А. А. Марков. О неопределенных квадратичных формах с 4-мя переменными. — Известия Академии наук, 1902, сер. 5, т. 16, № 3, стр. 97—108.

¹⁰ А. А. Марков. О целых числах, зависящих от корня кубического из целого рационального числа. — В кн.: А. А. Марков. Избр. труды, 1951, стр. 85—133.

¹¹ В «Избранных трудах» в переводе подзаголовка этой работы допущено досадное искажение: вместо «Памяти Е. Золотарева» напечатано «К мемуару Е. Золотарева».

¹² См., в частности, указавшую выше работу Б. Н. Делоне.

¹³ А. А. Марков. Избр. труды, 1951, стр. 87.

в том числе классический курс «Исчисление вероятностей»¹⁴, довел разработку этой теории в духе идей Чебышева до высокой степени совершенства.

В свое время вполне обоснованно был сделан вывод, что «научная деятельность А. А. Маркова привела к полному и завершенному решению основных вопросов исчисления вероятностей: предельных теорем вероятностей, закона больших чисел и способа наименьших квадратов, вопросов, трудность которых не могла быть преодолена в науке до Андрея Андреевича в течение многих десятилетий»¹⁵. Этот вывод следует дополнить: содержание работ Маркова оказалось еще более глубоким, и многое в них, что представлялось завершенным, получило дальнейшее развитие; работы, в которых Марков не «закрывал» прежние разделы теории вероятностей, а открывал новые, прежде всего работы о распространении предельных теорем на зависимые величины, связанные в цепь (знаменитые «цепи Маркова»), приобрели огромное значение в математике и физике и продолжены советскими математиками.

В работе Маркова над теорией вероятностей немалую роль сыграло своеобразное соревнование между ним и А. М. Ляпуновым. Марков так развил метод моментов Чебышева (метод Чебышева — Маркова), обосновывая главные результаты своего учителя, что смог с полной строгостью изложить относящиеся к нему вопросы в первом издании «Исчисления вероятностей». Но, как рассказывает В. А. Стеклов, год спустя другой ученик Чебышева, А. М. Ляпунов, при помощи совершенно иного метода доказал теорему о пределе вероятности с такой степенью общности, которую, по-видимому, не мог дать метод моментов, использовавшийся Чебышевым и Марковым. Марков часто шутил в присутствии Ляпунова, что он, Ляпунов, сделал ему «большую пакость».

Метод моментов основан на предположении существования таких математических ожиданий, от которых метод Ляпунова совершенно не зависит, почему Марков первое время думал, что методом математических ожиданий и невозможно получить результаты Ляпунова. Однако через семь лет Марков нашел способ обобщить метод моментов и таким путем не только получил результаты Ляпунова для величин, не зависящих между собой, но и распространил основные положения теории вероятностей на многие случаи величин, известным образом связанных друг с другом. Таким путем Марков подверг анализу новый обширный класс вопросов, которые до него почти не затрагивались. Решения их представляют самостоятельный интерес, а также могут иметь немало важных практических применений¹⁶.

Последние годы научной деятельности (умер 20 июля 1922 г.) Марков посвятил изучению главным образом нового раздела исчисления

¹⁴ А. А. Марков. Исчисление вероятностей. СПб, 1900 (изд. 2-е — 1908, 3-е — 1912, 4-е — 1924; в переводе на немецкий язык со второго издания — 1912 г.).

¹⁵ А. Безикович. Работы А. А. Маркова по теории вероятностей. — Известия Российской академии наук, 1924, сер. 6, т. 18, стр. 45.

¹⁶ В. А. Стеклов. Андрей Андреевич Марков. — Известия Российской академии наук, 1924, сер. 6, т. 16, стр. 178.

вероятностей — «вероятностей событий, связанных в цепи». Одним из стимулов, побудивших его заняться этим вопросом, были, видимо, некоторые просьбы статистиков и экономистов (об этом свидетельствует неопубликованная переписка Маркова). Надо думать, что в связи с такими просьбами он и приступил к анализу роли допущения зависимости рассматриваемых величин в выводе уже установленных положений теории вероятностей. Во всяком случае, первая работа из рассматриваемого цикла — «Распространение законов больших чисел на величины, зависящие друг от друга» — оставляет именно такое впечатление. Марков замечает вначале, что Чебышев в выводах при доказательстве закона больших чисел ограничился простейшим и поэтому наиболее интересным случаем независимых величин и его выводы можно распространить на некоторые случаи довольно общего характера, когда величины зависят друг от друга. Далее, основываясь на применимости закона больших чисел к суммам

S_n случайных величин x_i ($S_n = \sum_{i=1}^n x_i$), если только для x_i существуют

вторые моменты и если относительно дисперсий $D(S_n)$ известно, что

$$\frac{D(S_n)}{n^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

он получает ряд достаточных условий применимости закона больших чисел к зависимым или независимым рассматриваемым случайным величинам. В этой же работе Марков приводит пример неприменимости закона больших чисел к зависимым и ограниченным величинам x_i (если $D(S_n) > cn^2$ при положительной постоянной c), а в качестве примеров подчиняющихся этому закону зависимых величин впервые вводит свои цепи.

В «Исследовании замечательного случая зависимых испытаний» центральная предельная теорема теории вероятностей распространяется на суммы случайных величин, связанных в простую однородную цепь и принимающих только значения 0 и 1 с вероятностями перехода, отличными от нуля и единицы. В других работах Марков рассматривает сложные однородные цепи величин, число возможных значений которых может быть любым, неоднородные цепи и т. д. Эти работы были продолжены С. Н. Бернштейном, В. И. Романовским, А. Н. Колмогоровым, Ю. В. Линником и другими видными учеными.

Своеобразной является трактовка Марковым способа наименьших квадратов. Впервые она изложена им в одном из писем к А. В. Васильеву¹⁷. Марков показывает, что к способу наименьших квадратов можно прийти, исходя из следующих положений: 1) рассматриваются только такие приближенные равенства, которые, по предположениям, не содержат постоянной погрешности; 2) каждому приближенному равенству приписывается определенный вес, причем вес различных приближенных равенств считается обратно пропорциональным математическим ожиданиям квадратов погрешностей; 3) достоинство каждого приближенного равенства оценивается его весом и соответственно

¹⁷ А. А. Марков. Письмо от 9 октября 1898 г. — В кн.: Избр. труды 1951, стр. 243—251.

этому для каждого неизвестного отыскивается такое приближенное равенство, которое имеет наибольший вес¹⁸. Конечно, слишком категорично заключение, к которому приходит Марков: «По-видимому, я пересмотрел все и могу только повторить свое мнение, что единственно рациональный вывод (способа наименьших квадратов. — *Ред.*) основан на прямом рассмотрении математического ожидания квадрата погрешности»¹⁹. Но он первый исключил из изложения способа наименьших квадратов ту «метафизику», по поводу которой В. А. Стеклов в очерке о Маркове приводил определение Вольтера: «Когда тот, кто слушает, ничего не понимает, а тот, кто говорит, понимает не больше, — это метафизика», и цитировал замечание о законе ошибок одного выдающегося физика, приведенное Анри Пуанкаре: «Все твердо верят в этот закон, так как математики вообразили, что он является фактом, установленным наблюдениями, а наблюдатели думают, что это математическая теорема»²⁰.

Большой цикл работ А. А. Марков посвятил вопросам о наибольших и наименьших величинах, впервые поставленным П. Л. Чебышевым в 1874 г. в статье «О предельных значениях интегралов». В современной науке эти вопросы относятся к проблеме моментов в различных ее постановках. Чебышев сформулировал задачу так: для неотрицательной на промежутке (a, b) функции даны $n + 1$ ее степенных моментов

$$\int_a^b f(y) dy, \int_a^b f(y) y dy, \dots, \int_a^b f(y) y^n dy;$$

требуется определить при $x \in (a, b)$ максимум и минимум значений

$$\int_a^x f(y) dy.$$

В формулировке ответа он привел без доказательства некоторые неравенства, связанные с применением аппарата непрерывных дробей. Впервые эти неравенства были доказаны Марковым в статьях, опубликованных в 1884 г.²¹, а полное решение проблемы Чебышева дано в третьей главе докторской диссертации Маркова²². Как и в исследованиях по теории вероятностей, Марков пошел значительно дальше. Первоначально в 1886 г., а затем, с рядом важных приложений, в 1897 г.²³ он обобщает задачу Чебышева, заменяя степенные моменты моментами относительно системы функций $\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x)$, удовлетворяющих для $x \in (a, b)$ условиям $\lambda_1(x) > 0$, $W(\lambda_1, \lambda_2) > 0$, ..., $W(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) < 0$,

¹⁸ А. А. Марков. Письмо от 9 октября 1898 г. — В кн.: Избр. труды, 1951, стр. 246.

¹⁹ А. А. Марков. Там же, стр. 251.

²⁰ В. А. Стеклов. Андрей Андреевич Марков, стр. 169—184.

²¹ А. А. Марков. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. М.—Л., 1948.

²² О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей. Рассуждение А. Маркова. СПб, 1884.

²³ А. А. Марков. О предельных величинах интегралов в связи с интерполированием. — В кн.: Избр. труды..., 1948, стр. 388—389.

где W — вронскиан. Другое обобщение, изложенное в работе 1896 г. ²⁴, таково: пусть по-прежнему заданы $n + 1$ первых степенных моментов функции $f(x)$, которая должна на промежутке (a, b) удовлетворять также условию $0 \leq f(x) \leq L$, где L — заданное число, причем этими условиями $f(x)$ не определяется существенно однозначно; пусть $g(x)$ — заданная на промежутке (a, b) вещественная функция; требуется найти максимум и минимум функционала

$$\int_a^b f(x) g(x) dx$$

относительно всех допустимых $f(x)$ и определить обе функции, экстремизирующие этот функционал. Обобщение относится к « L -проблеме моментов» Маркова. Марков решил задачу, принимая, что $g(x)$ имеет производные до $(n + 1)$ -го порядка включительно и сохраняет знак на промежутке (a, b) . Это решение позволило ему построить новые простые формулы квадратур с указанием поправочных членов.

После выхода работы Маркова с доказательством неравенств Чебышева была опубликована большая статья выдающегося голландского математика Стилтеса «Исследования о так называемых механических квадратурах», которая также содержала доказательство неравенств Чебышева (без ссылок на Чебышева), причем доказательство, как отмечает В. А. Стеклов, «в мельчайших деталях совпадающее с тем, которое незадолго перед тем было опубликовано А. А.» ²⁵. На заявление Маркова о приоритете Стилтес ответил, что работа Чебышева ему была неизвестна, а с его (Маркова) работой он по срокам тоже не мог познакомиться. С этого времени началось дружеское соревнование двух ученых, в котором соперники оказались достойными друг друга: поочередно то один, то другой получал новые решения вопросов, связанные с различными постановками проблемы моментов, с применениями полученных результатов к теории интерполирования, построению квадратурных формул и определению их остаточных членов, с развитием аппарата непрерывных дробей, применявшегося и Марковым, и Стилтесом. Незадолго до смерти Стилтес опубликовал большой мемуар «Исследование о непрерывных дробях» (1894—1895 гг.) ²⁶, где решена степенная проблема моментов для бесконечного интервала $(0, \infty)$, причем задавались все степенные моменты искомой функции $f(x)$, т. е. бесконечная последовательность чисел

$$s_n = \int_0^{\infty} f(x) x^n dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

В ответ на это решение Марков в статье «Два доказательства сходимости некоторых непрерывных дробей» ²⁷ (1895 г.) рассмотрел тонкие вопросы,

²⁴ А. А. Марков. Новые приложения непрерывных дробей. — В кн.: Избр. труды..., 1948, стр. 387—388.

²⁵ В. А. Стеклов. Андрей Андреевич Марков, стр. 190.

²⁶ Стилтес. Исследование о непрерывных дробях. Харьков, 1936.

²⁷ А. А. Марков. Два доказательства сходимости некоторых непрерывных дробей. — В кн.: Избр. труды..., 1948.

связанные с разрешимостью проблемы моментов Стильтеса. В последней работе из этого цикла — «Исследование о предельных величинах интегралов»²⁸ — он решил задачу Стильтеса как предельный случай задачи, когда задается только конечное число первых степенных моментов.

А. А. Марков продолжал исследования Чебышева и по теории функций, наименее уклоняющихся от нуля, иначе говоря, теории наилучшего приближения. Работа «Об одном вопросе Д. И. Менделеева»²⁹ посвящена определению верхней границы значений первой производной полинома в заданном интервале по заданной верхней границе значений самого полинома. Этот результат был обобщен братом Маркова В. А. Марковым, получившим точные верхние границы для производных любого порядка. К теории наилучшего приближения относятся также работы А. А. Маркова «О наивыгоднейшем изображении некоторой части поверхности вращения на плоскости»³⁰, «Об одном механизме Чебышева»³¹, «Новый случай задачи Понселе о приближенном выражении квадратного корня из суммы квадратов»³².

Интересна своей прикладной направленностью работа «Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах»³³, где строго математически проанализированы некоторые случаи построения так называемых переходных кривых — кривых, по которым прокладывают рельсы на закруглениях, соединяющих два прямолинейных участка железнодорожной колеи. В ней указаны изменения, которые следует внести в некоторые предложенные инженерами правила для построения переходных кривых. Весьма интересен также много раз читанный Марковым специальный курс «Лекции о функциях, наименее уклоняющихся от нуля»³⁴. Лекции начинаются точной формулировкой основной задачи. Формулировка дается в весьма общем виде: рассматривается функция

$$v = f(x, y, \dots, z; p_1, p_2, \dots, p_n)$$

от любого числа независимых переменных $x, y, \dots, z$ и параметров p_i ; точки с координатами $(x, y, \dots, z)$ принадлежат замкнутой конечной области Ω , в которой функция v непрерывна и имеет непрерывные первые и ограниченные вторые производные по p_i . Пусть L — точный верхний предел v в области Ω , называемый уклонением v от нуля. Задача со-

²⁸ А. А. Марков. Исследование о предельных величинах интегралов. — Записки Академии наук. Физ.-мат. отд., 1900, сер. 8, т. 10, № 9, стр. 1—3.

²⁹ А. А. Марков. Об одном вопросе Д. И. Менделеева, СПб, 1889.

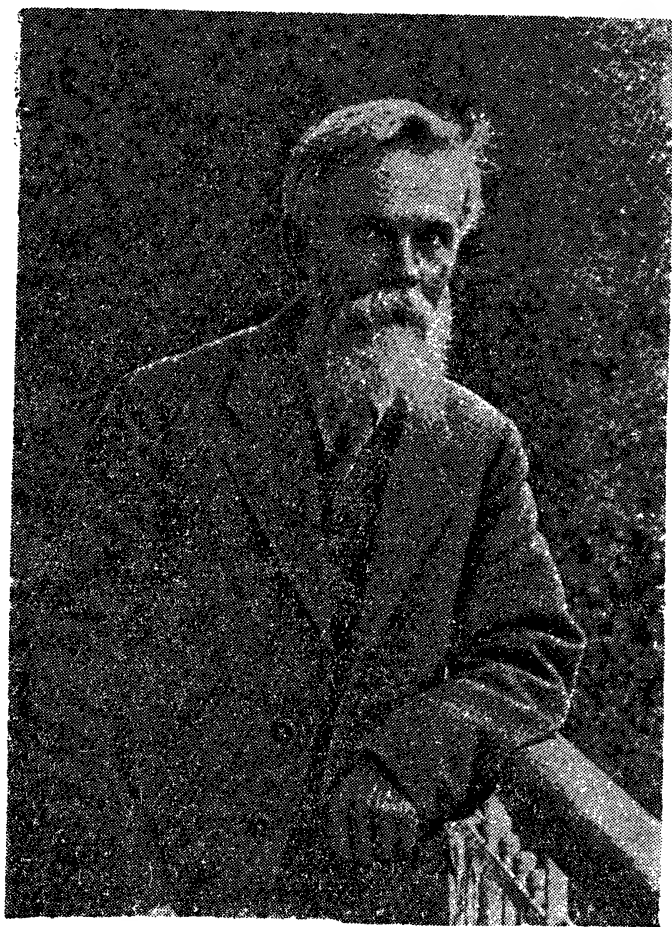
³⁰ А. А. Марков. О наивыгоднейшем изображении некоторой части поверхности вращения на плоскости. — Известия Академии наук, 1895, сер. 5, т. 2, № 3, стр. 177—187.

³¹ А. А. Марков. Об одном механизме Чебышева. — Известия Академии наук, 1901, т. 14, № 2, стр. 201—214.

³² А. А. Марков. Новый случай задачи Понселе о приближенном выражении квадратного корня из суммы квадратов. — Известия Академии наук, 1906, т. 24, № 1, стр. 65—81.

³³ А. А. Марков. Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах. — Сообщения Харьковского математического общества, 1889, сер. 2, т. 1, № 5—6, стр. 250—276.

³⁴ Издан литографским способом в 1906 г.



А. А. Марков (1911 г.).

строит в определении значений параметров, минимизирующих L . В заключении вступительного параграфа лекций Марков отмечает, что решение этой задачи представляет большой теоретический и практический интерес и особенно важное значение имеет при исследовании вопросов о приближенных представлениях заданных функций функциями более простого вида. Этими вопросами впервые занялся Понселе. Он полностью решил задачу, которая сводится к разысканию функции вида

$$f(x) = \frac{p_1 x + p_2}{\sqrt{1+x^2}} - 1,$$

наименее уклоняющейся от нуля, когда переменное x лежит в заданном промежутке. Но разработка общих приемов для решения таких задач и применение их к различным частным случаям принадлежат главным образом Чебышеву и его ученикам.

Значительный вклад внес А. А. Марков в теорию дифференциальных уравнений, а также в решение вопросов, связанных с приближенными вычислениями. Он исследовал дифференциальное уравнение Ламе и уравнение гипергеометрического ряда в связи с проблемой приводи-

мости линейных дифференциальных уравнений, определил все случаи, когда произведение двух решений гипергеометрического уравнения является целой функцией, изучил распределение нулей этой функции и нулей функций Ламе (последний вопрос исследовал также А. М. Ляпунов). К области приближенных вычислений относится также многое из работ, рассмотренных или названных выше. В частности, в докторской диссертации Маркова впервые дано выражение для поправочного члена квадратурной формулы Гаусса. В «Мемуаре о преобразовании медленно сходящихся рядов в быстро сходящиеся»³⁵ введено преобразование, получившее впоследствии имя Маркова. Многие из оригинальных результатов Маркова по приближенным вычислениям вошли в его монографию «Исчисление конечностей»³⁶. Она блестяще завершает классический период развития исчисления конечных разностей и подводит к новому периоду, для которого характерно широкое внедрение методов теории функций.

Таким образом, в «главнейших своих трудах Андрей Андреевич был прямым продолжателем Чебышева»³⁷. Идеи и методы А. А. Маркова оказали большое влияние на развитие математики. Как педагог и воспитатель будущих ученых Марков отстаивал определенный подход к математике и имел свою систему взглядов на ее сущность и значение. Он не был приверженцем аксиоматического направления, считал, что содержание общих понятий определяется тем, как их применяют и как к ним относятся. Однажды, пишет Н. М. Гюнтер, на вопрос, что такое математика, Марков ответил: «Математика это то, чем занимаются Гаусс, Чебышев, Ляпунов, Стеклов и я»³⁸. Он возражал против расширения в средней и высшей школе изложения учения о числе, в его «Введении в анализ» (литографированное издание) иррациональным числам отведено полторы страницы. Геометрических примеров Марков приводил мало, примеров из физики в его курсах почти не было: он считал, что беря пример из области, малоизвестной ученику или слушателю, либо лишь недавно им усвоенной, мы отвлекаем его внимание от предмета, на котором ему следует сосредоточиться. Те же разделы математики, которые Марков выдвигал на первый план, он излагал полно и строго. Всякое доказательство давал так, что к нему нечего было добавить и в нем ничего нельзя было изменить, а вычисление доводил до окончательного результата с учетом всех возможных погрешностей, так как считал весьма важным заключительный этап математического исследования — «доведение до числа».

Беспощадная строгость и бескомпромиссная последовательность были свойственны Маркову-педагогу и Маркову-человеку. «Возражения свои и заявления он всегда начинал с той резкой определенностью,

³⁵ А. А. М а р к о в. Mémoire sur la transformation des séries peu convergentes en séries très convergentes. — Mem. de l'Acad. des Sci., 1890, ser. 7, t. 37, N 9.

³⁶ А. А. М а р к о в. Исчисление конечных разностей. СПб, 1886 (литограф. изд.); изд. 2-е. Одесса, 1910; в переводе на немецкий язык с первого издания: Differenzenrechnung. Leipzig, 1886. Рефераты и рецензии на эту монографию см. в кн.: А. А. М а р к о в. Избр. труды, 1951, стр. 684.

³⁷ В. А. С т е к л о в. Андрей Андреевич Марков, стр. 169—184.

³⁸ Н. М. Г ю н т е р. О педагогической деятельности А. А. Маркова, 37.

к какой привык в своих ученых изысканиях», — пишет о нем В. А. Стеклов. Такой «резкой определенностью» отличались и публичные выступления А. А. Маркова: выступления в 1902 г. против кассации выборов А. М. Горького в почетные академики, кассации, которую потребовал Николай II, отказ от получения орденов царского правительства, требование отлучить его от православной церкви, вызванное отлучением от церкви Л. Н. Толстого, выступление в Петербургском университете с протестами против полицейских мер царского правительства по отношению к университету и студентам. Всей своей деятельностью Андрей Андреевич Марков вписал в историю отечественной и мировой науки яркие незабываемые страницы.

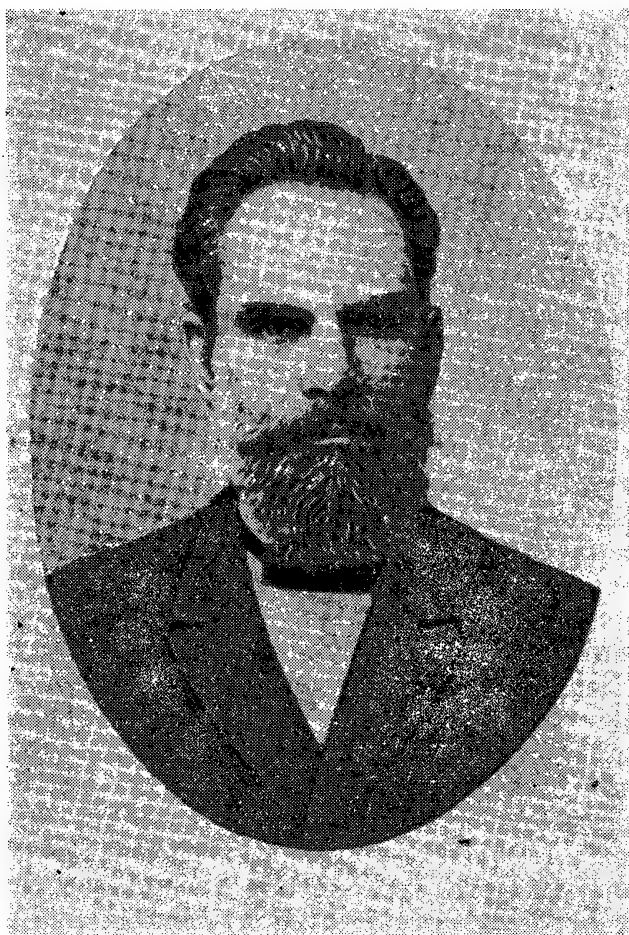
2

А. М. Ляпунов. Очерк деятельности

Александр Михайлович Ляпунов — один из наиболее выдающихся отечественных математиков и механиков. Тот большой вклад, который он внес в мировую науку, ярче всего может быть охарактеризован словами, высеченными на его надгробном памятнике: «Создатель теории устойчивости движения, учения о фигурах равновесия вращающейся жидкости, методов качественной теории дифференциальных уравнений, автор центральной предельной теоремы теории вероятностей и других глубоких исследований в области механики и математического анализа».

Ляпунов родился 6 июня (25 мая) 1857 г. в Ярославле. Отец его был астрономом, работал в Казанском университете, а затем директором Демидовского лицея. Начальное образование Ляпунов получил у отца и (после его смерти) в семье своего дяди Р. М. Сеченова, брата известного физиолога И. М. Сеченова. В 1876 г. после окончания с золотой медалью гимназии в Нижнем Новгороде Ляпунов поступил на математическое отделение физико-математического факультета Петербургского университета. Профессоры университета П. Л. Чебышев, А. Н. Коркин и Е. И. Золотарев, а также К. А. Поссе и Д. К. Бобылев оказали сильное влияние на развитие яркого математического таланта Ляпунова. После окончания университета (1880 г.) по рекомендации Бобылева Ляпунов был оставлен при кафедре механики для подготовки к званию профессора. В 1885 г. он защитил магистерскую диссертацию «Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости», которая явилась результатом размышлений над задачей, сформулированной Чебышевым³⁹, и получив звание приват-доцента, в этом же году занял кафедру механики в Харьковском университете. Сначала много времени

³⁹ Эта задача состояла в следующем. Известно, что при некоторой величине угловой скорости эллипсоидальные фигуры перестают быть фигурами равновесия вращающейся жидкости. Не переходят ли они при этом в какие-либо новые фигуры равновесия, которые при малом увеличении угловой скорости мало отличались бы от эллипсоидов? Задачу Чебышева Ляпунову удалось решить лишь в последние годы жизни.



А. М. Ляпунов.

ему пришлось уделить подготовке курсов лекций, но уже с 1888 г. начинают появляться в печати его работы по теории устойчивости движения механических систем с конечным числом степеней свободы. В 1892 г. он публикует свою блестящую работу «Общая задача об устойчивости движения», которую в этом же году в Москве защищает как докторскую диссертацию. Оппонентами на защите были Н. Е. Жуковский и Б. К. Млодзеевский. К харьковскому периоду деятельности Ляпунова относятся также его научные исследования по теории потенциала и теории вероятностей, в которых он получил результаты первостепенного значения.

В Харьковском университете А. М. Ляпунову было присвоено звание ординарного профессора (1893 г). Он читал различные математические курсы: механику, математическую физику, теорию вероятностей и др. Блестящий лектор, раскрывавший перед своими слушателями горизонты вершин науки, Ляпунов снискал исключительное уважение студентов. С очень большой требовательностью он готовился к лекциям. Составленные им литографированные руководства и записки отличаются оригинальностью, высоким научным уровнем изложения материала,

а некоторые содержат новые факты, которых не было в других учебниках и руководствах ⁴⁰. Эти руководства и записки можно считать самостоятельными научно-методическими работами. Ляпунов занимался также общественной работой. В частности, он принимал активное участие в деятельности Харьковского математического общества (с 1891 по 1898 гг. — товарищ председателя, а в 1899—1902 гг. — председатель общества и редактор его «Сообщений»).

В конце XIX и начале XX в. имя А. М. Ляпунова как ученого приобретает мировую известность. В 1900 г. его избирают членом-корреспондентом, а в 1901 г. — ординарным академиком Российской академии наук по кафедре прикладной математики (эта кафедра оставалась вакантной после смерти П. Л. Чебышева). Весной 1902 г. он переезжает в Петербург. Оставив педагогическую работу, Ляпунов посвящает все свое время научным исследованиям. Он возвращается к той проблеме Чебышева, с которой начал свою научную деятельность, и, расширив ее постановку, довел решение до конца. Работы Ляпунова второго петербургского периода относятся в основном к теории фигур небесных тел, т. е. к вопросу о формах равновесия равномерно вращающейся жидкой массы, частицы которой взаимно притягиваются по закону Ньютона. В этот период он ведет постоянную переписку по научным вопросам с Пуанкаре, Пикаром, Корном, Коссера и другими видными зарубежными учеными. В 1908 г. принимает участие в IV Международном математическом конгрессе, проходившем в Риме. Заслуги Ляпунова получают широкое признание. Его избирают членом Академии наук в Риме, членом-корреспондентом Парижской академии наук, почетным членом Петербургского и Казанского университетов, Харьковского математического общества и членом ряда других научных обществ.

Летом 1917 г. в связи с обострением болезни жены Ляпунов вынужден был переехать в Одессу. Через год жена его скончалась, а через три дня (16 (3) ноября 1918 г.) трагически умер и Ляпунов.

Ближайший ученик П. Л. Чебышева, А. М. Ляпунов является выдающимся представителем петербургской математической школы. Предметом его исследований были большие и важные проблемы, а их решение он всегда проводил с безукоризненной математической строгостью.

3

Исследования А. М. Ляпунова по теории устойчивости движения

Общая задача об устойчивости движения сводится к исследованию систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = P_k(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

⁴⁰ См. Речь, произнесенная ближайшим учеником А. М. Ляпунова академиком В. А. Стекловым в публичном заседании Российской академии наук 3 мая 1919 г. — В кн.: А. М. Ляпунов. Работы по теории потенциала. ГИТТЛ, М.—Л., 1949.

где P_k при достаточно малых $x_k(t)$ разлагаются в сходящиеся ряды по целым положительным степеням x_k и обращаются в нуль, когда $x_k = 0$. Требуется выяснить, при каких условиях возможно выбрать для $t = 0$ достаточно малые значения $x_k(t)$ так, чтобы в последующем движении функции x_k оставались меньшими наперед заданных сколь угодно малых пределов.

Задача решается просто, если систему (1) возможно проинтегрировать. Однако почти во всех вопросах общей и особенно небесной механики эта интеграция заведомо невыполнима. Необходимо ответить на вопрос, не интегрируя систему (1).

Задача была поставлена творцом аналитической механики Лагранжем. Ее решали многие математики, начиная с самого Лагранжа, определившего устойчивость изолированного положения равновесия в случае минимума потенциальной энергии. Строгое и простое доказательство соответствующей теоремы дал Дирихле. Рауз установил критерии устойчивости для некоторых циклических систем, а также дал простое обобщение теоремы Лагранжа, позволяющее судить об устойчивости по экстремумам известных интегралов. Более широкое распространение получили приемы замены системы (1) системой, где при разложении функций P_k отбрасываются все члены, содержащие величины x_k в степенях выше первой. Такого рода «решениями по первому приближению» занимались Томсон, Тэт, Жуковский и др. Однако первым приближением, вообще говоря, вопрос не решается: движение, устойчивое в первом приближении, оказывается иногда неустойчивым в действительности. Использование дальнейших членов разложения не меняло существенно положения, ибо задача по-прежнему принципиально оставалась «другой».

Единственная попытка строгого решения вопроса устойчивости принадлежала Пуанкаре, но он ограничился лишь некоторыми простейшими случаями.

В работах А. М. Ляпунова исследованы на устойчивость дифференциальные уравнения возмущенного движения весьма общего вида. Со всей строгостью решен вопрос о том, в каких случаях метод первого приближения приводит к полному решению задачи. Исследован ряд сомнительных случаев, когда первое приближение не приводит к цели. Установлено существование периодических решений для некоторых случаев нелинейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Ляпунов рассматривал также уравнения с переменными коэффициентами, особенно подробно — уравнения с периодическими коэффициентами. Им впервые исследован общий случай системы линейных уравнений с переменными коэффициентами. Для такой системы он создал общую теорию характеристических чисел и на ее основе доказал существование асимптотических решений.

Первой работой Ляпунова в рассматриваемом цикле был мемуар «О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости» (1888 г.), последней — мемуар «Об одном ряде в теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффици-

ентами» (1902 г.). Основные результаты приведены в его докторской диссертации «Общая задача об устойчивости движения» ⁴¹.

Диссертация состоит из трех глав. Первая глава посвящена предварительному анализу. Пусть Q_k ($k = 1, 2, \dots, n$) — некоторые функции обобщенных координат, определяющих некоторую механическую систему, их производных по времени и самого времени; x_k — разность значений функций Q_k в любом возмущенном движении и в некотором определенном невозмущенном движении, для которого исследуется устойчивость по отношению к величинам Q_k . Таким образом, задача устойчивости сводится к исследованию устойчивости нулевого решения $x_1 = \dots = x_n = 0$ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = p_{k1}x_1 + \dots + p_{kn}x_n + X_k \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

Считается, что X_k можно представить с помощью степенных рядов

$$X_k = \sum P_k^{(m_1, \dots, m_n)} x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$$

по целым положительным степеням $x_1, \dots, x_n$, причем $m_1 + \dots + m_n \geq 2$. Коэффициенты этих разложений, как и коэффициенты p_{kl} , суть действительные, непрерывные и ограниченные функции $t \geq t_0$ и при $t \geq t_0$ имеет место оценка

$$|P_k^{(m_1, \dots, m_n)}| \leq \frac{M}{A^{m_1 + \dots + m_n}},$$

где M и A — постоянные, иными словами, при $t \geq t_0$ написанные ряды абсолютно сходятся, если только $|x_k| < A$.

Ляпунов дает следующее определение устойчивости невозмущенного движения. Для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\eta > 0$, что если начальные значения x_k^0 при $t = t_0$ величин x_k , определяемых системой (2), удовлетворяют неравенствам $|x_k^0| \leq \eta$, то при всяком $t > t_0$ выполняются неравенства $|x_k| \leq \varepsilon$ ($k = 1, \dots, n$). Если для какого-либо $\varepsilon > 0$ такого числа η нет, то невозмущенное движение неустойчиво.

Характеристическим числом любой функции $x(t)$, определенной при $t > t_0$, называется, по Ляпунову, действительное число λ , если для любого положительного α произведение $x(t) e^{(\lambda - \alpha)t}$ стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, а произведение $x(t) e^{(\lambda + \alpha)t}$ есть неограниченная по модулю функция при $t \rightarrow +\infty$. Если $x(t) e^{\mu t} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ в случае любого выбора действительного числа μ , то характеристическое число функции $x(t)$ равно $+\infty$, если же $x(t) e^{\mu t}$ для любого выбора μ есть неограниченная по модулю функция при $t \rightarrow$

⁴¹ Работы по теории устойчивости включены во второй том четырехтомного «Собрания сочинений» А. М. Ляпунова (Изд-во АН СССР, М.—Л., 1954—1959), за исключением первой из названных выше, а также мемуара «Об устойчивости движения в одном частном случае задачи трех тел», вошедших в первый том.

$\rightarrow +\infty$, то характеристическое число $x(t)$ считается равным $-\infty$. Характеристическим числом системы функций $x_k(t)$ ($k = 1, \dots, n$) называется наименьшее из характеристических чисел отдельных функций.

Ляпунов доказывает теоремы о характеристических числах суммы, произведения, частного и интеграла от функции. Рассматривает систему первого приближения

$$\frac{dx_k}{dt} = p_{k1}x_1 + \dots + p_{kn}x_n \quad (k = 1, \dots, n) \quad (3)$$

и доказывает, что всякое решение этой системы $x_1(t), \dots, x_n(t)$, отличное от нулевого, имеет конечное характеристическое число.

В диссертации Ляпунов вводит важные понятия правильной и приводимой систем. Систему (3) он называет правильной, если $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = -\mu$, где μ — характеристическое число функции

$$e^{-\int \sum_{k=1}^n p_{kk} dt},$$

а $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ — наибольшая сумма характеристических чисел системы n линейно независимых решений системы (3) при различном выборе последних. Эта сумма, как доказал Ляпунов, существует. Частным случаем правильных систем являются приводимые системы. Пусть имеется линейное преобразование функций $x_1, \dots, x_n$

$$z_k = q_{k1}x_1 + \dots + q_{kn}x_n \quad (k = 1, \dots, n), \quad (4)$$

причем все коэффициенты $q_{ki}(t)$ и их производные суть непрерывные и ограниченные функции при $t > t_0$ и величина, обратная определителю, составленному из $q_{ki}(t)$, есть также ограниченная функция t . Систему (3) Ляпунов называет приводимой, если ее можно привести к системе с постоянными коэффициентами для z_k при помощи преобразования указанного типа. Полученная система с постоянными коэффициентами имеет те же характеристические числа, что и приводимая система (3).

Результаты Ляпунова, относящиеся к решению вопроса об устойчивости по первому приближению, заключаются в следующем:

1. Если система (3) правильна и у любого ее решения характеристическое число положительно, то система (2) устойчива.

2. Если система (3) приводима и среди ее решений есть решения с отрицательным характеристическим числом, то система (2) устойчива.

При первом условии доказывалось также, что если начальные значения x_k^0 решения $x_1(t), \dots, x_n(t)$ системы (2) достаточно близки к нулю, то каждое $x_k(t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, или, как пишет Ляпунов, всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически к нему приближается.

В исследованиях по устойчивости Ляпунов применяет два мето-

да. Первый метод основан на интегрировании системы (2) в виде следующих рядов:

$$x_k(t) = \sum L_k^{(m_1, \dots, m_l)}(t) \alpha_1^{m_1} \dots \alpha_l^{m_l} e^{-(m_1 \lambda_1 + \dots + m_l \lambda_l) t} \quad (5)$$

$$(k = 1, \dots, n),$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ — характеристические числа ($l > n$) правильной системы (3); $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ — произвольные постоянные; $L_k^{(m_1, \dots, m_l)}$ — непрерывные функции от t , характеристические числа которых неотрицательны. Суммирование распространяется на все целые неотрицательные значения $m_1, \dots, m_l$, такие, что $m_1 + \dots + m_l > 0$. Доказывается, что если $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ по абсолютной величине достаточно близки к нулю, то ряды (5) абсолютно сходятся при $t \geq t_0$ и дают решение системы (2).

Широкую известность и применение получил второй метод Ляпунова. Ляпунов показал, что критерием устойчивости и неустойчивости системы (2) может быть некоторая функция V обобщенных координат и времени, не являющаяся интегралом этой системы (функция Ляпунова). Связь между функцией V и системой (2) выражается формулой

$$V' = \frac{\partial V}{\partial x_1} Y_1 + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_n} Y_n + \frac{\partial V}{\partial t}, \quad (6)$$

где V' — полная производная V , а Y_k — вся правая часть k -го уравнения системы (2). В этом и заключается в основных чертах второй метод. Построение функции V является основным моментом в работе Ляпунова при решении вопросов устойчивости в различных случаях.

Вторая глава диссертации посвящена подробному исследованию установившихся движений, т. е. тех случаев, когда коэффициенты p_{ki} и $p_k^{(m_1, \dots, m_n)}$ в системе (2) не зависят от t . В этом случае система (3) имеет определяющее уравнение

$$\begin{vmatrix} p_{11} - k & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} - k & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} - k \end{vmatrix} = 0 \quad (7)$$

и характеристические числа первого приближения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, о которых говорилось выше, равны действительным частям корней уравнения (7), взятым с обратным знаком. Таким образом, если действительные части всех корней уравнения (7) отрицательны, то невозмущенное движение устойчиво и всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически к нему стремится. Если же среди корней уравнения (7) есть хотя бы один корень с положительной действительной частью, то невозмущенное движение неустойчиво.

В первом приближении вопрос об устойчивости не решается, если среди корней уравнений (7) нет корней с положительными действительными частями, но есть корни, равные нулю или чисто мнимые. Такие случаи, особенно второй из них, являются существенно важными в приложениях к вопросам механики.

Большая часть второй главы посвящена исследованию двух сомнительных с точки зрения первого приближения случаев. Первый случай — уравнение (7) имеет один корень, равный нулю, а действительные части остальных корней отрицательны; второй — уравнение (7) допускает два сопряженных чисто мнимых корня $\pm \lambda_i$, а действительные части остальных корней отрицательны. Исследование устойчивости во втором случае и построение периодических решений некоторых систем дифференциальных уравнений, получающихся из системы (2) путем ее преобразования, представляет собой одно из замечательнейших достижений математического анализа. До настоящего времени ничего существенного не добавлено к тому, что было сделано Ляпуновым.

В последней, третьей, главе диссертации исследуется случай, когда все коэффициенты в правых частях системы (2) являются периодическими функциями одного и того же периода ω . Сначала рассматриваются линейные системы (3) с периодическими коэффициентами. Доказывается, что система (3) приводима в том случае, если коэффициенты $p_{ki}(t)$ имеют непрерывные производные, и что коэффициенты $q_{ik}(t)$ в линейном преобразовании (4), приводящем систему (3) к системе с постоянными коэффициентами, можно всегда выбрать действительными функциями с периодом ω или 2ω .

Если функции $x_{ik}(t), \dots, x_{nk}(t)$ ($k = 1, \dots, n$) — n линейно независимые решения системы (3), то функции $x_{ik}(t + \omega), \dots, x_{nk}(t + \omega)$ также являются решениями системы и поэтому линейно выражаются через решения $x_{ik}(t), \dots, x_{nk}(t)$:

$$x_{ik}(t + \omega) = a_{ik}x_{i1} + \dots + a_{nk}x_{in}(t) \quad (i = 1, \dots, n; k = 1, \dots, n).$$

Уравнение степени n относительно ρ

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \rho & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \rho \end{vmatrix} = 0 \quad (8)$$

называется характеристическим уравнением системы (3) относительно периода ω . Оно не зависит от выбора системы независимых решений $x_{ik}(t), \dots, x_{nk}(t)$ ($k = 1, \dots, n$). Всякому корню ρ уравнения (8) соответствует решение системы (3) в виде

$$x_1 = f_1(t) \rho^{t/\omega}, \dots, x_n = f_n(t) \rho^{t/\omega}, \quad (9)$$

где $f_k(t)$ — периодические функции с периодом ω . Кратному корню ρ кроме решения (9) могут соответствовать решения того же вида, в которых $f_k(t)$ определяются формулами

$$f_k(t) = \varphi_{k0}(t) + t\varphi_{k1}(t) + \dots + t^m\varphi_{km}(t), \quad (10)$$

где $\varphi_{ks}(t)$ — периодические функции периода ω . Всякому корню ρ кратности l соответствует l линейно независимых решений двух ука-

занных выше видов. Если $\rho_1, \dots, \rho_n$ — корни уравнения (8), то, определяя числа $\alpha_k = \frac{1}{\omega} \log \rho_k$, где берется какое-нибудь значение логарифмов, можно утверждать, что действительные части величин $-\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n$ являются характеристическими числами системы (3).

Большой раздел третьей главы посвящен приближенному построению характеристического уравнения (8) и его исследованию. Здесь рассмотрена также каноническая система линейных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dx_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \frac{dy_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x_k} \quad (k = 1, \dots, n),$$

где H — голоморфная функция переменных x_k, y_k ($k = 1, \dots, n$), причем совокупность членов с наименьшей степенью в разложении H представляет собой квадратичную форму этих переменных. Доказано, что соответствующее характеристическое уравнение является возвратным уравнением, следовательно, его корни распадаются на пары таких корней, произведение которых равно единице.

Далее Ляпунов исследует общую систему (2) уравнений возмущенного движения. Если характеристическое уравнение (8) линейной системы первого приближения имеет все корни с модулем, меньшим единицы, то невозмущенное движение устойчиво и всякое возмущенное движение, достаточно близкое к невозмущенному, асимптотически к нему стремится при $t \rightarrow \infty$. Если же уравнение (8) имеет хотя бы один корень с модулем, большим единицы, то невозмущенное движение неустойчиво. Сомнительными в отношении устойчивости по первому приближению являются те случаи, когда характеристическое уравнение системы первого приближения не имеет корней с модулем, большим единицы, но имеет корни с модулем, равным единице. Ляпунов рассматривает два сомнительных случая, аналогичных рассмотренным им во второй главе относительно установившихся движений. В одном случае характеристическое уравнение первого приближения, по предположению, имеет один корень, с модулем, равным единице, а остальные корни — с модулями, меньшими единицы. В другом случае это же уравнение имеет два сопряженных корня с модулем, равным единице, а остальные корни — с модулями, меньшими единицы.

Идеи, изложенные в докторской диссертации, Ляпунов развивает в дальнейших исследованиях. В «Исследовании одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения» (1893 г.) он рассматривает случай установившегося движения, когда система состоит из двух уравнений и определяющее квадратное уравнение первого приближения имеет двойной корень, равный нулю. Ляпунов предполагал (об этом указывается в предисловии) рассмотреть и общий случай, когда определяющее уравнение имеет двойной корень, равный нулю, а остальные корни с отрицательными действительными частями, — случай, как отмечалось, особенно трудный. Но ни в этой, ни в другой работе он не исследует его.

В небольшой статье «К вопросу об устойчивости движения» (1893 г.)

Ляпунов доказывает для случая установившегося движения, что при всяких коэффициентах p_{hi} первого приближения, при которых не решается вопрос об устойчивости, можно подобрать дополнительные члены X_h выше первого порядка так, чтобы движение было или неустойчивым, или устойчивым.

Исследованию уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)x = 0, \quad (11)$$

где $p(t)$ — действительная периодическая функция периода ω , посвящена большая работа «Об одном ряде в теории линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами» (1902 г.). Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0,$$

где постоянная A определяется рядом

$$A = 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi'_n(\omega) + \psi'_n(\omega)] (-1)^n, \quad (12)$$

в котором $\varphi_n(t)$ и $\psi_n(t)$ находятся с помощью формул

$$\varphi_n(t) = \int_0^t dt \int_0^t p(t) \varphi_{n-1}(t) dt, \quad \varphi_0(t) = 1,$$

$$\psi_n(t) = \int_0^t dt \int_0^t p(t) \psi_{n-1}(t) dt, \quad \psi_0(t) = t.$$

Ряд (12) исследуется в предположении, что $p(t) \geq 0$. Получена оценка $A^2 < 1$.

В мемуаре «Об одном вопросе, касающемся линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами» (1896 г.) Ляпунов находит оценку A при знакопеременной периодической функции $p(t)$ в уравнении (11). Основой исследования является преобразование уравнения (11) при помощи замены независимой переменной t и функции x таким образом, чтобы в полученном уравнении коэффициент p был знакопостоянным. Как и в предыдущей работе, при некоторых предположениях получена оценка $A^2 < 1$.

Наконец, в работе «Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах» (1889 г.) рассмотрена устойчивость для некоторой специальной системы линейных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Вычисляются две постоянные, аналогичные постоянной A .

Исследования А. М. Ляпунова по теории устойчивости получили широкое развитие в работах советских математиков А. А. Андропова, Н. Г. Четаева, И. Г. Малкина, В. В. Степанова, Н. Д. Моисеева, Г. Н. Дубошина, К. П. Персидского, Н. П. Еругина, И. З. Штокало, Г. В. Каменкова и др. Ими найдены новые методы решения и постановки задач.

Работы А. М. Ляпунова по теории фигур равновесия вращающейся жидкости

Исключительно большим по объему и сложным по применяемому математическому анализу является цикл работ ⁴² А. М. Ляпунова по теории фигур планет, т. е. теории фигур равновесия равномерно вращающейся вокруг некоторой оси жидкости, частицы которой взаимно притягиваются по закону Ньютона. Как отмечалось, Ляпунов посвятил этим исследованиям последние 15 лет своей жизни и получил весьма важные результаты.

Рассмотрим историю вопроса. Ньютон показал, что с помощью открытого им закона всемирной гравитации можно решить вопрос не только о движении небесных тел, но и об их форме. Он высказал гипотезу, что фигурой планеты, в том числе и Земли, является эллипсоид вращения, сжатый вдоль оси вращения в противоположность гипотезе Кассини, утверждавшего вытянутость такого эллипсоида. Гипотезу Ньютона впервые строго доказал Маклорен, и с тех пор эллипсоид вращения, как одна из возможных фигур равновесия однородной вращающейся жидкости, называется эллипсоидом Маклорена. В 1834 г. Якоби доказал, что фигурами такого равновесия могут быть и трехосные эллипсоиды с определенными соотношениями длин их полуосей (эллипсоиды Якоби). А в 1874 г. С. В. Ковалевская обнаружила кольцеобразную фигуру равновесия. Пуанкаре ⁴³ охватил рассмотрение проблемы о фигурах равновесия вращающейся однородной жидкости единым анализом и кроме известных фигур равновесия получил ряд новых. Новыми являются некоторые деформированные эллипсоиды Якоби и знаменитые грушевидные фигуры, натолкнувшие английского астронома Д. Дарвина на построение новой космогонической гипотезы.

Первая работа по теории фигур неоднородной медленно вращающейся жидкости принадлежит Клеро ⁴⁴. В основе его теории лежит допущение, что неоднородная жидкость состоит из слоев разной плотности, а поверхности этих слоев являются поверхностями эллипсоидов вращения. Метод Клеро приближенный, поэтому он не давал возможности применить процесс последовательных приближений для получения точного решения. Значительные исследования провел Лаплас ⁴⁵. Ему принадлежат два метода решения задачи о фигурах равновесия жидкости. Как и метод Клеро, первый метод Лапласа не давал возможности продвинуться дальше первого приближения. Вторым методом, основанным на разложении в ряд по сферическим функциям, не

⁴² Работы Ляпунова о фигурах равновесия вращающейся жидкости включены в третий и четвертый тома «Собрания сочинений».

⁴³ H. Poincaré. Sur l'équilibre d'une masse fluide, animée d'un mouvement de rotation.— Acta math., 1855, t. 7.

⁴⁴ А. Клеро. Теория фигуры земли, основанная на началах гидростатики. Пер. с фр. Изд-во АН СССР, М., 1947.

⁴⁵ P. S. Laplace. Traité de mécanique céleste, 1878, t. 2, l. 3, ch. 2, 4; t. 5, l. 11, ch. 2.

имел этого недостатка, но в нем оставались необоснованными вопросы сходимости.

До Ляпунова не было строгой теории рассматриваемой проблемы. Такую теорию создал Ляпунов. Ей посвящены две его работы: «Изыскания в теории фигур небесных тел» (1903 г.) и «Об уравнении Клеро и более общих уравнениях в теории фигур планет» (1904 г.). В первой работе доказывается существование фигур равновесия, близких к сфере, в случае неоднородной жидкости, достаточно медленно вращающейся вокруг оси. Для доказательства берется любой закон распределения плотности (поверхности одинаковой плотности близки к сферам) при единственном предположении, что плотность возрастает с глубиной и остается ограниченной. Задача сводится к решению системы некоторых интегро-дифференциальных уравнений, первое из которых представляет собой уравнение Клеро. Таким образом, у Ляпунова теория Клеро является первым приближением полной и строгой теории.

Интегро-дифференциальные уравнения исследуются и во второй работе. В ней доказано, что каждое из упомянутых уравнений имеет одно определенное решение, подчиняющееся некоторому естественному условию. Здесь Ляпунов вводит обобщенное понятие интеграла в направлении интеграла Стильтеса и рассматривает обобщенное уравнение Клеро в терминах этого интеграла, расширяя тем самым предположения об искомой функции.

Несколько работ А. М. Ляпунова посвящено более трудной задаче — строгому доказательству существования новых фигур равновесия, близких к эллипсоидальным, в случае вращающейся однородной жидкости. Общие указания о методе решения этой задачи и сводка полученных результатов даны в работе «Об одной задаче Чебышева» (1905 г.). Метод Ляпунова заключается в следующем: разложение ньютонова потенциала; применение процесса последовательных приближений путем разложения искомого решения по некоторому малому параметру; доказательство сходимости этого процесса при помощи построения мажорантного ряда. В более поздних его исследованиях угловая скорость уже не является малой и роль малого параметра играет совершенно иная величина.

Решение задачи детально изложено в большой работе «О фигурах равновесия однородной вращающейся жидкости, мало отличающихся от эллипсоидальных», состоящей из четырех частей (1906, 1909, 1912, 1914 гг.). В первой части составляются основные уравнения задачи и в теоретически законченном виде дается метод решения этих уравнений, позволяющий не только доказать существование новых фигур равновесия, но и определить их с любой степенью точности. Число эллипсоидов в зависимости от угловой скорости вращения ω определяется следующим образом. Существует два таких значения $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_2$ ($\omega_1 < \omega_2$), что при условии $0 < \omega < \omega_1$ имеются три эллипсоидальные фигуры равновесия — два эллипсоида Маклорена и один эллипсоид Якоби, а при $\omega_1 \leq \omega < \omega_2$ — лишь два эллипсоида Маклорена. В случае $\omega = 0$ (состояние покоя) фигурой равновесия является сфера. При $\omega = \omega_1$ эллипсоид Якоби переходит в эллипсоид вращения, а при $\omega = \omega_2$

два эллипсоида Маклорена сливаются в один. В случае $\omega > \omega_2$ эллипсоидальных фигур равновесия не существует. Пусть S — момент инерции жидкости относительно оси вращения и $I = S\omega$ — момент количества движения относительно этой же оси. (Как изменяются эллипсоидальные фигуры равновесия при изменении I от нуля до бесконечности, показано в лекции Ляпунова «О форме небесных тел». Здесь же указана форма вырождения эллипсоидов при $\omega \rightarrow 0$.)

Из эллипсоидов Маклорена и Якоби только некоторые способны порождать близкие к ним фигуры равновесия, отличные от эллипсоидальных. В первой части подробно исследуется трансцендентное уравнение, которым определяются эти «эллипсоиды бифуркации», указываются некоторые свойства симметрии фигур равновесия. Таким образом, первая часть рассматриваемой работы Ляпунова представляет собой законченное целое. Она в одинаковой мере относится к фигурам равновесия обоих видов, близким как к эллипсоидам Маклорена, так и к эллипсоидам Якоби.

Во второй части работы детально вычисляются последовательные приближения, которыми определяются новые фигуры равновесия, близкие к эллипсоидам Маклорена, и исследуется величина угловой скорости вращения и момента количества движения для новых фигур.

В третьей части рассматриваются последние два вопроса для фигур равновесия, близких к эллипсоидам Якоби, и определяется их устойчивость.

В четвертой части Ляпунов возвращается к основным уравнениям задачи, причем несколько иначе, чем в первой части, вводит основную функцию ζ полярных углов Θ и ψ , которая характеризует отклонение поверхности фигуры равновесия от эллипсоидальной формы. В процессе вычисления это приводит к формулам, отличным от формул первой части работы. Таким образом, Ляпунов дает новый метод разыскания фигур равновесия. Функция ζ представляется в виде бесконечного ряда, и с помощью этого метода устанавливается форма зависимости каждого члена ряда от θ и ψ . Результаты применения нового метода связываются с формулами, использованными в первой части.

К четвертой части непосредственно примыкает работа «Об уравнениях, которые принадлежат к поверхностям фигур равновесия однородной вращающейся жидкости, близких к эллипсоидальным» (1916 г.). В ней Ляпунов подробно исследует бесконечный ряд, которым определяется функция ζ , преобразуя его к новому виду и таким путем устанавливая вид уравнений в координатах x, y, z , определяющих поверхности новых фигур равновесия.

Исследовав фигуры равновесия однородной жидкости, близкие к эллипсоидальным, Ляпунов перешел к задаче об отыскании фигур равновесия слабонеоднородной жидкости, близких к эллипсоидам Маклорена и Якоби. Эту огромную работу он начал примерно в 1915 г. После смерти Ляпунова осталась большая рукопись «О некоторых фигурах равновесия неоднородной вращающейся жидкости», содержащая решение указанной задачи. В ней доказано, что всякий эллипсоид Маклорена или Якоби, отличный от эллипсоида бифуркации, порожд-

дает ряд новых фигур равновесия, близких к нему по форме, со слабой неоднородностью в плотности и с той же угловой скоростью вращения, что и у исходного эллипсоида. Если принять плотность исходного эллипсоида за единицу, то плотность ρ новой фигуры равновесия принимает вид $\rho = 1 + \varepsilon \varphi(a)$, где ε — малый параметр и $\varphi(a)$ — заданная функция величины a , которая характеризует поверхности уровня плотности внутри жидкости.

Основная функция ζ , характеризующая отклонение внешней и внутренних поверхностей уровня от эллипсоидов, является функцией θ , ψ и a . Она ищется в виде ряда по целым положительным степеням ε без свободного члена. Преодолевая большие трудности, Ляпунов исследовал три первых члена этого ряда для ζ и при некоторых предположениях относительно $\varphi(a)$ показал, какова форма зависимости любого члена ряда от θ , ψ и a . Он применил этот метод к случаю однородной жидкости и таким образом пришел еще к одному методу исследования фигур равновесия однородной жидкости.

Исключительной по силе является последняя работа Ляпунова о фигурах равновесия — «Новые рассматривания в теории фигур равновесия, близких к эллипсоидальным в случае однородной жидкости» (1916 г.). В ней применяются самые разнообразные средства математического анализа. Как и в других работах, Ляпунов кроме строго доказанной теоремы существования дает алгоритм построения уравнений новых фигур равновесия и исследует структуру получающихся при этом приближений. Два результата, использованные в последней работе, изложены Ляпуновым в статьях «О полиномиальных рядах» (1915 г.) и «Об одной формуле анализа» (1917 г.). В первой из них исследуется бесконечный ряд с общим членом $P_n(x_1, \dots, x_k) \alpha^n$, где P_n — полином степени не выше n , α — параметр ($|\alpha| < 1$). При этом $|P_n|$ не превышает некоторого числа, не зависящего от n , если каждое x_i ($i = 1, \dots, k$) принадлежит промежутку $[-1, +1]$. Во второй статье рассматривается потенциал простого слоя на эллипсоиде и его разложение по сферическим функциям.

Магистерская диссертация А. М. Ляпунова «Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости» (1884 г.), большой его мемуар «Задача минимума в вопросе устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости» (1908 г.), а также третья часть рассмотренной выше основной работы «О фигурах равновесия ...» посвящены вопросам устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости. В последней работе, как упоминалось, рассматривался вопрос об устойчивости некоторых эллипсоидов Якоби и новых фигур равновесия, близких к эллипсоидальным. Остановимся более подробно на первых двух работах.

До Ляпунова вопросом устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости занимались Лиувилль и Риман. Они решали задачу при специальных предположениях о возмущениях. При общих предположениях о возмущениях Риман рассматривал лишь вопрос о неустойчивости некоторых эллипсоидов Маклорена. Когда Ляпунов уже

готовил к печати свою магистерскую диссертацию, вышла книга Томсона и Тэта ⁴⁶, в которой упоминалось об устойчивости фигур равновесия. В качестве основы своих исследований Томсон и Тэт формулируют некоторый вариационный принцип, по которому можно судить об устойчивости или неустойчивости. Этот принцип Ляпунов положил в основу своей диссертации.

Основной и принципиальной частью диссертации является попытка точного определения (впервые) устойчивости равновесия вращающейся жидкости и приведение поставленной задачи к чисто математической задаче о минимуме некоторого выражения. Ляпунов определяет устойчивую форму равновесия как такую, для которой «после сообщения движению жидкости достаточно малых возмущений форма жидкости остается на сколько угодно мало отличающейся от этой формы равновесия, по крайней мере до тех пор, пока на поверхности жидкости не образуется сколько угодно тонких нитеобразных или листообразных выступов». Оговорка об этих выступах связана с их размером и объемом: они могут быть большими по размерам, но малыми по объему, а значит, и нести на себе малые порции энергии.

Трудность задачи состояла в том, что нельзя было переносить на случай сплошной среды известный критерий устойчивости Лагранжа для систем с конечным числом степеней свободы (минимум потенциальной энергии). Ляпунов вносит ясность и строгость в решение этой сложной задачи. По его мнению, все должно быть основано на точном определении понятия устойчивости для случая сплошной среды и доказательстве основного вариационного принципа, базирующемся на данном определении; никакие аналогии со случаем конечного числа степеней свободы недопустимы. К сожалению, и до настоящего времени эти идеи Ляпунова недостаточно оценены и не нашли полного отражения в современной литературе.

Рассмотрим величину Π , выражающуюся формулой

$$\Pi = \frac{M}{S} - \frac{1}{2\pi} \iint \frac{d\tau d\tau'}{r},$$

где M — заданная положительная постоянная; S — момент инерции жидкости относительно оси вращения исследуемой фигуры равновесия; $d\tau$ и $d\tau'$ — элементы объема, расстояние между которыми r , а каждое интегрирование которых выполняется по полному объему, занимаемому жидкостью. Постоянная M связана с моментом I количества движения жидкости относительно оси вращения формулой

$$M = \frac{I^2}{2\pi k \rho^3},$$

где k — множитель в законе всемирного тяготения; ρ — плотность жидкости. Угловая скорость ω выражается формулой

$$\omega = \frac{\sqrt{2\pi k \rho M}}{S}.$$

⁴⁶ W. Thomson and P. Tait. Treatise on natural philosophy. Cambridge, 1883.

Считается, что жидкость несжимаема и однородна, и предполагается, что при сравнении величины Π для фигуры равновесия и близкой к ней фигуры центры тяжести этих фигур совпадают.

Принцип Томсона и Тэта, из которого исходит Ляпунов, состоит в следующем: необходимо установить, соответствует ли движению фигуры равновесия минимум полной энергии в предположении, что это движение сравнивается с другими движениями, происходящими под действием тех же сил взаимного притяжения и при неизменной величине момента количества движения относительно центра тяжести. Ляпунов показал, что для несжимаемой однородной жидкости этот вопрос равносильен вопросу о минимуме величины Π . Его основной теоремой определяется устойчивость всякой фигуры равновесия, для которой при известных условиях величина Π имеет минимальное значение.

В мемуаре «Задача минимума в вопросе устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости» Ляпунов улучшает результаты магистерской диссертации и изучает вопрос о связи минимума величины Π с устойчивостью, но устанавливает эту связь, не применяя принцип Томсона и Тэта, а непосредственно используя закон сохранения энергии. Существенным дополнением к диссертации является исследование особых случаев, когда рассмотрение второй вариации не дает решения вопроса о минимуме величины Π . В работе исследуется вопрос об устойчивости близких к эллипсоидальным новым фигур равновесия, которые были построены Ляпуновым ранее, доказываемая неустойчивость грушевидных фигур Пуанкаре. Последний результат Ляпунова находился в явном противоречии с исследованиями астронома Д. Дарвина, строившего свою космогоническую гипотезу именно на основании устойчивости таких фигур. В одной из глав доказано свойство замкнутости сферических функций. Большую часть работы, как и магистерской диссертации, занимало математическое исследование вариации Π . В заключении Ляпунов ставит следующий вопрос: можно ли утверждать, что фигура равновесия вращающейся жидкой массы неустойчива, если для нее величина Π не имеет минимума. Он полагает, что в случае идеальной жидкости такое утверждение неправильно.

5

Работы А. М. Ляпунова по теории потенциала, теории вероятностей и другие

В научном наследии А. М. Ляпунова видное место занимают также работы по математической теории потенциала, посвященные главным образом решению краевых задач для уравнения Лапласа и изучению свойств потенциалов. Вместе с работами Карла Неймана, Пуанкаре, Стеклова и других математиков эти исследования Ляпунова являются основными трудами в развитии теории потенциала в конце XIX — начале XX в. Полные глубоких оригинальных идей они влияли и еще продолжают влиять на развитие других разделов математической физики. Всего за период 1886—1902 гг. в «Comptes

rendus» Парижской академии наук, в журнале Лиувилля «Journal de mathematiques» и в «Сообщениях Харьковского математического общества» Ляпуновым было опубликовано семь работ по теории потенциала. В настоящее время они переведены на русский язык, изданы отдельной книгой, а также включены в его «Собрание сочинений»⁴⁷.

Две работы посвящены проблеме притяжения. В первой из них — «О теле наибольшего потенциала» (1886 г.) — рассматривается выражение

$$\Pi = \iint \frac{d\tau d\tau'}{r},$$

где каждый из интегралов распространен на некоторую ограниченную трехмерную область. Доказывается, что если допустить существование области, для которой выражение Π при заданной мере достигает своего наибольшего значения, то эта область является шаром. Во второй статье «Некоторое обобщение формулы Лежен-Дирихле...» (1886 г.) обобщается формула Дирихле для внутреннего ньютоновского потенциала однородного трехосного эллипсоида на случай, когда закон взаимного притяжения материальных точек выражается произвольной функцией расстояния между ними.

Большим достижением Ляпунова было строгое обоснование существовавших в то время методов решения краевых задач для уравнения Лапласа (методы Грина, К. Неймана, Робэна). Все они базировались на необоснованных утверждениях о существовании предельных значений нормальной производной на границе рассматриваемой области как от искомых функций, так и от используемых вспомогательных функций-потенциалов и функции Грина. Ляпунов впервые с безупречной математической строгостью решил краевые задачи теории потенциала для широкого класса областей, ограниченных поверхностями Ляпунова. Кроме того, для таких поверхностей он установил новые утверждения, имеющие самостоятельное значение, например теорему о равенстве предельных значений нормальной производной от потенциала двойного слоя.

Обоснованию методов Грина и Робэна посвящен большой мемуар «О некоторых вопросах, относящихся к проблеме Дирихле» (1898 г.), состоящий из трех глав. Первая глава носит вспомогательный характер. В ней дано определение замкнутых поверхностей Ляпунова⁴⁸, а также с помощью полученных неравенств, характеризующих эти поверхности, доказаны теоремы о свойствах потенциала простого слоя и его нормальной производной.

Во второй главе решена основная проблема электростатики о распределении электрических зарядов на границах изолированных предварительно заряженных электричеством проводников при условии, что

⁴⁷ А. М. Л я п у н о в. Работы по теории потенциала. ГИТТЛ, М.—Л., 1949; А. М. Л я п у н о в. Собр. соч., Т. I.

⁴⁸ См., например, в кн.: Л. Н. С р е т е н с к и й. Теория ньютоновского потенциала. ГИТТЛ, М.—Л., 1946, гл. I, § 7.

границы этих проводников — поверхности Ляпунова. Известно ⁴⁹, что эта проблема является частным случаем первой краевой задачи теории потенциала. Для случая выпуклых поверхностей она была решена в 1887 г. Робэном ⁵⁰. Он показал, что искомое решение, т. е. непрерывная плотность ρ уровня слоя на поверхности S проводника, удовлетворяет интегральному уравнению

$$\rho(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \frac{\rho(P') \cos \varphi}{r^2} d\sigma, \quad (13)$$

где r — расстояние PP' , φ — угол, образованный направлением $P'P$ и направлением внешней нормали к S в точке P . Ляпунов доказывает существование решения уравнения (13) при добавочном условии

$$\int_{(S)} \rho(P') d\sigma = M, \quad (14)$$

где M — общее количество электричества, которым заряжен проводник. На поверхности S он строит последовательность функций $v_0, v_1, v_2, \dots, v_k, \dots$, определяемых формулами

$$\left. \begin{aligned} v_0(P) &= \int_{(S)} \frac{\rho_0(P') d\sigma}{r}, \\ v_k(P) &= \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \frac{v_{k-1}(P') \cos \varphi}{r^2} d\sigma \quad (k = 1, 2, \dots), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где ρ_0 — произвольная непрерывная функция, заданная на поверхности и удовлетворяющая равенству (14) и условию Липшица. Внутри поверхности S строится последовательность потенциалов простых слоев

$$V_k(P) = \int_{(S)} \frac{\rho_k(P') d\sigma}{r} \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

как решений первой краевой задачи для уравнения Лапласа при граничных функциях на поверхности S , соответственно равных членам последовательности (15). Плотности ρ_k связаны соотношениями

$$\rho_k(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \frac{\rho_{k-1}(P') \cos \varphi}{r^2} d\sigma \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (16)$$

Ляпунов доказал равномерную сходимость последовательности (16), к предельной функции ρ , которая и является искомым решением основной проблемы электростатики. То, что ρ удовлетворяет уравнению (13) при условии (14), следует из равномерной сходимости $\rho_k \rightarrow \rho$, а единственность ρ он доказывает отдельно.

В третьей главе мемуара рассматриваются внутренняя и внешняя первые краевые задачи для уравнения Лапласа в общем случае, а также

⁴⁹ См., например, кн.: Н. И. И д е л ь с о н. Теория потенциала и ее приложения к вопросам геофизики. ГТТИ, М.—Л., 1932, стр. 123—125.

⁵⁰ G. R o b i n. Distribution de l'électricité sur une surface fermée convexe.— Comptes rendns... de l'Acad. sci. de Paris, 1887, t. 104, p. 1834—1836.

обосновывается метод Грина в случае областей, ограниченных поверхностями Ляпунова S . Вначале решается вопрос о существовании предельных значений на поверхности S нормальной и обыкновенных частных производных от искомой гармонической функции (решения первой краевой задачи). Если у некоторой функции v , определенной внутри или вне поверхности S , нормальная производная равномерно для всех точек поверхности стремится к пределу, то функция имеет правильную нормальную производную на этой поверхности. Доказаны следующие утверждения.

1. Пусть W — потенциал двойного слоя на поверхности S с непрерывной плотностью f и $\left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_i, \left(\frac{\partial W}{\partial n}\right)_e$ — предельные значения его нормальных производных, взятых соответственно изнутри и извне поверхности. Если существует и является правильной одна из указанных производных, то таким же свойством обладает и другая производная и эти производные равны.

2. Для того чтобы гармоническая внутри или вне поверхности S функция V , равная на поверхности S непрерывной функции f , допускала правильную нормальную производную на этой поверхности, необходимо и достаточно, чтобы потенциал двойного слоя W с плотностью f обладал этим же свойством.

С помощью этих двух результатов Ляпунов доказал существование предельных значений нормальной и обыкновенных частных производных от функции Грина, т. е. то, чего не сделал ни сам Грин, ни его последователи. Это дало ему возможность впервые математически строго вывести основную формулу, выражающую искомое решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа посредством функции Грина.

В работе «О потенциале двойного слоя» (1899 г.) получено достаточное условие существования и равенства предельных значений нормальной производной потенциала двойного слоя. Какая-либо точка P_0 поверхности Ляпунова S принимается за полюс полярных координат в касательной плоскости к поверхности S в этой точке. Функция f в точках P поверхности S , расстояние которых от P_0 не превосходит числа α , входящего в определение поверхности S , рассматривается как функция полярных координат ρ, ψ проекций P на указанную касательную плоскость. Вводятся обозначения

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f d\psi = \bar{f};$$

f_0 — значение f в точке P_0 . При этом для существования правильных нормальных производных у потенциала W достаточно существование таких двух положительных чисел b и β , не зависящих от ρ и от положения точки P_0 , чтобы при всех достаточно малых ρ выполнялось неравенство

$$|\bar{f} - f| < b\rho^{\beta+1}$$

(Ляпунов считает число α в неравенстве $\vartheta < ar^\alpha$, входящем в определение поверхности S , равным единице).

Рассмотрим еще одну работу Ляпунова, относящуюся к теории потенциала — «К основному принципу метода Неймана в задаче Дирихле» (1902 г.). В ней показано, что если метод Неймана для решения первой краевой задачи теории потенциала применим при условии, что граничная функция $f(M)$ представляет собой предельные значения потенциала простого слоя с непрерывной плотностью, то он применим также и в предположении, что функция $f(M)$ ограничена и интегрируема на рассматриваемой границе области. Основой этого результата является доказанная в этой же работе важная и сама по себе теорема о потенциале двойного слоя: прямое значение потенциала двойного слоя (т. е. значение соответствующего интеграла в точках самой поверхности) с непрерывной плотностью удовлетворяет условию Липшица с любым показателем, меньшим единицы.

Теории вероятностей посвящены два мемуара «Об одной теореме теории вероятностей» (1900 г.) и «Новая форма теоремы о пределе вероятности» (1901 г.)⁵¹. Они представляют собой две части одного исследования (написаны в Харькове в течение одного года, когда Ляпунов читал в университете курс теории вероятностей) и в развитии теории вероятностей сыграли большую роль.

В конце XIX в. в теории вероятностей возникла важная задача о приложимости предельной теоремы Лапласа к сумме случайных и независимых величин x_i при возможно более широких условиях. П. Л. Чебышев впервые указал метод (метод моментов) для решения поставленной задачи при единственном предположении, что каждое из слагаемых имеет конечные моменты, т. е. м. о. $|x_i|^p = d_i^{(p)} < \infty$ для любой целой положительной степени p . Несколько уточнив рассуждения Чебышева, А. А. Марков (1898 г.) доказал предельную теорему в следующем виде: пределом вероятности неравенств

$$z_1 < \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{\sqrt{2(a_1 + \dots + a_n)}} < z_2$$

является

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-z^2} dz,$$

если для всех целых значений $p > 2$ отношение

$$\frac{d_1^{(p)} + d_2^{(p)} + \dots + d_n^{(p)}}{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^{\frac{1}{2}p}} = M_n^{(p)}$$

стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Теорема Чебышева — Маркова, далеко превосходящая по своей общности все, что было известно раньше, охватывает, в частности,

⁵¹ А. М. Л я п у н о в. Собр. соч. Т. I.

обычный в статистике случай, когда все $|x_i|$ ограничены ($|x_i| \leq L$) и $(a_1 + \dots + a_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, так как тогда $d_i^{(p)} \leq a_i L^{p-2}$ и, следовательно,

$$M_n^{(p)} \leq \frac{L^{p-2} (a_1 + \dots + a_n)}{(a_1 + \dots + a_n)^{\frac{1}{2^p}}} = \frac{L^{p-2}}{(a_1 + \dots + a_n)^{\frac{1}{2^{(p-2)}}}} \rightarrow 0$$

$(p > 2).$

Преимущество теоремы Ляпунова заключается в том, что он требует существования хотя бы одного значения $p = 2 + \delta$ ($\delta > 0$) (где p может и не быть целым числом), для которого $d_i^{(2+\delta)} < \infty$. В формулировке Ляпунова, что особенно важно, бесконечное число условий Маркова $M_n^{(p)} \rightarrow 0$ при всех целых $p > 2$ заменяется единственным условием, соответствующим лишь одному какому-нибудь значению $\delta > 0$. Этот классический результат Ляпунов получил не сразу. В первой работе он ограничился случаем $\delta = 1$, т. е. $p = 3$, но ему еще не удалось заменить все условия Маркова единственным условием $M_n^{(3)} \rightarrow 0$. В последовательном преодолении трудностей Ляпунов был вынужден сначала внести дополнительное ограничение, что все математические ожидания $|x_i|^3$ равномерно ограничены, т. е. м. о. $|x_i|^3 = d_i^{(3)} \leq L^3$, и вместо условия $M_n^{(3)} \rightarrow 0$ он потребовал соблюдения более стеснительного условия

$$\frac{n^{\frac{2}{3}} L^2}{a_1 + \dots + a_n} \rightarrow 0.$$

В другой заметке, опубликованной в 1901 г. под таким же названием, Ляпунов доказывает эту теорему, уже обобщенную в том отношении, что вместо $\delta = 1$ он полагает $0 < \delta \leq 1$, т. е. в сущности любое $\delta > 0$. Доказательство своей предельной теоремы Ляпунов проводит совершенно новым методом, получившим название метода характеристических функций. Этот метод впоследствии стал основным в теории вероятностей. Ляпунов показал, что полученная им верхняя грань погрешности предельной формулы, выведенная при частном предположении, что каждая из случайных величин x_i может получить любое конечное число значений, остается в силе и в самом общем случае. Оценка этой погрешности, проведенная Ляпуновым с непревзойденным мастерством, не может быть существенно улучшена.

Вскоре после открытия Ляпунова А. А. Марков с помощью простого замечания вновь получил этот результат. С. Н. Бернштейн в 1926 г. заменил достаточное условие Ляпунова еще немного более общим условием, в котором отдельные слагаемые x_i могут даже не иметь конечных дисперсий и которое является не только достаточным, но в известном смысле также необходимым для предельной применимости нормального закона к сумме независимых величин.

Кроме рассмотренных, Ляпунову принадлежат и другие работы. Одна из них — «О равновесии тяжелых тел в тяжелых жидкостях, содержащихся в сосуде определенной формы» (1881 г.), — за которую он получил в Петербургском университете золотую медаль, посвящена исследованию влияния сосуда, содержащего несколько жидкостей, на равновесие погруженного в него твердого тела. Жидкости предполагаются однородными и несжимаемыми. Доказано существование потенциала гидростатического давления на погруженное тело, исследовано равновесие и устойчивость равновесия этого тела, установлены необходимые и достаточные условия равновесия. Другая работа также студенческая, — «О потенциале гидростатических давлений» (1881 г.) — является продолжением первой. В ней рассмотрен вопрос о существовании потенциала гидростатического давления для случая сжимаемых жидкостей и деформируемого тела. В работе «Новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкостях» (1893 г.) исследуется новый случай определения четвертого интеграла, отличный от трех известных интегралов Кирхгофа. Статья «Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку» (1894 г.) посвящена доказательству следующего утверждения: кроме случаев Эйлера, Лагранжа и Ковалевской, всегда существуют такие действительные начальные значения $p_0, q_0, r_0, \xi_0, \eta_0, \zeta_0$ ($\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2 = 1$), при которых среди функций $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$, являющихся решением соответствующей системы дифференциальных уравнений, есть многозначные функции времени t . И наконец, в работе «О рядах, предложенных Хиллом для представления движения Луны» (1896 г.) впервые доказывается сходимость рядов, при помощи которых Хилл проинтегрировал дифференциальные уравнения движения Луны. Ляпунов исходит из системы дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2 p}{d\tau^2} + 2(1+m)i \frac{\partial p}{\partial \tau} - \frac{3}{2}l(p+q) = \frac{3}{2}\lambda(q-1)e^{-2\tau i} + lR_p,$$

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} - 2(1+m)i \frac{\partial q}{\partial \tau} - \frac{3}{2}l(p+q) = \frac{3}{2}\lambda(p-1)e^{+2\tau i} + lR_q,$$

где

$$(1-p)^{-\frac{1}{2}}(1-q)^{-\frac{3}{2}} = 1 + \frac{1}{2}p + \frac{3}{2}q + R_p, \quad l = 1 + 2m + \frac{3}{2}m^2,$$

$$(1-p)^{-\frac{3}{2}}(1-q)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{3}{2}p + \frac{1}{2}q + R_q, \quad \lambda = m^2.$$

Постоянная λ считается параметром и периодическое решение этой системы ищется в виде

$$p = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \lambda^k, \quad q = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \lambda^k,$$

где p_k и q_k не зависят от λ , имеют период 2π и равны между собой при $\tau = 0$. При этом p_k и q_k определяются единственным путем и доказы-

вается сходимость построенных рядов при условии $m \leq \frac{1}{7}$ (в теории Луны $m = \frac{1}{12}$). Оказывается, что построенное решение имеет период λ .

Научные исследования А. М. Ляпунова являются огромным вкладом в мировую математику, математическую физику и механику. Они открыли новый этап в развитии нашей отечественной науки и послужили отправным началом в решении многих важных и сложных проблем для выдающихся его последователей.

6

В. А. Стеклов. Жизненный путь, педагогическая и общественная деятельность

Владимир Андреевич Стеклов родился 9 января 1863 г. (28 декабря 1862 г.) в Нижнем Новгороде. Получив начальное образование у своего отца, преподавателя духовной семинарии, он в 1874 г. поступил в Нижегородский Александровский институт, где увлекся математикой и физикой. В 1882 г. Стеклов поступил на физико-математический факультет Московского университета, а в следующем году перешел в Харьковский университет. В 1887 г. успешно окончил университет, был оставлен для подготовки к профессорскому званию и назначен ассистентом кафедры механики. С 1891 г. он приват-доцент, а с 1896 г. — экстраординарный профессор этого же университета.

Учителем и научным руководителем В. А. Стеклова был А. М. Ляпунов. Это в значительной степени определило проблематику научных исследований талантливого ученика, в частности его диссертаций: магистерской — «О движении твердого тела в жидкости» (1893 г.) и докторской — «Общие методы решения задач математической физики» (1902 г.). Всего же из общего количества (около 130) научных работ Стеклова почти 70 было подготовлено им в харьковский период деятельности. Наряду с научной и педагогической деятельностью в этот период он занимался также организаторской и общественной работой. С 1902 по 1906 г. был председателем Харьковского математического общества, в 1905—1906 гг. — деканом физико-математического факультета.

В 1906 г. Стеклов занял кафедру математики в Петербургском университете (после ухода в отставку А. А. Маркова). В Петербурге он работал до конца своей жизни. Здесь сначала в университете, а затем и в Академии наук он воспитал многих учеников, ставших впоследствии крупными учеными, создал свою школу математической физики. За научные заслуги его уже в 1903 г. избирают членом-корреспондентом, в 1910 г. — адъюнктом, а через два года — ординарным академиком Российской академии наук.

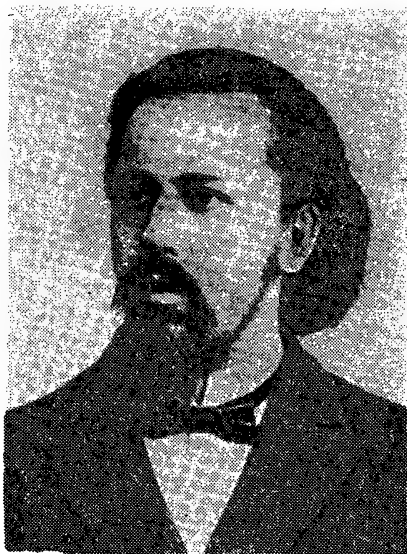
Кроме научной деятельности, В. А. Стеклов вел большую педагогическую работу: читал различные курсы, главным образом по механике и математической физике. Его лекции всегда отличались

глубиной мысли, безукоризненной строгостью и в то же время доступностью изложения материала. Вот как характеризует Стеклова-педагога академик В. И. Смирнов:

«Я думаю, что не только лица, пользовавшиеся непосредственным руководством В. А. Стеклова, но и многие студенты того времени помнят его лекции. Он не любил касаться общих вопросов о методах и целях математики, предпочитая показывать эту математику в действии, но делал это так, что в результате у слушателей получалось впечатление не отдельных теорем и примеров, а чего-то цельного. Достигал этого В. А. теми замечаниями, весьма короткими, но чрезвычайно ценными, которыми он обычно сопровождал доказательство теорем и решение примеров. Особенно, я думаю, памятли слушателям лекции В. А., посвященные уравнениям в частных производных, где В. А. знакомил нас с некоторыми современными методами и задачами математической физики.

Требовательный к себе, он был требователен и к другим. От своих непосредственных учеников он требовал посильной, но безусловно самостоятельной научной работы с самого же начала. Но вместе с тем он не признавал и узкой специализации без достаточно широкого математического образования. Многие и до сих пор помнят те большие требования, которые он предъявлял на магистерском экзамене, но я твердо уверен, что все, прошедшие через этот искуc, сейчас с чувством глубокой благодарности к В. А. сознают, как много дала им проделанная тогда работа. При всех обширных требованиях, надо сказать, никакой экзамен не доставлял столько удовлетворения и просто удовольствия, как магистерский экзамен у В. А.: полное отсутствие какой бы то ни было мелочности в вопросах, такая их постановка, при которой экзаменуемый чувствовал себя не проверяемым, а просто собеседником. У некоторых из нас часто возникали споры с В. А. Неизменно спокойный, он выслушивал спорящего и так же спокойно разубеждал его, когда это было надо»⁵².

В. А. Стеклов был не только выдающимся ученым и педагогом, но и активным общественным деятелем с передовыми социально-политическими и философскими взглядами. «В Петербургском университете он много раз выступал на Ученом совете по вопросам университетской жизни..., поднимая голос протеста против полицейско-бюрократического режима в высшей школе. В годы реакции он не боялся резко



В. А. Стеклов (90-е годы).

⁵² В. И. Смирнов. Владимир Андреевич Стеклов. Библиографический очерк. — В кн.: Памяти В. А. Стеклова. Изд-во АН СССР, Л., 1928, стр. 17—18.

критиковать действия министра просвещения Кассо, брать под защиту студенческие революционные сходки и т. д.»⁵³.

Как искренний патриот, Владимир Андреевич был большим знатоком и любителем русской культуры и истории. «Любовь к русской музыке, привычка приводить изречения Петра Великого, Ломоносова, Лобачевского — все это было у В. А. Стеклова не просто любовью к «русскому стилю», а выражением подлинной, кровной связи его с русской культурой, и сам В. А. Стеклов являлся одним из крупнейших представителей этой культуры»⁵⁴.

После Октябрьской революции В. А. Стеклов в числе других ученых стал на сторону победившего народа и занялся организацией научно-исследовательской работы в стране. Будучи с 1919 г. вице-президентом Академии наук и председателем хозяйственного комитета, он сумел наладить печатание научных трудов и поставку из-за границы литературы и приборов. Был организатором и первым директором Физико-математического института, разделенного впоследствии на три института, один из которых — Математический институт АН СССР — носит ныне его имя. Умер В. А. Стеклов 30 мая 1926 г.

7

Труды В. А. Стеклова по математической физике и теории замкнутости

Научное наследие В. А. Стеклова составляет около 130 работ. Они посвящены различным вопросам математики и механики, по каждому из них Стеклов сделал ряд крупных открытий⁵⁵.

Важнейшие труды В. А. Стеклова относятся к математической физике. Они посвящены решению основных задач теории потенциала и теории теплопроводности. Для решения этих задач в конце XIX в. существовало много методов, разработанных Фурье, Грином, Кирхгофом, Ламе, Нейманом, Шварцом, Робэном и др. Однако они не были достаточно строгими и, кроме того, относились к специальным областям. За их обоснование и обобщение взялись некоторые ученые, в том числе Пуанкаре и Ляпунов⁵⁶. Эту же цель поставил перед собой и Стеклов. Независимо от Ляпунова он провел строгое обоснование методов Неймана и Робэна для решения краевых задач уравнения Лапласа. Эти методы относились только к выпуклым областям. Стеклов распространил их на довольно широкий класс невыпуклых областей, доказал существование функции Грина для таких областей и нашел для нее аналитическое выражение. В основе исследований Ляпу-

⁵³ История естествознания в России. Т. 2. Изд-во АН СССР, М., 1960, стр. 151.

⁵⁴ Люди русской науки. Физматгиз, М., 1961, стр. 276.

⁵⁵ Научному творчеству В. А. Стеклова посвящен сборник: Памяти В. А. Стеклова. Изд-во АН СССР, Л., 1928. В сборнике приведен также список его работ.

⁵⁶ См. настоящую главу, 5.

нова лежит теорема о равенстве предельных значений от потенциала двойного слоя, Стеклов же провел изыскания вне зависимости как от этой теоремы, так и от теоремы о существовании решений задач, которую использовал в своих исследованиях Пуанкаре. Стеклов разработал также методику решения основных краевых задач математической физики, состоящую в разложении решений в ряды по так называемым фундаментальным (собственным) функциям. Функции такого рода, обобщающие тригонометрические, сферические, цилиндрические и другие, были впервые рассмотрены в 1894 г. Пуанкаре (ему же принадлежит название «фундаментальные функции») и исследованы его учеником Леруа. Однако фундаментальные функции Стеклова отличны от функций Пуанкаре и Леруа, к тому же они определяются на более широком классе поверхностей. Стеклов доказал существование фундаментальных функций и построил их теорию.

Указанным выше проблемам посвящено свыше 20 исследований В. А. Стеклова, выполненных им за 1897—1901 гг. и подытоженных в его докторской диссертации «Общие методы решения основных задач математической физики» (1901 г.), а также ряд последующих работ. Остановимся на диссертации Стеклова более подробно.

Работа состоит из пяти глав. В первой главе Стеклов доказывает так называемую основную теорему Пуанкаре, которую он формулирует так: если для замкнутой поверхности Ляпунова S допускается преобразование Пуанкаре, то отношение интегралов

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau,$$

взятых по областям, лежащим соответственно внутри и вне поверхности S , имеет конечную верхнюю и отличную от нуля нижнюю грани, какова бы ни была функция $V(x, y, z)$, удовлетворяющая условию

$$\int_{(S)} \frac{\partial V}{\partial n_e} = 0,$$

где n_e — внешняя нормаль к поверхности S . Эту теорему Пуанкаре положил в основу названных выше исследований по обобщению метода Неймана на невыпуклые области⁵⁷. При ее доказательстве он пользовался особым точечным преобразованием, отображающим произвольную замкнутую гладкую поверхность Σ в сферу Ω единичного радиуса, а каждую точку, лежащую внутри или вне поверхности Σ — в точку, лежащую соответственно внутри или вне сферы Ω . Так как Пуанкаре не доказал, что такое преобразование возможно, то целью Стеклова было доказательство основной теоремы, независимо от преобразования Пуанкаре. Однако эту задачу он решил лишь для частных случаев. В первом разделе рассматриваемой диссертации приведено соответствующее доказательство для сферы.

⁵⁷ H. Poincaré. La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. — Acta math., 1897, Bd 20.

Во второй главе показано, что методом Робэна можно решить основную проблему электростатики для проводников, ограниченных поверхностями Ляпунова, если к этим поверхностям применима теорема Пуанкаре (этот же вопрос для более узкого класса поверхностей был решен Стекловым ранее, в работе «Проблема распределения электричества и проблема Неймана»⁵⁸).

Основная проблема электростатики, являющаяся частным случаем первой краевой задачи для уравнения Лапласа, состояла в нахождении плотности поверхностного распределения электрических зарядов в проводниках. В 1887 г. Робэн показал⁵⁹, что для случая выпуклых поверхностей искомая непрерывная плотность ρ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\rho(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \frac{\rho(P') \cos \varphi}{r^2} d\sigma, \quad (17)$$

где S — поверхность проводника; r — расстояние PP' ; φ — угол, образованный направлением $P'P$ и направлением внешней нормали к поверхности S в точке P . Как отмечалось, Стеклов рассмотрел более широкий класс поверхностей S . Следуя схеме Робэна, он построил на поверхности S последовательность функций

$$\rho_k(P) = \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \frac{\rho_{k-1}(P') \cos \varphi}{r^2} d\sigma \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (18)$$

где ρ_0 — любая непрерывная функция, и доказал равномерную сходимость этой последовательности, а также то, что предельная функция ρ , как искомое решение задачи, удовлетворяет уравнению (17) и добавочному условию

$$\int_{(S)} \rho(P') d\sigma = M,$$

где M — общее количество электричества, которым заряжен проводник.

В 70-х годах XIX в. немецкий математик Карл Нейман разработал для решения краевых задач теории потенциала «метод арифметического среднего» — предвестник метода интегральных уравнений Фредгольма⁶⁰. Этот метод, основанный на последовательном приближении к искомому решению с помощью некоторых потенциалов двойного слоя, был применим лишь к некоторому классу выпуклых областей. Строгое обоснование метода провел А. М. Ляпунов.

Используя результаты первых двух глав диссертации, Стеклов в третьей главе независимо от А. М. Ляпунова обосновывает метод Неймана для решения второй краевой задачи. При этом, как и ранее, он

⁵⁸ W. S t e k l o f f. Le problème de la distribution de l'électricité et le problème de Neumann. — Comptes rendus... de l'Acad. d. sci., 59 de Paris, 1879, t. 125.

⁵⁹ G. R o b i n. Distribution de l'électricité sur une surface fermée convexe. — Comptes rendus... de l'Acad. d. sci. de Paris, 1887, t. 104.

⁶⁰ C. N e u m a n n. Untersuchungen über das logarithmische und Newtonische Potential. Leipzig, 1877.

рассматривает области, ограниченные поверхностями Ляпунова, для которых применима основная теорема Пуанкаре. Как известно, в этой задаче внутри или вне некоторой замкнутой области ищется гармоническая функция $V(x, y, z)$, удовлетворяющая на границе S условию

$$\frac{\partial V}{\partial n} = f,$$

где n — внутренняя или внешняя нормаль к поверхности S ; f — заданная на поверхности S непрерывная функция, удовлетворяющая в случае внутренней задачи равенству

$$\int_{(S)} f d\sigma = 0.$$

Стеклов построил на границе S последовательность

$$\begin{aligned} v_1(P) &= \frac{\lambda}{4\pi} \int_{(S)} \frac{f(P')}{r} d\sigma, \\ v_k(P) &= \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} \frac{v_{k-1}(P') \cos \varphi d\sigma}{r^2} \quad (k = 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (19)$$

где λ — некоторый параметр, удовлетворяющий неравенству $|\lambda| \leq 1$, остальные обозначения те же, что и в уравнении (17); доказал абсолютную и равномерную сходимость ряда

$$v_1 + \lambda v_2 + \lambda^2 v_3 + \dots + \lambda^k v_{k+1} + \dots$$

Следуя схеме Неймана, он рассмотрел потенциал Φ двойного слоя на границе области

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} (v_1 + \lambda v_2 + \lambda^2 v_3 + \dots + \lambda^k v_{k+1}) \frac{\cos \varphi d\sigma}{r^2}$$

и показал, что функция

$$V = v_1 + \lambda \Phi,$$

где v_1 определяется формулой (19) для всех точек P внутри или вне области, при $\lambda = 1$ является решением внутренней, а при $\lambda = -1$ — внешней задачи. Заметим, что в более ранних работах (1895—1898 гг.), когда А. М. Ляпуновым еще не были установлены условия существования нормальной производной от потенциалов двойного слоя, В. А. Стеклов выражал решение второй краевой задачи в виде потенциала простого слоя⁶¹.

Предположив существование решения основной проблемы электростатики для выпуклых областей, Робэн установил, что функция

$$W = \frac{1}{2\pi} \int_{(S)} (f + \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_k + \dots) \frac{d\sigma}{r},$$

⁶¹ Н. М. Гюнтер. Труды В. А. Стеклова по математической физике. — В кн.: Памяти В. А. Стеклова, стр. 52—53.

где ρ_k ($k = 1, 2, \dots$) определяются формулами (18), есть решение внутренней второй краевой задачи для этих областей ⁶². В 1897 г. в статье «Проблема распределения электричества и проблема Неймана» Стеклов освободил утверждение Робэна от его априорной связи с указанным предположением. Таким образом, метод Робэна был обоснован для выпуклых областей как в случае основной проблемы электростатики, так и второй краевой задачи теории потенциала.

В третьей главе диссертации Стеклов распространяет метод Робэна на области, ограниченные поверхностями Ляпунова, для которых справедлива основная теорема Пуанкаре.

Четвертая глава посвящена исследованиям, связанным с первой краевой задачей. Она состоит из двух частей. В первой части Стеклов обосновывает метод Грина для решения задачи в случае областей, ограниченных поверхностями, имеющими в каждой своей точке определенную касательную плоскость и кривизну, а также в случае областей, ограниченных поверхностями Ляпунова, для которых справедлива основная теорема Пуанкаре. Для таких областей он доказывает существование функции Грина и ее нормальной производной, свойство симметрии этой функции и получает общую формулу, выражающую решение V внутренней первой краевой задачи посредством функции Грина G :

$$V = \int_{(S)} f \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma, \quad (20)$$

где S — граница области; f — непрерывная функция, заданная на границе S и фигурирующая в формулировке задачи; n — внутренняя нормаль к границе S . Функцию Грина Стеклов определяет формулой

$$G = \Gamma + \frac{1}{4\pi r},$$

где Γ — регулярная часть; r — расстояние между полюсом $P_0(x_0, y_0, z_0)$ и точкой $P(x, y, z)$ области. Этим формула (20) отличается от общепринятой.

При доказательстве существования функции Грина Стеклов пользуется методом инверсии, предложенным Томсоном, и ставит существование этой функции, а значит, и разрешимость первой краевой задачи в зависимость от разрешимости основной проблемы электростатики. Разрешимость последней была доказана Стекловым для рассматриваемых им областей во второй главе диссертации. Аналитическое выражение, полученное им для функции Грина, имеет вид

$$G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{r} \left(\int_{(S')} \frac{\rho d\sigma}{R} + \frac{1}{4\pi} \right),$$

⁶² G. Robin. Distribution de l'électricité a la surface des conducteurs fermées et ouvertes. — Ann. de l'Ecole Norm., 1886, ser. 3, t. 3.

где

$$R = \sqrt{\left[\xi - \frac{k(x-x_0)}{r^2}\right]^2 + \left[\eta - \frac{k(y-y_0)}{r^2}\right]^2 + \left[\zeta - \frac{k(z-z_0)}{r^2}\right]^2};$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2};$$

$P(x_0, y_0, z_0)$ — полюс; S' — образ границы S области при преобразовании инверсии; $M(\xi, \eta, \zeta)$ — точка, лежащая на границе S ; k — коэффициент инверсии.

Во второй части главы рассматривается метод Неймана и доказывается следующая теорема: метод Неймана решает как внутреннюю, так и внешнюю задачу Дирихле для всякой замкнутой поверхности Ляпунова S , к которой применима фундаментальная теорема Пуанкаре, если заданная на этой поверхности функция f удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} (f - f_0) d\alpha \right| < b\alpha^{\mu+1},$$

где f_0 — значение функции f в точке P , лежащей на S , b и $\mu < 1$ — положительные числа, не зависящие ни от α , ни от положения точки P_0 ; α — первая цилиндрическая координата из координат α, β, γ ; система координат взята так, что точка P_0 является ее полюсом, а плоскость (x, y) совпадает с касательной плоскостью к поверхности S в этой точке. Стеглов провел два доказательства этой теоремы. Одно из них основано на результатах второй главы.

Последняя, пятая, глава докторской диссертации Стеклова посвящена фундаментальным функциям. Здесь они определяются как потенциалы простого слоя V_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) на рассматриваемой замкнутой поверхности S , внутренние нормальные производные которых удовлетворяют на ней условию

$$\frac{\partial V_k}{\partial n} = \lambda_k \varphi V_k,$$

где λ_k — постоянные; φ — некоторая положительная функция, определенная на S . Установив существование фундаментальных функций V_k , Стеглов пользуется ими при решении первой и второй краевых задач уравнения Лапласа для областей, ограниченных поверхностями S . Решения этих задач найдены им в виде сумм бесконечных рядов, разложенных по функциям V_k : если

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} A_k V_k, \quad A_k = \int_{(S)} \varphi f V_k d\sigma,$$

то на поверхности S $\Phi = f$; если же

$$\Phi = aV_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k V_k}{\lambda_k}, \quad B_k = \int_{(S)} f V_k d\sigma,$$

то на поверхности S

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = f, \quad a = \int_{(S)} \Phi d\sigma,$$

где n — внутренняя нормаль к поверхности S .

Разложением в ряд по фундаментальным функциям Стеклов пользуется также, решая задачу о распространении температуры внутри тела при заданном ее начальном распределении и условиях, определяющих температурный режим на границе тела. Этой задаче он посвятил несколько отдельных статей.

В конце XVIII — первой половине XIX в. были созданы методы решения задач математической физики, основанные на разложении искомых решений в ряды по различным собственным функциям. Так, Бернулли и Фурье пользовались разложениями в ряды по тригонометрическим функциям, Лаплас и Пуассон — по сферическим, Эйлер и Бессель — по цилиндрическим, Ламе — по эллипсоидальным, Штурм и Лиувилль — по более общим функциям, удовлетворяющим определенному уравнению (уравнению Штурма — Лиувилля). Были установлены свойства ортогональности таких функций. Однако сами разложения в ряды проводились в большинстве случаев без достаточного обоснования их сходимости и выяснения условий разложимости рассматриваемых функций. Частичному решению указанных проблем, кроме работ Бесселя и Лиувилля, посвящены исследования Парсеваля, Коши, Дирихле, Римана, а также изыскания по фундаментальным функциям Пуанкаре и Леруа. Целью же Стеклова было нахождение общих условий разложимости. После защиты докторской диссертации собственные (фундаментальные) функции становятся основным объектом его научных исследований. Рассмотрим итоговые результаты Стеклова в области созданной им теории замкнутости, открывшей новую страницу в развитии математического анализа.

Пусть требуется разложить интегрируемую на рассматриваемом многообразии ⁶³ D функцию $f(P)$ в ряд по фундаментальным функциям $u_k(P)$ ($k = 1, 2, \dots$), удовлетворяющим свойствам ортонормированности с весом $p(P) \geq 0$:

$$\int_{(D)} p u_k u_l d\omega = \begin{cases} 0, & k \neq l, \\ 1, & k = l. \end{cases}$$

С одной стороны, можно показать, следуя методу Эйлера — Фурье, что для предполагаемого разложения

$$f(P) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k u_k(P) \quad (21)$$

коэффициенты ряда A_k определяются формулами

$$A_k = \int_{(D)} p f u_k d\omega. \quad (22)$$

⁶³ Многообразие D может быть различным: отрезок прямой, плоская или пространственная область, поверхность.

С другой стороны, приближение функции $f(P)$ суммами n первых членов ряда (21) дает наименьшую квадратичную погрешность

$$\int_{(D)} r_n^2 p d\omega = \int_{(D)} f^2 p d\omega - \sum_{k=1}^n A_k^2 \quad (23)$$

тогда, когда коэффициенты ряда определяются формулами (22). Таким образом, существует связь между задачей разложения функции в ряд по фундаментальным функциям и задачей ее приближения отрезками этого ряда. Естественно, что для решения первой задачи необходимо выполнение условия

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(D)} r^2 p d\omega = 0,$$

что в соответствии с формулой (23) дает

$$\int_{(D)} f^2 p d\omega = \sum_{k=1}^{\infty} A_k^2. \quad (24)$$

Равенство (24) Стеклов назвал условием замкнутости системы фундаментальных функций и положил его в основу своих исследований. Он доказал замкнутость весьма широкого класса ортогональных функций (особенно выделяются в этом смысле работы Стеклова, относящиеся к разложениям по гармоническим функциям, многочленам Лежандра, Чебышева, Якоби, Чебышева — Лагерра и Чебышева — Эрмита). Однако замкнутость системы собственных функций $u_k(P)$ ($k = 1, 2, \dots$) еще не гарантирует разложимости интегрируемой функции $f(P)$ в ряд по этим функциям. Стеклов установил общие условия такой разложимости. Он доказал теорему о том, что если ряд (24) для замкнутой ортогональной системы сходится равномерно на многообразии D , то его сумма равна функции $f(x)$, и на основании этой теоремы установил разложимость в ряд по функциям Штурма — Лиувилля любой функции $f(P)$, для которой существуют первые производные⁶⁴, а также любой непрерывной функции $f(x)$ от одного действительного переменного, имеющей вид интеграла от интегрируемой ограниченной функции $\varphi(x)$:

$$f(x) = \int_a^x \varphi(x) dx.$$

В исследованиях по фундаментальным функциям, особенно после 1910 г., Стеклов пользуется одним важным методом, заслуживающим особого упоминания. При разложении функции $f(P)$ в ряд по фундаментальным функциям он заменяет ее некоторой усредненной функцией $F(P)$ с таким расчетом, чтобы: 1) для $f(P)$ сохранялось условие замкнутости, если оно соблюдено для $F(P)$; 2) абсолютная величина раз-

⁶⁴ До Стеклова было известно, что для такой разложимости $f(P)$ достаточно существования вторых производных.

ности $f(P) - F(P)$ была сколь угодно малой; 3) функция $F(P)$ обладала лучшими свойствами, чем функция $f(P)$. Эта функция, по предложению Н. М. Гюнтера, была названа функцией Стеклова. Для случая одной переменной она имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt,$$

где h настолько мало, что интервал $(x, x+h)$ находится в области определения функции $f(x)$. Функция $F(x)$ непрерывна, если $f(x)$ только интегрируема или имеет на одну производную больше, чем $f(x)$, если $f(x)$ непрерывна и т. д. Идея Стеклова привела в дальнейшем к существенным изменениям в самих постановках задач математической физики.

Работы В. А. Стеклова по математической физике обобщены и подытожены в его двухтомной монографии «Основные задачи математической физики»⁶⁵. Эта монография является значительным вкладом в отечественную физико-математическую литературу.

8

Работы В. А. Стеклова по теории упругости, гидродинамике и другие

Часть исследований В. А. Стеклова относится к теории упругости и гидродинамике. В статье «Одна задача теории упругости»⁶⁶ рассмотрен вопрос об определении формы равновесия стержня с сечением, два момента инерции которого для двух главных осей равны между собой (круг, правильный многоугольник). Проинтегрированы дифференциальные уравнения Кирхгофа для равновесия такого стержня в предположении, что кроме данных сил, приложенных к концам стержня, на линию центров тяжести его сечений действует еще постоянное давление по нормали к этой кривой⁶⁷. Элементы, характеризующие деформации стержня, выражены в эллиптических функциях Якоби.

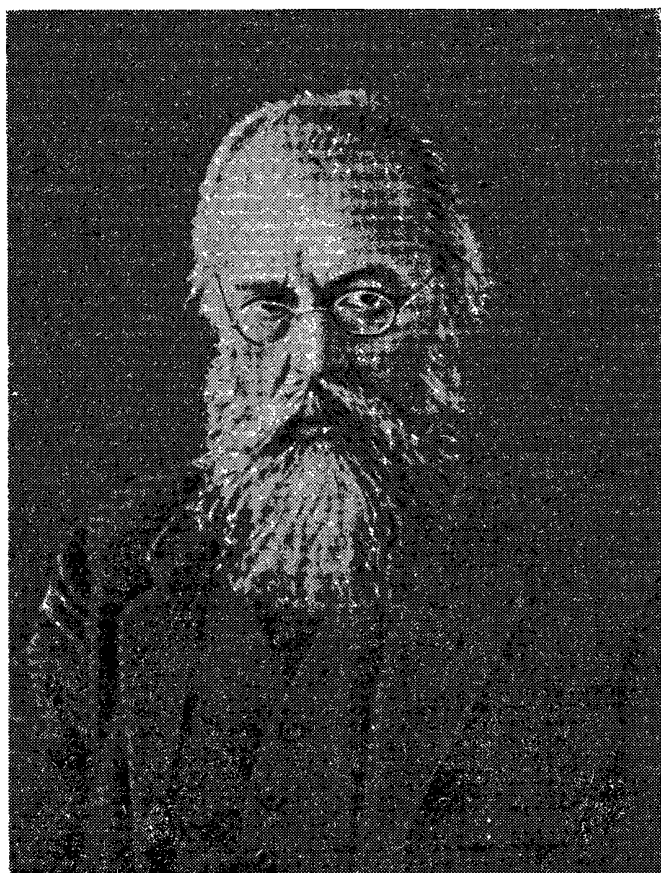
В работе «О равновесии упругих цилиндрических тел»⁶⁸ решается задача о нахождении деформаций и напряжений в цилиндрическом стержне с закрепленной точкой одного из концевых сечений и с осью, параллельной координатной оси z , под действием сил, приложенных

⁶⁵ В. А. С т е к л о в. Основные задачи математической физики. СПб, 1922—1923.

⁶⁶ В. А. С т е к л о в. Одна задача теории упругости. — Сообщения Харьковского математического общества, 1891.

⁶⁷ Кирхгоф получил уравнения для любого расположения сил, но проинтегрировал их только для случая, когда силы приложены к концам стержня.

⁶⁸ В. А. С т е к л о в. О равновесии упругих цилиндрических тел. — Сообщения Харьковского математического общества, 1891.



В. А. Стеклов.

к незакрепленному крайнему сечению. Предположив, что напряжения на поверхности равны нулю, для перемещений u , v и w вдоль осей координат Стеклов вводит разложения

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x, y) \frac{z^n}{n!}, \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x, y) \frac{z^n}{n!}, \quad w = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x, y) \frac{z^n}{n!},$$

где функции $U_n(x, y)$, $V_n(x, y)$, $W_n(x, y)$ определяются некоторыми дифференциальными зависимостями, получающимися из дифференциальных уравнений равновесия. Он показывает, что всякую прямую, параллельную оси цилиндра, до деформации необходимо преобразовать в алгебраическую кривую третьей степени. В работе исследуется и тот случай, когда силы действуют на боковую поверхность цилиндра.

Вопрос о равновесии упругих цилиндрических тел рассматривается также в статье «К задаче о равновесии упругих изотропных цилиндров»⁶⁹. Стеклов приводит более общее решение указанной задачи по сравнению с решениями Венана и Клебша.

⁶⁹ В. А. Стекло в. К задаче о равновесии упругих изотропных цилиндров. — Сообщения Харьковского математического общества, 1898.

Задаче о равновесии упругих тел вращения до Стеклова было посвящено немало работ. Общие решения задачи даны Вангерином ⁷⁰ и Иеришем ⁷¹. Решая задачу в общем случае ⁷², Стеклов не ограничивает системы координат условием изотермичности и тем самым расширяет постановку задачи в сравнении с постановкой Вангерина, хотя Вангерин и предполагает, что объемное расширение не зависит от азимутного угла. Стеклов рассмотрел случай равновесия кругового цилиндра под действием сил, приложенных к его поверхности, равновесие полого цилиндра, когда силы действуют на основание, и равновесие тел вращения, ограниченных сферическими и коническими поверхностями.

Основная задача гидродинамических исследований В. А. Стеклова — это задача о движении твердого тела в жидкости. Ей он посвятил несколько исследований, подытожив их в магистерской диссертации ⁷³. Наиболее важным результатом указанных исследований является открытие одного из четырех возможных случаев интегрируемости уравнений движения. Стеклов выводит уравнения движения твердого тела в жидкости методом Дирихле ⁷⁴. Относительно движущегося тела он делает следующие предположения: 1) граница тела является замкнутой гладкой поверхностью любого порядка связности; 2) внутри тела имеется конечное число наполненных жидкостью полостей, ограниченных поверхностями того же вида, что и граница тела; 3) силы, действующие на жидкость, имеют потенциал; 4) жидкость является несжимаемой, идеальной, вне тела безграничной, имеющей в бесконечности скорость, равную нулю; 5) движение жидкости как в полостях тела, так и вне его является потенциальным. При интегрировании уравнений движения Стеклов пользуется методом последовательных приближений, предполагая, что поверхность тела односвязна, движение происходит по инерции, а отношение плотности жидкости, окружающей тело, к плотности тела и жидкости, находящейся в его полостях, достаточно мало.

Наиболее важной является глава диссертации, в которой рассматриваются случаи полной интегрируемости уравнений движения при любых начальных условиях, когда кроме трех интегралов Кирхгофа существует четвертый интеграл, не зависящий от времени, и задача приводится к квадратурам. Предполагается, что поверхность тела односвязна и отсутствуют внешние силы, приложенные к телу или к жидкости. Стеклов получает два случая интегрируемости, найденные

⁷⁰ A. W a n g e r i n. Über das Problem elastischer Rotationskörper.— Archiv für Math. und Phys., 1873, Bd. 55.

⁷¹ J a e r i s c h. Allgemeine Integration der Elastizitätsgleichungen für die Schwingungen und das Gleichgewicht isotroper Rotationskörper.— Journ. für die reine und angew. Math., 1889, Bd. 104.

⁷² В. А. С т е к л о в. О равновесии упругих тел вращения.— Сообщения Харьковского математического общества, 1898.

⁷³ В. А. С т е к л о в. О движении твердого тела в жидкости.— Записки Харьковского университета, 1893.

⁷⁴ L. D i r i c h l e t. Über einige Fälle, in welchen sich die Bewegung eines festen Körpers in einem inkompressiblen flüssigen Medium theoretisch bestimmen lässt.— Berl. Ber., 1852.

ранее Клебшем ⁷⁵: 1) для тела, вид которого для наблюдателя будет неизменным при повороте на прямой угол вокруг некоторой оси (винтовая симметрия); 2) для тела, симметричного относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей, если четвертый интеграл движения является однородной функцией второй степени, содержащей только квадрат импульсивного момента и квадрат составляющих импульсивного вектора. Кроме этих известных случаев он получает третий случай интегрируемости, отличающийся от второго тем, что четвертый интеграл включает также члены с произведениями соответствующих проекций вектора и момента импульсов. Впоследствии А. М. Ляпуновым был найден четвертый случай интегрируемости ⁷⁶.

Результаты, полученные в магистерской диссертации, Стеклов улучшил в последующих работах. Так, в статье «О некоторых возможных движениях твердого тела в жидкости» ⁷⁷ он ищет отдельные формы указанного движения, которые соответствуют частным интегралам. В работе «Мемуар о движении твердого тела в определенной жидкости» ⁷⁸ более подробно, чем в диссертации, изложен метод приближенного интегрирования, рассмотрен вопрос о периодических решениях задачи.

Несколько работ В. А. Стеклова посвящено теории вихрей, движению жидкого эллипсоида и движению твердого тела с эллипсоидальной полостью, наполненной жидкостью. В работе «О теории вихрей» ⁷⁹ решается задача о нахождении скоростей точек для вихревого движения несжимаемой жидкости по заданным ее вихрям, если эта жидкость заполняет некоторый замкнутый односвязный сосуд. Решение сводится к интегрированию четырех дифференциальных уравнений, три из которых выражают равенства проекций вихря на координатные оси трем заданным функциям от времени и координат, а четвертое — уравнение неразрывности. Интегрирование уравнений в общем случае приводится к их интегрированию в частном случае, когда нормальная составляющая вихря на поверхности сосуда равна нулю. Разработанный Стекловым метод применяется им в этой работе к решению ряда конкретных задач.

В 1908—1909 гг. был опубликован большой мемуар В. А. Стеклова «Проблема движения несжимаемой жидкой массы эллипсоидальной формы» ⁸⁰, посвященный проблеме движения жидкого эллипсоида. Кро-

⁷⁵ C l e b s c h. Über die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. — Math. Ann. 1871, Bd. 3.

⁷⁶ А. М. Л я п у н о в. Новый случай интегрируемости дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости. — Сообщения Харьковского математического общества, 1893, т. 4.

⁷⁷ В. А. С т е к л о в. О некоторых возможных движениях твердого тела в жидкости. — В кн.: Труды отделения физико-математических наук Общества любителей естествознания. Т. 7, 1895.

⁷⁸ W. S t e k l o f f. Mémoire sur le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini. — Ann. de la fac. des sci. de Toulouse, 1902, t. 4.

⁷⁹ W. S t e k l o f f. Sur la théorie des tourbillons. — Ann. de la fac. des sci. de Toulouse, 1908, t. 10.

⁸⁰ W. S t e k l o f f. Problème du mouvement d'une masse fluide incompressible de la forme ellipsoïdale... — Ann. de l'Ec. norm. sup., 1908, t. 25; 1909, t. 26.

ме новых результатов в нем изложены в развернутом виде результаты трех статей, относящихся к этой же теме и напечатанных в «Comptes rendus» Парижской Академии наук в 1905—1906 гг.

Проблемой о движении жидкой массы в форме эллипсоида до Стеклова занимались многие крупные математики и механики. Во всех их исследованиях предполагалось, что жидкость является однородной, идеальной и несжимаемой, а ее частички притягиваются взаимно по закону Ньютона; внешнее давление считалось постоянным. Стеклов в названном мемуаре решает задачу движения жидкого эллипсоида в постановке Дирихле⁸¹, т. е. в предположении, что компоненты скорости каждой точки жидкости являются линейными однородными функциями ее координат.

Он рассматривает все возможные случаи движения и выясняет, при каких условиях жидкий эллипсоид сохраняет форму эллипсоида вращения и форму трехосного эллипсоида при постоянных длинах его полуосей.

Остановимся вкратце еще на одной работе Стеклова по гидродинамике — «О движении твердого тела, имеющего полость формы эллипсоида»⁸². В ней он исследует вращение около неподвижной точки твердого тела, имеющего полость в форме эллипсоида, наполненную несжимаемой жидкостью, причем оси эллипсоида совпадают с главными осями инерции тела относительно неподвижной точки. Предполагается, что на частички жидкости действует только сила их взаимного притяжения по закону Ньютона, а вихревые нити являются параллельными прямыми и обладают одинаковым напряжением. Стеклов рассмотрел также общий случай, когда берется какое угодно тело с какими угодно полостями. Свои результаты он применил при изучении движения Земли, которую считал твердым эллипсоидом, имеющим внутри софокусную полость, наполненную жидкой массой. При этих предположениях Стеклов нашел, что толщина твердой оболочки Земли должна находиться в пределах между 800 и 1100 км; если принять среднюю плотность Земли равной $5,6 \text{ г/см}^3$, то плотность оболочки должна находиться в пределах между 5,9 и $6,0 \text{ г/см}^3$, а плотность жидкой массы — между 5,0 и $5,6 \text{ г/см}^3$.

Нами рассмотрены лишь основные направления научных исследований В. А. Стеклова. Ему принадлежит также немало работ и в других областях математики. Некоторые из них (1916—1919 гг.) посвящены теории механических квадратур, в частности вопросам сходимости формул этих квадратур и оценке остаточных членов. Здесь также получены общие и очень важные результаты. Например, сведя вопрос о сходимости формул механических квадратур к вопросу о приближении функции полиномами и принимая за $P_n(x)$ сумму n первых членов в разложении функции $f(x)$ по полиномам Лежандра в промежутке $(-1, +1)$, Стеклов получил оценку

⁸¹ L. Dirichlet. Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik. — Journ. für die reine und angew. Math, 1861, Bd. 58.

⁸² W. Stekloff. Sur le mouvement d'un corps solide ayant une cavité de forme ellipsoïdale... — Ann. de la fac. des sci de Toulouse, 1909, t. 1.

$$|r_{n+1}(x)| < \frac{M}{2\sqrt{n}},$$

где $r_{n+1}(x) = f(x) - P_n(x)$, $M = \max |f''(x)|$, $0 < x < 1$.

С помощью этой оценки он доказал, что все формулы квадратур, у которых сумма коэффициентов ограничена, сходятся для всех функций с конечной второй производной. Этот результат был обобщен им на непрерывные функции, а затем и на класс функций, интегрируемых в смысле Римана.

В некоторых статьях Стеклов рассматривал вопросы разложения функции $f(x)$ одной действительной переменной в ряды без применения теории замкнутости. Он получил остаточный член $r_{n+1}(x)$ такого разложения по полиномам Чебышева в виде определенного интеграла

$$r_{n+1}(x) = \frac{1}{Q_n} \int_a^b p(t) \frac{f(x) - f(t)}{x - t} [\varphi_{n+1}(x) \varphi_n(t) - \varphi_n(x) \varphi_{n+1}(t)] dt,$$

где $\varphi_n(x)$ — полином Чебышева; $p(x)$ — характеристическая функция, а величина Q_n определяется формулой

$$Q_n = \int_a^b p(x) \varphi_n^2(x) dx.$$

Для остаточного члена разложения $f(x)$ по полиномам Лежандра $X_n(x)$ вывел формулу

$$r_n(x) = \frac{|X_n(x)| + \lambda_n |X_{n-1}(x)|}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)} \left[f^{(n)}(\xi) - \frac{M+m}{2} \right],$$

где

$$\lambda_n = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} < \frac{1}{\sqrt{2n}};$$

ξ — некоторое число интервала $(-1, 1)$; M и m — соответственно наибольшее и наименьшее значения производной $f^{(n)}(x)$ в интервале. Для рассмотренных остаточных членов получены также очень точные оценки.

Некоторые исследования Стеклова относятся к теории интерполирования, отделению действительных корней алгебраических уравнений, проблеме моментов, задаче колебания стержней. Кроме чисто научных работ Стеклову принадлежат также статьи и некрологи, посвященные памяти крупных математиков и физиков — В. Томсона, А. Пуанкаре, А. М. Ляпунова, А. А. Маркова, А. А. Фридмана — и большие работы о Галилео Галилее и М. В. Ломоносове. В 1924 г. в Берлине была издана его монография «Математика и ее значение для человечества». В ней в числе других вопросов Стеклов излагает свои материалистические взгляды на предмет и метод математики, показывает ее связь с практикой и объективной реальностью, выясняет материальную основу математических абстракций. Как одна из первых в советской литературе работ по методологическим и философским вопросам математики, эта книга Стеклова оказала положительное влияние на молодых советских математиков.

К началу 90-х годов прошлого века Петербургская академия наук лишилась двух выдающихся академиков-математиков: в 1889 г. скончался В. Я. Буняковский, в 1892 г. — В. Г. Имшенецкий. В 1893 г. академиком по чистой математике был избран Н. Я. Сонин, имя которого, по словам П. Л. Чебышева, пользовалось большой известностью в ученом мире. Чебышев не ошибся в своем выборе. Сонин был одним из выдающихся математиков конца XIX — начала XX в. Многие научные результаты его явились существенным вкладом в математику, а некоторые труды не потеряли своего значения и до сих пор.

Николай Яковлевич Сонин родился 10 февраля (29 января) 1849 г. в Туле в дворянской семье. Вскоре семья переехала в Москву, где Сонин и получил образование. Окончив в 1865 г. с золотой медалью гимназию, он поступил на физико-математический факультет Московского университета, где в это время преподавали А. Г. Столетов, Н. А. Любимов, Ф. А. Бредихин, М. Ф. Хандриков, А. Ю. Давидов, В. Я. Цингер, Н. В. Бугаев, Ф. А. Слудский. По окончании университета (1869 г.) Сонин был оставлен в нем на два года «для усовершенствования в науках» и уже в декабре 1871 г. защитил магистерскую диссертацию «О разложении функций в бесконечные ряды». В основу диссертации положена идея использования формулы Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\alpha) \frac{d\alpha}{\alpha - z}$$

для получения различных разложений в ряд функции $f(z)$, если известны разложения в ряд дроби $\frac{1}{\alpha - z}$. Сонин предложил два метода разложения этой дроби в ряд. В качестве примеров он вывел разложения дроби $\frac{1}{\alpha - z}$ по ультрасферическим многочленам и производным многочленов Лежандра и получил несколько соотношений, относящихся к цилиндрическим функциям.

В 1872 г. Сонин был назначен доцентом Варшавского университета. Вскоре он получил заграничную командировку, большую часть которой провел в Париже, где слушал лекции Лиувилля, Эрмита, Бертрана, Серре, Дарбу. В 1874 г. Сонин защитил в Московском университете докторскую диссертацию «Об интегрировании уравнений с частными производными второго порядка», т. е. уравнений

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

где

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Работа относится к числу тех общих исследований об интегрировании уравнений с частными производными второго порядка, которые были

начаты Лагранжем (1774 г.) и продолжены Ампером (1815 г.), Имшенецким (1868 г.), Дарбу (1870 г.). Главной задачей являлось отыскание таких интегралов в конечном виде, которые имели бы наиболее общий вид.

В 1877 г. Сонин был утвержден в должности профессора Варшавского университета. Более 20 лет работал он в этом университете. Читал различные математические курсы, был деканом физико-математического факультета, неоднократно исполнял должность ректора, был редактором «Варшавских университетских известий», одним из организаторов и активных деятелей Общества естествоиспытателей при университете.

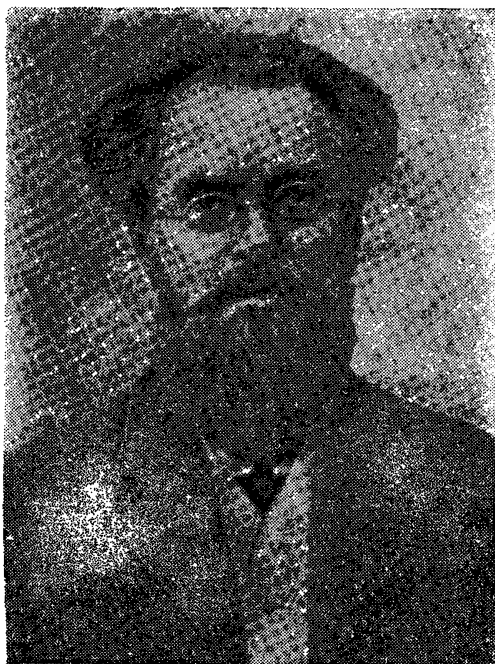
Научные труды, написанные им в Варшаве, получили высокую оценку: в 1890 г. ему была присуждена премия имени В. Я. Буняковского.

После ухода на пенсию, в 1891 г., Сонин некоторое время — до 1894 г. — продолжал вести лекционные курсы в Варшавском университете. В 1893 г. он был избран академиком Петербургской академии наук и в 1894 г. переехал в Петербург. В Петербурге Сонин с 1894 по 1899 г. преподавал на Высших женских курсах и в университете. В 1899—1901 гг. он попечитель Петербургского учебного округа, а с 1901 г. — председатель Ученого комитета Министерства народного просвещения. Как академик, Сонин принимал деятельное участие в работе Академии наук. В частности, он вместе с А. А. Марковым подготовил и отредактировал двухтомное собрание сочинений П. Л. Чебышева (1899—1907 гг.). Умер Н. Я. Сонин 14 (1) февраля 1915 г.

Рассмотрим научные работы Н. Я. Сонины. Докторская диссертация не оказала заметного влияния на его дальнейшее научное творчество — тематика дифференциальных уравнений в частных производных не получила развития в его дальнейших трудах. А вот магистерскую диссертацию Сонины можно считать первой в серии его замечательных работ по специальным функциям.

Особенно важными являются работы Сонины «Исследования о цилиндрических функциях и о разложении непрерывных функций в ряды»⁸³, «О цилиндрических функциях»⁸⁴.

К цилиндрическим функциям он подошел с новой, оригинальной



Н. Я. Сонин.

⁸³ N. S o n i n. Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries.— Math. Ann., 1880, Bd. 16.

⁸⁴ N. S o n i n. Sur les fonctions cylindriques. Math. Ann., 1904, Bd. 59.

точки зрения, определив их как частные решения системы функциональных уравнений

$$\begin{aligned} S_{\nu+1}(z) + 2 \frac{dS_{\nu}(z)}{dz} - S_{\nu-1}(z) &= 0, \\ 2\nu S_{\nu}(z) &= z [S_{\nu-1}(z) + S_{\nu+1}(z)], \end{aligned} \quad (25)$$

удовлетворяющие условию $S_1(z) = -S'_0(z)$, где z — комплексная переменная; ν — любое действительное или комплексное число, и доказав, что эти частные решения представляются интегралом

$$\frac{1}{2\pi i} \int_a^b \exp \left[\frac{z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) \right] \frac{dt}{t^{\nu+1}}. \quad (26)$$

Сонин нашел формулы, связывающие четыре частных решения $S_{\nu}^h(z)$ системы (25), соответствующие четырем системам значений пределов интегрирования a и b в интеграле (26), с функциями Бесселя $J_{\nu}(z)$.

Интегральные представления функций $S_{\nu}^h(z)$ (названные впоследствии интегралами Сонины) послужили Сонину источником в получении большого числа все новых и новых интегральных представлений цилиндрических функций, формул для вычисления определенных и неопределенных интегралов, содержащих цилиндрические функции. Значительная часть этих формул вошла в монографии и учебники по теории цилиндрических функций, например:

а) первый определенный интеграл Сонины

$$J_{\mu+\nu+1}(aq) = \frac{q^{\nu+1}}{2^{\nu} \Gamma(\nu+1) a^{\mu+\nu+1}} \int_0^a J_{\mu}(qx) (a^2 - x^2)^{\nu} x^{\mu+1} dx, \quad (27)$$

$$R(\mu), \quad R(\nu) > -1;$$

б) второй определенный интеграл Сонины

$$\begin{aligned} \int_0^a J_{\mu}(qx) J_{\nu}(z\sqrt{a^2 - x^2}) (a^2 - x^2)^{\frac{\nu}{2}} x^{\mu+1} dx = \\ = a^{\mu+\nu+1} q^{\mu} z^{\nu} \frac{J_{\mu+\nu+1}(a\sqrt{q^2 + z^2})}{(\sqrt{q^2 + z^2})^{\mu+\nu+1}}, \quad R(\mu), \quad R(\nu) > -\frac{1}{2}; \end{aligned} \quad (28)$$

в) интеграл от произведения трех цилиндрических функций

$$\int_0^{\infty} J_{\mu}(ax) J_{\mu}(bx) J_{\mu}(cx) x^{1-\mu} dx = \frac{2^{\mu-1} \Delta^{2\mu-1}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\mu + \frac{1}{2}\right) (abc)^{\mu}}, \quad (29)$$

где Δ — площадь треугольника со сторонами a , b , c ,

$$R(\mu) > -\frac{1}{2};$$

г) формула

$$\int_0^{\infty} J_{\mu}(ax) x dx \int_0^c f(b) J_{\mu}(bx) b db = \begin{cases} f(a), & 0 < a < c, \\ 0, & 0 < c < a, \end{cases} \quad (30)$$

являющаяся обобщением результатов Фурье ($2\mu = \pm 1$) и Ханкеля ($\mu = m$).

Сонин рассмотрел функции $S_n(z)$, удовлетворяющие только одному функциональному уравнению

$$S_{n+1}(z) + 2 \frac{dS_n(z)}{dz} - S_{n-1}(z) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (31)$$

и условию $S_1(z) = -S'_0(z)$. Для этих функций, получивших впоследствии название полуцилиндрических, он установил теорему сложения:

$$S_p(\alpha + z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\alpha) S_{p-n}(z),$$

являющуюся обобщением формул, полученных ранее Нейманом и Ломмелем для $J_p(\alpha + z)$.

Занимался также Сонин разложением функций в ряды по цилиндрическим функциям и получением рядов для цилиндрических функций. В частности, он нашел две общие формулы для разложения аналитической функции в ряд по полиномам Гегенбауэра $C_n^{\nu}(z)$ и по цилиндрическим функциям первого рода.

Большой вклад внес Сонин в теорию ортогональных многочленов. Основы общей теории ортогональных многочленов были заложены П. Л. Чебышевым в мемуаре «О непрерывных дробях» (1865 г.). Впоследствии Чебышев опубликовал несколько трудов по теории ортогональных многочленов, где многочлены определялись как знаменатели подходящих дробей при разложении в непрерывную дробь суммы

$$\sum_{i=0}^n \frac{\Theta^2(x)}{x - x_i} \quad \text{или интеграла} \quad \int_a^b F(z) \frac{dz}{x - z}$$

и исследовались при помощи непрерывных дробей. Выдающуюся роль в развитии теории ортогональных многочленов сыграли также исследования К. А. Поссе, А. А. Маркова и Т. Стилтеса, которые по примеру Чебышева рассматривали ортогональные многочлены как знаменатели подходящих дробей. Сонин дал новое⁸⁵, совпадающее по существу с современным определение ортогональных многочленов $\varphi_n(x)$ как таких многочленов, которые удовлетворяют соотношению

$$\int_a^b F(x) \Theta(x) \varphi_n(x) dx = 0, \quad (32)$$

где $F(x)$ — непрерывная и неотрицательная на интервале (a, b) функция; $\Theta(x)$ — произвольный многочлен степени, меньшей n . Исходя из этого определения, он обнаружил ряд свойств ортогональных мно-

⁸⁵ Н. Я. Сонин. О приближенном вычислении определенных интегралов и входящих при этом вычислении целых функций. — Варшавские университетские известия, 1887.

членов, в том числе и таких, которые не были известны. В частности, Сонин поставил задачу: найти все системы ортогональных многочленов

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$$

так, чтобы многочлены

$$\frac{\varphi_1'(x)}{1}, \quad \frac{\varphi_2'(x)}{2}, \dots, \frac{\varphi_n'(x)}{n}, \dots$$

снова обладали свойством ортогональности относительно некоторого веса $F_1(x)$. Он установил, что единственными системами ортогональных многочленов, удовлетворяющими условиям этой задачи, являются классические ортогональные многочлены.

Сонину принадлежит метод ортогонализации функций ⁸⁶, из которого как следствие получается так называемый метод Шмидта, предложенный последним в 1907 г. Большое внимание он уделил задачам, относящимся к приближенному вычислению определенных интегралов, и в связи с их решением получил свои результаты, касающиеся теории ортогональных многочленов. Отправной точкой для него в этих исследованиях служили, как правило, труды и идеи Чебышева. Он искал и изучал формулы механических квадратур и устанавливал оценки определенных интегралов некоторого достаточно общего вида. К работам этого цикла относятся упомянутые выше мемуары 1887

и 1898 гг., а также статьи «Об интеграле $\int_a^b F(x) \frac{dx}{z-x}$ » (1892 г.), «О точности определения предельных величин интегралов», «Заметка по поводу письма П. Л. Чебышева к С. В. Ковалевской» (1895 г.). В них Сониным получено много новых результатов, в том числе замечательное, по словам А. А. Маркова, неравенство Сони́на, которое Марков применил для доказательства предельной теоремы теории вероятностей,

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{qv}{\sqrt{2}}} e^{-x^2} dx \right| < \sqrt{\frac{\pi}{2m \pm 1}}.$$

Кроме цилиндрических функций и ортогональных многочленов Сони́на интересовали и другие специальные функции — полиномы Бернулли, функция гамма, а также родственные ей функции. Он дал ⁸⁷ новое определение полиномов Бернулли, как частного решения разностного уравнения

$$F(x+1) - F(x) = nx^{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (33)$$

обращающегося в нуль при $x = 0$. Такое определение позволило ему не только более просто получить уже известные, но и открыть новые

⁸⁶ Н. Я. Сонин. О некоторых неравенствах, относящихся к определенным интегралам. — Записки Академии наук. Физ.-мат. отд., 1898, сер. 8, т. 6.

⁸⁷ Н. Я. Сонин. О бернуллиевых полиномах и их приложениях. — Варшавские университетские известия. 1888.

свойства полиномов Бернулли. Определение полиномов Бернулли как частных решений разностного уравнения является общепринятым в современных курсах исчисления конечных разностей. Сонин вывел формулу для разложения функций по полиномам Бернулли, из которой как следствия получаются суммационные формулы Эйлера — Маклорена и Лежандра. Для этих формул он нашел новую форму дополнительного члена. Прерывная функция $[x]$, определенная им⁸⁸ как такое частное решение разностного уравнения $[x-1] - [x] = 1$, которое равно нулю для всех значений x , удовлетворяющих неравенствам $0 \leq x < 1$, стала у Сони́на отличным математическим аппаратом.

Сонин доказал, что

$$\int_{-a}^b [x] df(x) = [b]f(b) + [a+1]f(-a) - \sum_{k=[a]}^{[b]} f(k), \quad (34)$$

где $f(x)$ — непрерывная функция, имеющая интегрируемую производную. Из равенства (34) как важное следствие вытекает формула

$$-\int_0^\infty [x] df(x) = \sum_{k=1}^\infty f(k) \quad (0 \leq \theta \leq 1), \quad (35)$$

в которой функция $f(x)$ подчинена условию $\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = 0$. П. Л. Чебышев, А. А. Марков и В. Г. Имшенецкий в свое время отметили, что введение числовой прерывной функции $[x]$ множителем интегрируемого дифференциала под знаком определенного интеграла составляет новый оригинальный прием.

Сонин рассмотрел разностное уравнение

$$F(x+1) - F(x) = f(x), \quad (36)$$

в котором заданная функция $f(x)$ и ее последовательные производные конечны и непрерывны при конечных значениях x и $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(p)}(x) = 0$.

В исследовании этого уравнения решающую роль сыграл интеграл (35). Сонин нашел функцию $F(x)$, являющуюся частным решением уравнения (36), обращающимся в нуль при $x = a$. Если условие $\lim_{x \rightarrow \infty} f^{(p)}(x) = 0$ выполняется, начиная с $p = 1$, то функция $F(x)$ принимает более простой вид. В этом случае он получил специальную функцию

$$F(x+a) = \int_1^\infty [z] \{f'(x+z+a-1) + (x-1)f'(z+a-1) - \\ - xf'(z+a)\} dz + xf(a) \quad (37)$$

и указал ряд ее свойств. Функции $F_s(x+1)$ и $G_s(x+1)$, рассмотренные Сониним, являются частными решениями уравнения (36), когда его правая часть соответственно равна $\frac{x^{1-s}-1}{1-s}$ или x^{1-s} . Функция $F_s(x+1)$ при $s = 1$ превращается в $\log \Gamma(x+1)$, а функцию

⁸⁸ Н. Я. Со́нин. О прерывной функции $[x]$ и ее применениях. — Варшавские университетские известия, 1889.

$(2 - s) G_s(x)$ можно рассматривать как обобщение полиномов Бернулли на случай произвольного действительного индекса $n < 2$.

Сонин ввел специальную функцию

$$\omega(x, p, h) = F(x + a) - \int_0^{p+x} f(x + a) dx + \left(p + \frac{1}{2}\right) f(x + h + a) - A, \quad (38)$$

где A — определенное постоянное число, и получил для нее разложение в двойной ряд и два вида интегральных представлений. Особо выделены частные случаи, $\omega(x) = \omega(x, -1, -1)$; $\pi(x) = \omega(x, -\frac{1}{2}, h)$, для которых дано несколько разложений в ряд и интегральных представлений.

Применив результаты, полученные при рассмотрении разностного уравнения (36), к случаю $f(x) = \log x$, Сонин нашел новые, а также обобщил и улучшил некоторые известные формулы:

а) новое интегральное представление

$$\log \Gamma(x + 1) = \int_1^\infty [z] \{ (x + z)^{-1} + (x - 1) z^{-1} - x(z + 1)^{-1} \} dz \quad (39)$$

(причем интеграл сходится для любых значений x , кроме действительных отрицательных);

б) новая форма (ее называют иногда формой Сони́на) остаточного члена R_n в ряде Стирлинга

$$R_{n+1} = \frac{(-1)^n B_{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)} \cdot \frac{1}{(x+\theta)^{2n+1}}, \quad 0 < \theta < \frac{1}{\pi \sqrt{2e}}, \quad (40)$$

дающая более тесные грани для R_{n+1} , нежели общеупотребительная форма Коши; если в ряде Стирлинга ограничиться первыми тремя членами, то формулы Коши и Сони́на дадут соответственно

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{\theta}{12x}}, \quad 0 < \theta < 1,$$

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{1}{12(x+\theta)}}, \quad 0 < \theta < \frac{1}{\pi \sqrt{2e}};$$

в) установление простых одночленных оценок выражения

$$\log \Gamma(x + 1) - \log \Gamma(x + p + 1) + p \log \left(x + \frac{p+1}{2}\right);$$

г) первый правильный вывод теоремы умножения Гаусса из уравнения $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$ и выражение дополнительного множителя в произведении

$$\Gamma(x+1) = \frac{n! (n+1)^x}{(x+1) \dots (x+n)} \times \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+x+\theta}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{nx+x+\theta}}, \quad (41)$$

где x — действительная и переменная; θ — правильная положительная дробь;

д) функции Сонина $\omega(x, p, h)$, $\omega(x)$ и $\pi(x)$, дающие возможность получить различные разложения в ряд функции $\log \Gamma(x+1)$, в частности ряды Бине, Гудермана, Куммера и Жильбера.

Сонин получил также некоторые результаты в области классического математического анализа. Соотношение между остаточными членами R_{n+1} и P_{m+1} рядов Маклорена для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$

$$R_{n+1} = \frac{m!}{n!} (x - \xi)^{n-m} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{\varphi^{(m+1)}(\xi)} P_{m+1}, \quad (42)$$

найденное Сониным⁸⁹, является источником для получения различных форм остаточного члена в ряде Маклорена. В частности, при $\varphi(x) = x^{m+1}$ получается известная формула Роша. При $\varphi(x) = f(x)$

$$R_{n+1} = \frac{m!}{n!} (x - \xi)^{n-m} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{f^{(m+1)}(\xi)} R_{m+1}; \quad (43)$$

из этого выражения в свою очередь получаются формулы, дающие во многих случаях простые и более точные, по сравнению с общеизвестными, оценки остаточного члена.

В статьях «О приведении одного кратного интеграла» и «Об одной формуле приведения кратных интегралов»⁹⁰ Сонин дал ряд формул для преобразования кратных определенных интегралов. В частности, он вывел формулу интегрирования по частям для кратных интегралов

$$\begin{aligned} & \int_{a < \varphi < b} \dots \int \sigma(x_1, \dots, x_n, \varphi) dx_1 \dots dx_n = \\ & = \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial y} \int_{a < \varphi < y} \dots \int \sigma(x_1, \dots, x_n, p) dx \dots dx_n \right] \Big|_{p=y} dy, \end{aligned} \quad (44)$$

из которой при $\sigma(x_1, \dots, x_n, \varphi) = f(x_1, \dots, x_n) \vartheta(\varphi)$ получается известная формула Каталана для преобразования кратных интегралов.

Имя Сонина связано и с зарождением теории интегральных уравнений. Известно, что задача механики о нахождении плоской кривой, для которой время свободного падения по ней материальной точки с высоты x до нижнего положения было бы заданной функцией, привела Абеля к уравнению

$$\int_0^x \varphi(y) \frac{dy}{\sqrt{x-y}} = F(x).$$

⁸⁹ Н. Я. Сонин. Об остатке формулы Тейлора. — Варшавские университетские известия, 1891.

⁹⁰ Н. Я. Сонин. О приведении одного кратного интеграла. — Варшавские университетские известия, 1889; Об одной формуле приведения кратных интегралов. — Там же.

Оно же в свою очередь привело к рассмотрению и решению уравнения

$$\int_0^x \varphi(y) \frac{dy}{(x-y)^\alpha} = F(x), \quad (45)$$

где $0 < \alpha < 1$, $F(x)$ — известная, а $\varphi(x)$ — искомая функции. Историческое значение этих уравнений состоит в том, что они явились одним из важнейших источников теории интегральных уравнений, решение которых вначале называлось иногда «обратным исчислением определенных интегралов».

Еще до создания общей теории интегральных уравнений Сонин в статье «Обобщение одной формулы Абеля»⁹¹ решил интегральное уравнение более общего вида, чем уравнение (45). Результат его состоял в следующем.

Пусть

$$\rho(u) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u^k, \quad c_0 = 1,$$

$$\frac{1}{\rho(u)} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k u^k, \quad d_0 = 1.$$

Если положить

$$H(u) = u^{-p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k u^k}{\Gamma(k-p+1)},$$

$$K(u) = u^{-q} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k u^k}{\Gamma(k-q+1)},$$

где p и q — положительные дроби, сумма которых равна единице, причем предположить, что два последних ряда сходятся, то окажется, что сингулярное интегральное уравнение

$$\int_a^x K(x-y) \varphi(y) dy = F(x) \quad (46)$$

имеет решение

$$\varphi(x) = \int_a^x H(x-y) F'(y) dy.$$

Помимо самого факта решения уравнения (46) при довольно общих предположениях относительно ядра $K(x-y)$ важным является также использование Сониным для этой цели степенных рядов.

Сонин превосходно знал историю математики. Каждый его мемуар богат ценными историческими сведениями, анализом работ его предшественников. Исторической тематике он посвятил одно из своих сочи-

⁹¹ Н. Я. Сонин. Обобщение одной формулы Абеля. — Записки Новороссийского общества естествоиспытателей, 1884.

нений — «Ряд Ивана Бернулли» (1897 г.), где показал роль И. Бернулли в истории создания ряда Тейлора. Для научных трудов Сонины характерны четкая постановка задач, большая эрудиция, мастерское владение математическим аппаратом, в особенности определенными интегралами (любимый лекционный курс Сонины), оригинальный подход к исследуемым вопросам.

10

Математические работы А. Н. Крылова

Выдающийся математик, механик и кораблестроитель Алексей Николаевич Крылов родился 15 (3) августа 1863 г. в с. Висяге Ардатовского уезда Симбирской губернии. В 1884 г. он блестяще окончил в Петербурге Морское училище, а в 1890 г. — Морскую академию (имя его, как лучшего слушателя, было занесено на мраморную доску). В дальнейшем вся научная и педагогическая деятельность Крылова была связана с Морской академией. Здесь он воспитал блестящую плеяду видных отечественных ученых, особенно в области кораблестроения.

А. Н. Крылов был выдающимся педагогом. Его педагогическое кредо — «научить учиться». Он считал, что никакая школа не может создать законченного специалиста. Необходимо только привить учащимся культуру, любовь к труду, к науке. По представлению Н. Е. Жуковского в 1914 г. Московский университет присудил Крылову ученую степень почетного доктора прикладной математики. В этом же году он был избран членом-корреспондентом, а в 1916 г. — академиком Российской академии наук. Перед самой Октябрьской революцией Крылов был генерал-лейтенантом морского флота и состоял членом Правления Российского общества пароходства и торговли. Умер А. Н. Крылов 26 октября 1945 г.

Перу А. Н. Крылова принадлежит 285 работ по математике, механике, астрономии, физике, технике, истории науки и техники и особенно много по теории корабля⁹². Отличительной чертой всех его работ является доходчивость изложения любых сложных вопросов. Во всяком изучаемом явлении он умело выделял главное и стремился довести результаты исследований до уровня, доступного пониманию инженеров, дать исчерпывающее решение поставленной задачи, довести решение до конкретного числового результата. Его девизом было направление творческих усилий на решение конкретных практических вопросов. Математику Крылов также умел применять к решению важнейших технических задач. Он по праву считается выдающимся ученым по теории приближенных методов анализа, имеющих первостепенное значение как для математики, так и для решения технических задач. Огромное влияние на научное творчество Крылова как математика оказали А. Н. Коркин, А. А. Марков, А. М. Ляпунов и особенно

⁹² А. Н. Крылов. Полн. собр. соч. Т. 1—12. Изд-во АН СССР, М., 1951.



А. Н. Крылов.

общая теория малых колебаний. Во второй главе изложен материал лекций А. Н. Коркина о методе в теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в частных производных. Третья глава посвящена первому методу Пуассона для интегрирования линейных дифференциальных уравнений с частными производными, четвертая и пятая — методу Фурье, названному Крыловым вторым методом Пуассона и иллюстрируемый им примерами колебаний струн и стержней. В шестой главе изложен новый метод Крылова для улучшения сходимости рядов Фурье. Этот метод является весьма остроумным, он основан на выделении из суммы ряда элементарных функций таким образом, чтобы уничтожить части коэффициентов ряда Фурье, медленно убывающие при возрастании номера n . Во многих случаях метод Крылова приводит к определению суммы ряда в конечном виде. В седьмой главе Крылов рассматривает общий метод интегрирования линейных дифференциальных уравнений с частными

П. Л. Чебышев, лекции которых он слушал в Петербургском университете после окончания Морской академии. Только благодаря творческому овладению математическими методами, он смог в своих работах доводить исследования до числовых результатов, которыми можно было пользоваться на практике. Решение же практических задач Крылова в его излюбленной области — кораблестроении — требовало не только применения математических методов, но и их усовершенствования.

Огромным вкладом в сокровищницу математики является работа Крылова «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах» (лекции, прочитанные им в Морской академии в 1912 г.). Впервые книга была издана в 1913 г. Она состоит из восьми глав. В первой главе изложена теория обыкновенных дифференциальных уравнений, введен символический способ нахождения решений этих уравнений, а также рассмотрена

производными и постоянными коэффициентами. В восьмой главе — исследует вынужденные радиальные колебания полого упругого цилиндра, чтобы дать пример уравнения с переменными коэффициентами и познакомить читателей с простейшими свойствами функций Бесселя.

Вторично книга издавалась в 1932 г. Внесенные в это издание дополнения (численное решение уравнений, которым определяются частоты малых колебаний материальной системы, анализ одной замечательной индикаторной диаграммы, исследования распространения тока по кабелю, продольных колебаний орудия при выстреле, вибрации судов) составляют около трети объема книги первого издания.

Остановимся несколько подробнее на предложенном Крыловым способе улучшения сходимости рядов Фурье. В первую очередь определяется порядок малости относительно $\frac{1}{n}$ у коэффициентов ряда Фурье (a_n и b_n) при разложении функций. Затем устанавливается, что если функция, представленная рядом Фурье, имеет разрывы в промежутке от 0 до 2π или ее значения в точках 0 и 2π не равны между собой, то коэффициенты в разложении будут первого порядка относительно $\frac{1}{n}$.

Величины при $\frac{1}{n}$ в выражениях a_n и b_n зависят только от величины скачков в значениях функции $f(x)$ в местах разрывов. Поэтому, если $f(x)$ представить в виде

$$f(x) = F(x) + \varphi(x)$$

и выбрать функцию $F(x)$ так, чтобы она имела те же скачки, что и $f(x)$, то разность $\varphi(x) = f(x) - F(x)$ будет разлагаться в ряд Фурье, коэффициенты которого имеют порядок не ниже второго. В свою очередь, если задано разложение некоторой функции в ряд Фурье, то при нахождении суммы этого ряда или при приближенном представлении этой функции первыми членами ряда для достижения одной и той же степени точности можно взять тем меньшее число членов ряда, чем выше их порядок относительно $\frac{1}{n}$. Крылов предлагает общий способ выделения функции $F(x)$. Оказывается, что всегда можно выделить функцию $F(x)$ таким образом, чтобы остаток был рядом Фурье, коэффициенты которого сколь угодно высокого порядка относительно $\frac{1}{n}$. Затем он показывает, как из данного ряда выделить члены, которые дают разрывы в самой функции или в ее производных в том случае, когда необходимо представить рядом производную первого или высшего порядка данной функции и когда эту производную нельзя найти непосредственным дифференцированием ряда. Это особенно важно учитывать при решении задач теории упругости. Предложенным Крыловым методом усиления быстроты сходимости рядов Фурье и нахождения производных от указанных функций можно также доказать (или проверить), что представленная рядом Фурье функция удовлетворяет тому дифференциальному уравнению, для которого она найдена как

решение, даже если бы сам ряд и нельзя было дифференцировать почленно необходимое число раз.

В рассмотренной работе Крылова исследованы различные случаи колебаний. Оказалось, что при этом получаются плохо сходящиеся ряды. Так возникла необходимость в создании метода, улучшающего сходимость рядов Фурье и им подобных. Метод Крылова основан, как мы видели, на выделении из суммы ряда элементарных функций таким образом, чтобы уничтожались те части коэффициентов ряда Фурье, которые медленно убывают при увеличении номера n .

«Лекции о приближенных вычислениях» Крылова — первый в мировой литературе курс приближенных вычислений. Этот курс Крылов прочитал в 1906 г. небольшому кругу лиц. Впервые «Лекции» были изданы литографированным способом. В предисловии к первому изданию Крылов писал: «Составленный мною курс лекций о приближенных вычислениях имеет целью показать: действительно применимые практические приемы и способы вычисления корней численных уравнений, вычисления определенных интегралов, пользования тригонометрическими рядами и приближенного решения дифференциальных уравнений. Главная забота при этом заключалась в том, чтобы показать, как и когда тем или иным приемом или способом пользоваться, а не в теоретической строгости обоснования самого приема или способа». «Лекции» состоят из восьми глав. Первая глава посвящена правилам приближенных вычислений, вторая — решению численных уравнений, третья — теории приближенных вычислений определенных интегралов. В четвертой главе описаны механические приборы для вычисления этих интегралов, в пятой — рассмотрено разложение функций в тригонометрические ряды, в шестой — приведены некоторые формулы из теории определенных интегралов, исчисления конечных разностей, а также формулы интерполирования. Приближенному интегрированию дифференциальных уравнений посвящена седьмая глава. В восьмой главе изложен способ наименьших квадратов.

Второе издание «Лекции» существенно дополнено. В нем изложены метод усиления быстроты сходимости и суммирования тригонометрических рядов, общий метод вычисления периодов и коэффициентов этих рядов, метод Адамса — Штермера численного интегрирования дифференциальных уравнений, а также метод наименьших квадратов в объеме, необходимом для инженеров.

Фундаментальным произведением Крылова, содержащим интересные математические результаты, является работа «О расчете балок, лежащих на упругом основании», где рассматриваются балки с постоянным и переменным сечениями.

В случае балки постоянного сечения выделяется такая прямолинейная форма равновесия, что нагрузка $F(x)$ в основном уравнении

$$EIy^{(IV)} + ky = F(x) \quad (47)$$

удовлетворяет условиям статики. Затем выделяется деформация, происходящая от внешней нагрузки без грунта. Для решения уравнения (47) инженеры применяли метод японского ученого Хаяси. Он был

очень громоздким: балку, к которой приложена нагрузка, требовалось разделить на отдельные участки между приложенными силами; кроме граничных условий на концах балки необходимо было составить четыре условия сопряженности для каждой точки соединения частей балки. Согласно же предложенному Крыловым методу требовалось определить только постоянные интегрирования из условий закрепления одного конца балки. Этот приближенный метод расчета балки Крылов обобщил на случай балки с переменным сечением. В рассматриваемой работе он предложил и точный метод решения уравнения (47), но более простым путем, по сравнению с ранее существовавшими методами.

Приближенный метод Крылова основан на обобщении метода Пуассона и заключается в следующем. Нагрузка $F(x)$ разлагается в ряд по решениям однородного уравнения, которые удовлетворяют поставленным предельным условиям. Сходимость полученного ряда улучшается особым методом поправок. Сначала определяется прогиб $y_0(x)$, получаемый без поддержания грунта, затем — прогиб $y_1(x)$ с учетом внешней силы, возникающей при оседании балки с прогибом $y_0(x)$, и т. д. Решение примет вид

$$y = y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1} + \eta_n,$$

где η_n удовлетворяет уравнению с измененной внешней нагрузкой. Если балка имеет переменное сечение, то рассматривают уравнения вида

$$[\sigma(x) y'']' + \Theta(x) y = F(x). \quad (48)$$

Проблемы конструирования корабельных установок, проблемы механики, приводящие к дифференциальным уравнениям, обусловили появление работы Крылова «Приближенное численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений» (впервые опубликована в 1923 г.). В ней сначала излагается, а затем уточняется метод Эйлера, приводящий дифференциальное уравнение к уравнению в конечных разностях и приводятся результаты, полученные Коши и Пикаром. Однако основной частью работы является рассмотрение метода Штермера и его связи с уточненным методом Эйлера.

Значительный научный и практический интерес представляет работа Крылова, посвященная нелинейным колебаниям «О применении способа последовательных приближений к нахождению решения некоторых дифференциальных уравнений колебательного движения.» Рассмотрение колебаний в технике приводит к интегрированию системы дифференциальных уравнений, в первую очередь второго и четвертого порядков. Крылов предложил свой метод решения уравнения

$$x'' + n^2 x + \alpha f(x) + \beta \varphi(x') = 0. \quad (49)$$

В работе «О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем» Крылов установил метод решения так называемого векового уравнения, которое в технических задачах бывает двух видов: 1) для систем без погашения колебаний; 2) для систем с погашением колебаний. Уравнения в первом случае отличаются по виду от векового уравнения небес-

ной механики. Значительно сложнее уравнения во втором случае. Крылов предложил практический метод численного решения векового уравнения и решения обоих указанных выше типов уравнений. Его метод значительно удобнее и проще методов Лагранжа, Лапласа, Якоби и Леверрье, применявшихся в небесной механике. Он основывается на возможности сведения нормальной системы дифференциальных уравнений к одному дифференциальному уравнению более высокого порядка.

Следуя традициям М. В. Остроградского, Крылов много внимания уделял вопросам баллистики. Все его работы по баллистике важны для исследования устойчивости движения снаряда. Особенно среди них выделяется работа «О вращательном движении снаряда во время полета». Установив аналогию между колебаниями оси вращающегося снаряда и движением мачты корабля при качке, Крылов ввел специальный угол между осью снаряда и плоскостью стрельбы, а также угол между касательной к траектории и проекцией оси снаряда на плоскость стрельбы. Оказалось, что эти углы во время стрельбы сохраняют малые значения. Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$\frac{d^2v}{ds^2} + [k^2 - p(s)]v = 0. \quad (50)$$

В задачах баллистики функция $p(s)$ задается либо графически, либо таблично, поэтому уравнение (50) можно решить приближенно. Крылов создал приближенный метод интегрирования этого уравнения. Ему принадлежит изобретение прибора, воспроизводящего движение оси снаряда.

В работе Крылова «О некоторых приемах приближенного интегрирования уравнений вращательного движения продолговатого снаряда» показано широкое применение численных методов интегрирования уравнений движения снаряда. «Заметки по баллистике» посвящены применению метода последовательных приближений и сравнению полученных результатов с другими методами. В статье «О продольных колебаниях орудия» излагается теория продольных колебаний ствола орудия и определяются граничные напряжения, которые возникают при этих колебаниях независимо от поперечных напряжений, вызванных действием газов внутри канала орудия.

Применение методов механики и математической физики в исследовании движения корабля позволило Крылову создать теорию корабля, в которой наряду с вопросами качки корабля на волнах глубоко изучается вопрос прочности конструкции всего корабля и отдельных его частей. Теории корабля посвящены его «Теория корабля», «Качка корабля», «Об усилиях, испытываемых кораблем на волне», «Общая теория качки корабля». Глубоким по содержанию является исследование «Вибрация судов», содержащее результаты, широко используемые также специалистами в области теории упругости.

А. Н. Крылову принадлежат также работы по теории компасов и гироскопов. За эти работы в 1941 г. он был удостоен Государственной премии.

ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

МАТЕМАТИКА В ПЕТЕРБУРГСКИХ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЯХ В 1890—1917 гг.

1

Социально-экономическое и культурное развитие России

В конце XIX — начале XX в. в России капитализм перерос в высшую и последнюю стадию своего развития — империализм. Наряду со сложившимися предпосылками буржуазно-демократической революции в стране началось вызревание условий, определивших победу социалистической революции. Хозяйственный подъем 1893—1899 гг. явился переломным периодом в развитии промышленности, ускорив процесс перехода ее на крупнокапиталистические рельсы. В это время усиленно создаются различные акционерные общества и монополистические объединения капиталистов типа синдикатов, происходит сращивание банковского капитала с промышленным. В экономику России все в большей и большей степени проникает иностранный капитал. К началу XX в. он имел около трети всех вкладов в русскую промышленность, особенно в горное дело и металлургию. Происходит процесс концентрации производства и рабочей силы. За десятилетие, с 1890 по 1900 г., количество фабрик и заводов увеличилось более чем на 18%, а число рабочих — почти на 67%. С развитием капиталистической экономики в стране вырастали новые города и новые промышленные центры, росла численность рабочих, занятых в промышленном производстве. Высокая концентрация рабочих наблюдалась в металлургической, каменноугольной и нефтяной отраслях промышленности. Различные отрасли промышленности развивались неравномерно. Неравномерным было и их размещение по географическим районам страны. Например, металлургия размещалась главным образом на Урале и Украине, добыча угля шла на Украине, машиностроение развивалось на Украине и в Петербурге, текстильная промышленность — большей частью в центральных губерниях, нефтяная — на Кавказе и т. д. Такое размещение требовало усиленного строительства железных дорог, что, в свою очередь, требовало повышения темпов развития металлургии и тяжелого машиностроения..

В сельском хозяйстве, хотя оно и подвергалось влиянию развивавшегося в стране капитализма, все же еще продолжали оставаться пережитки феодальных отношений, ибо в руках помещиков и кулаков

была сосредоточена значительная часть земли, причем многие их хозяйства велись полукрепостническими способами.

Вслед за промышленным подъемом 90-х годов Россию охватил экономический кризис (1900—1903 гг.), начавшийся с легкой промышленности и поразивший затем металлургию и машиностроение. В стране было закрыто свыше трех тысяч предприятий. В 1902 г., достигнув наибольшей глубины, этот кризис перешел в тяжелую и длительную экономическую депрессию. В период экономического кризиса в острой конкурентной борьбе победили наиболее мощные капиталистические объединения. Рост монополистического капитала сопровождался новым усилением эксплуатации рабочих, социального и национального гнета, ухудшением материального положения трудящихся, что явилось основой революционизирования народных масс. В начале XX в. Россия становится главным центром мирового революционного движения. Великие революционные подвиги рабочего класса России в период буржуазно-демократической революции 1905—1907 гг., выдающаяся революционная деятельность вождя трудящихся Владимира Ильича Ленина и созданной им партии большевиков оказали решающее влияние на весь ход всемирного исторического процесса, привели к победе социалистической революции в стране в октябре 1917 г.

Рост промышленности, самоотверженная борьба передовой части общества за права народа, за улучшение материального положения трудящихся в условиях их жестокой эксплуатации, повышение их культурного уровня сыграли, несмотря на тяжелый гнет царизма, свою роль в деле дальнейшего развития народного образования, науки и культуры в стране. Условия для развития науки и культуры были чрезвычайно сложными. Передовая общественность страны выдвигала широкую программу демократической перестройки народного образования. В эту программу входила прежде всего ликвидация неграмотности широких масс трудящихся. Ведь к концу XIX — началу XX в. 76% населения страны не умело читать, а среди женщин этот процент достигал 87. Три четверти крестьянских детей оставались вне начальной школы, в средней школе училось всего лишь 2% среднешкольного возраста детей. Во всех высших учебных заведениях страны в начале XX в. обучалось лишь около 120 тыс. студентов, из них в университетах — 36 тыс., что по отношению к количественному составу населения страны составляло ничтожный процент.

23 августа 1884 г. царское правительство утвердило новый университетский устав, который был тщательно очищен даже от формально числившихся остатков университетской автономии. В значительной степени возросла власть попечителей учебных округов. В их ведение входили и внутренние дела университетов, права советов которых были сведены до минимума. Пострадала и научная ценность читавшихся курсов: они были сведены к конспективному изложению одобренных министерством учебников.

После революции 1905 г. вопрос о специалистах встал в стране с новой силой, причем о специалистах не только для промышленности, но и для школ и высших учебных заведений, о врачах, агрономах,

юристах. Однако царское правительство не торопилось решать эту проблему. В явочном порядке в 1905 г. в Москве был открыт университет Шанявского — народный университет с двумя отделениями, академическим и научно-популярным, где читали лекции лучшие и наиболее передовые профессора. Общественность Ярославля обратилась к правительству с требованием открыть в Ярославле на базе лицея университет. Аналогичные заявления поступали из Вологды и Архангельска (требовали учредить в одном из этих городов университет в память М. В. Ломоносова, двухсотлетие со дня рождения которого исполнялось в 1911 г.), из Тбилиси, Иркутска, Ташкента и других городов. Но все эти ходатайства и предложения наталкивались на непреодолимую стену правительственного равнодушия и враждебности. С большим трудом удалось открыть только один новый университет — в Саратове — и то лишь с одним, медицинским, факультетом. Сохранилась большая переписка, растянувшаяся на много лет, с просьбами об организации в этом университете естественно-математического факультета, но эта просьба не была удовлетворена.

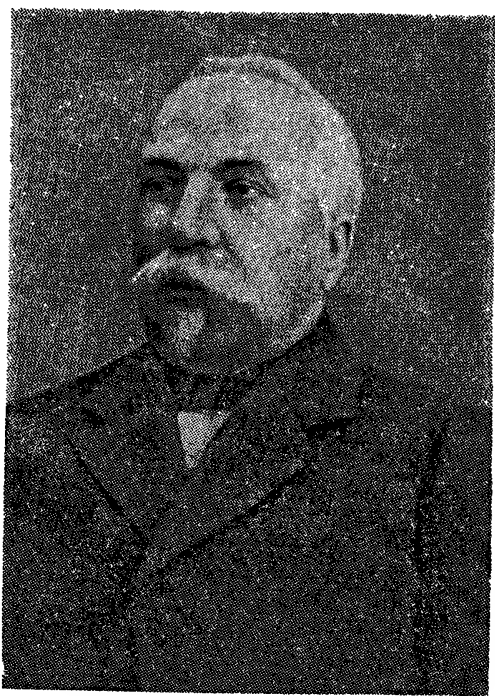
Итак, на октябрь 1917 г. в России было всего 91 высшее учебное заведение: университетов — 11, в девяти из них были физико-математические факультеты, высших женских курсов — 24, на десяти из них были физико-математические факультеты, высших технических и других учебных заведений — 16. Научные исследования проводились главным образом в Академии наук, на кафедрах высших учебных заведений и в научных обществах.

Тематика этих исследований носила как теоретический, так и практический характер.

2

Развитие математики в Петербургском университете. Петербургское математическое общество

Петербургский университет — один из старейших и крупнейших университетов нашей страны. С середины XIX в. он становится важнейшим центром научной мысли в России. В конце XIX — начале XX в. в университете работали такие ученые и педагоги, как А. Н. Коркин, А. А. Марков, А. М. Ляпунов, В. А. Стеклов, Ю. В. Сохоцкий, К. А. Поссе, Д. А. Граве, И. И. Иванов, И. Л. Пташицкий, Д. Ф. Селиванов, Н. М. Гюнтер. Они уделяли большое внимание подготовке молодых научных специалистов. В начале 80-х годов XIX в. на физико-математическом факультете был организован студенческий математический кружок, работой которого руководил А. А. Марков. Кружок выпустил в 1884—1885 гг. два тома «Записок», где было напечатано 11 научных работ студентов. Студенческие работы выходили и отдельными изданиями, например известный труд В. А. Маркова «О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке» (1892 г.).



Ю. В. Сохоцкий.

Кроме педагогической работы ученые вели также научные исследования, которые имели огромное значение для дальнейшего развития математики. Велико научное наследие известного педагога и замечательного лектора К. А. Поссе (1847—1928). Его магистерская диссертация «О функциях, подобных функциям Лежандра» (1873 г.) была одной из первых монографий, в которой систематически и оригинально изложены многие результаты, относящиеся к теории ортогональных многочленов.

Ортогональные многочлены Поссе рассматривал в духе Чебышева, как знаменатели подходящих дробей при разложении в непрерывную дробь интеграла

$$\int_a^b \frac{f(z) dz}{x - z}. \quad (1)$$

Вместе с тем для получения такого рода разложений он использовал интеграл типа Коши. Изложив сначала общую теорию ортогональных многочленов, Поссе применил ее к специальному случаю, когда в интеграле (1)

$$f(z) = (1 + z)^{\alpha-1} (1 - z)^{\beta-1}, \quad a = -1, \quad b = 1,$$

и получил многочлены Якоби $T_n(x)$, удовлетворяющие условию ортогональности

$$\int_{-1}^1 T_m(x) T_n(x) (1+x)^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = 0, \quad m \neq n.$$

Многочленам Якоби отведена основная часть диссертации, содержащая немало результатов, установленных и самим Поссе. В частности, применив предложенный Томе метод нахождения асимптотических выражений для интегралов линейных дифференциальных уравнений, он впервые нашел для этих многочленов асимптотическую формулу

$$T_n(x) \approx \frac{t^n}{\sqrt{\pi n}} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2} - \beta} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2} - \alpha},$$

где $|t = x + \sqrt{x^2 - 1}| > 1$.

Поссе подробно рассмотрел также ультрасферические многочлены $J_n(p, x)$, полученные из многочленов Якоби при $2\alpha = 2\beta = p$, где p — целое положительное число. Оригинальный метод применен им

для получения ортогональных многочленов Чебышева — Эрмита $\varphi_n(x)$: в формулах для $J_n(p, x)$ он положил $p = 2\omega + 2$, вместо x подставил $\frac{x}{\omega}$ и перешел к пределу при $\omega \rightarrow \infty$. Оказалось, что многочлены $\varphi_n(x)$ связаны с многочленами Якоби $T_n(x)$ соотношением

$$\varphi_n(x) = (-2)^n n! \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left\{ 2^{2\omega} \omega^{-\frac{n}{2}} T_n\left(\frac{x}{\sqrt{\omega}}\right) \right\}.$$

Пользуясь своим методом предельного перехода, Поссе показал, что многочлены $\varphi_n(x)$ являются знаменателями подходящих дробей при разложении в непрерывную дробь интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} \frac{dz}{x-z},$$

и получил ряд других важнейших результатов:

1) представление

$$\varphi_n(x) = e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2});$$

2) дифференциальное уравнение

$$y_n'' - 2xy_n' + 2ny_n = 0,$$

частным решением которого являются многочлены $\varphi_n(x)$;

3) производящую функцию

$$\exp(2tx - t^2) = \sum_0^{\infty} (-1)^n \varphi_n(x) \frac{t^n}{n!};$$

4) разложение непрерывной функции $f(x)$ по многочленам $\varphi_n(x)$;

5) интегральное представление

$$\sqrt{\pi} \varphi_n(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(y + iu)^2 (2iu)^n du.$$

Методом предельного перехода Поссе получил также ортогональные многочлены $\psi_n(x)$, которые можно рассматривать как частный случай многочленов Чебышева — Лагерра $L_n^\alpha(x)$ при $\alpha = 0$. Он показал, что многочлены $\psi_n(x)$ являются знаменателями подходящих дробей при разложении в непрерывную дробь интеграла

$$\int_0^{\infty} e^{-z} \frac{dz}{x-z},$$

вывел формулу

$$\psi_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

и получил дифференциальное уравнение

$$xy_n'' + (1 - x)y_n' + ny_n = 0,$$

для которого многочлены $\psi_n(x)$ являются частными решениями.

Непосредственным продолжением магистерской диссертации является монография Поссе «О некоторых применениях алгебраических непрерывных дробей» (1886 г.), в которую включены результаты, полученные им в работе «К вопросу о предельных значениях интегралов или сумм» (1885 г.). Монография состоит из пяти глав. В двух из них изложена общая теория ортогональных многочленов и многочленов Якоби $T_n(x)$. Остальные посвящены приложениям, относящимся к оценкам предельных величин интегралов и квадратурным формулам.

Большое внимание Поссе уделил исследованию квадратурной формулы Гаусса

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k),$$

точной, если функция $f(x)$ представляет собой многочлен степени не выше $2n - 1$. В частности, беря в качестве $p(x)$ вес $(1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$, определяющий многочлен Якоби, он нашел соответствующие числа A_k и x_k для трех случаев: $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$; $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$; $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$. Из этих случаев только первый был известен по работе Ф. Мелера (1864 г.).

Докторская диссертация Поссе — «О функциях ϑ от двух аргументов и о задаче Якоби» (1882 г.). Функции ϑ были введены, по существу, Якоби в 1832 г. и подробно рассмотрены Розенгайном в 1846 г. в связи с решением задачи Якоби об обращении ультраэллиптических интегралов. Впоследствии (в 1867 г.) их обобщил и рассмотрел с новой точки зрения Риман.

Поссе обозначил функции ϑ от двух независимых переменных v_1 и v_2 символом

$$\vartheta \left[\begin{matrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{matrix} \right] (v_1, v_2),$$

где g_1, g_2, h_1, h_2 — данные целые числа, и в соответствии с Риманом определил их при помощи двойных рядов:

$$\vartheta = \sum \exp \left[\sum_{k=1}^2 \left(n_k + \frac{1}{2} g_k \right) (2v_k + h_k \pi i) + \Phi \left(h_1 + \frac{1}{2} g_1, h_2 + \frac{1}{2} g_2 \right) \right],$$

где суммирование распространяется на все целые значения чисел n_1 и n_2 от $-\infty$ до $+\infty$, а Φ — квадратичная форма сложных аргументов. В первой части диссертации выведены основные свойства функций ϑ . Окончательные результаты приведены к такой форме, от которой нетрудно перейти к соответствующим формулам Вейерштрасса. Во второй части — изложено решение задачи Якоби по методу Римана. Для

того чтобы получающиеся при этом результаты совпадали по форме с результатами первой части, Поссе применил свой способ обращения многосвязной поверхности в односвязную, отличающийся от способа Прима, занимавшегося детальной обработкой идей своего учителя Римана. Ценность диссертации состоит в том, что в ней предпринята попытка объединить три разных по методам направления в области, связанной с решением задачи Якоби, — направление самого Якоби, Вейерштрасса и Римана. Кроме того, это первая большая работа петербургского математика, в которой реализованы идеи Римана в теории функций комплексного переменного.

После ухода К. А. Поссе в 1899 г. на должность профессора был назначен Иван Львович Пташицкий, уроженец Виленской губернии. По окончании Петербургского университета в 1876 г. он был оставлен для совершенствования своих знаний на два года при университете, а затем послан на два года в Париж. В 1881 г. Пташицкий защитил магистерскую, в 1888 г. — докторскую диссертацию. С 1882 г. преподавал в Петербургском университете, сначала в качестве приват-доцента, затем — профессора, а с 1890 г. — также в Михайловской артиллерийской академии. Научные интересы его были сосредоточены на интегрировании алгебраических функций. Этой теме он посвятил обе диссертации и несколько статей.

Магистерская диссертация Пташицкого — «Об интегрировании в конечном виде иррациональных дифференциалов» — посвящена интегрированию в конечном виде дифференциалов, содержащих рационально x и корень целой положительной степени из целого многочлена, и представляет собой подробное с оригинальными доказательствами изложение результатов, полученных Чебышевым в работе «Об интегрировании иррациональных дифференциалов». Сначала Пташицкий, дал свое доказательство теоремы, сформулированной Чебышевым и впервые доказанной итальянским математиком Пиума в 1861 г., о том, что рассматриваемый вопрос сводится к задаче о выражении интеграла $\int \frac{Pdx}{Q^m \sqrt{R}}$, где P , Q и R — целые многочлены, одним логарифмическим членом. Затем он получил алгебраическую теорему, к которой приводится эта задача в случае, когда m — простое число. Во второй части работы теорема применена для случая $m = 2$.

Прямым продолжением магистерской диссертации Пташицкого является его докторская диссертация «Об интегрировании в конечном виде эллиптических дифференциалов». В ней обстоятельно и полно изложены соответствующие исследования Абеля, Чебышева и Золотарева. Главное же в диссертации — новый метод решения вопроса о выражении в конечном виде интеграла

$$\int \frac{x + A}{\sqrt{x^4 + lx^3 + mx^2 + nx + p}} dx.$$

Почти одновременно с Пташицким в университет пришел Д. Ф. Селиванов (1855—1932). Дмитрий Федорович Селиванов родился в г. Городище Пензенской губернии. В 1873 г. окончил гимназический

курс и поступил на физико-математический факультет Петербургского университета. После окончания университета в 1878 г. был оставлен в нем для подготовки к ученому званию. В 1880—1881 гг. совершенствовал свои знания в Париже, где слушал лекции Эрмита, а в 1882—1884 гг. — в Берлине, где в это время читали Кронекер и Вейерштрасс. С конца 1885 г. он приват-доцент, а с 1905 г. — профессор Петербургского университета. Преподавал также в Петербургском технологическом институте и на Высших женских курсах.

В магистерской диссертации «Теория алгебраического решения уравнений» (1885 г.) Селиванов вполне успешно и квалифицированно выполнил поставленную задачу — «расположить в систематическом порядке все важнейшие результаты, до сих пор полученные, и насколько возможно облегчить изучение теории алгебраического решения уравнений». Обстоятельно и с большим знанием дела он изложил также свои научные достижения в докторской диссертации «Об уравнениях пятой степени с целым коэффициентом» (1889 г.), защищенной в Московском университете.

В Петербургском университете начал свою деятельность и сформировался как ученый Дмитрий Александрович Граве (1863—1939). Родился он в г. Кириллове Новгородской губернии. Отец его был уездным предводителем дворянства и земским деятелем. После смерти отца в 1871 г. семья переехала в Петербург. В 1881 г. Граве окончил с золотой медалью частную гимназию известного тогда педагога-математика Ф. Бычкова и поступил на физико-математический факультет Петербургского университета. Будучи еще студентом, он опубликовал в «Записках Физико-математического общества студентов Петербургского университета» за 1884 и 1885 гг. первые свои научные работы: «Об идеальной форме оптического стекла без сферической аберрации», «Об интегрировании одного класса совокупных дифференциальных уравнений» и «О поверхностях *minima*».

В 1885 г. Граве окончил университет и был оставлен при нем для подготовки к ученому званию. Через четыре года (1889 г.) он защитил магистерскую диссертацию и начал педагогическую деятельность в качестве приват-доцента университета и преподавателя Института инженеров путей сообщения. В 1893 г. был издан его «Курс аналитической геометрии». В 1892—1894 гг. он принимал участие в работе над многотомным «Энциклопедическим словарем», издававшимся Брокгаузом и Ефроном, где поместил ряд статей (не вошедших в известные указатели его сочинений), в том числе и больших по объему — «Геометрия», «Дифференциальное исчисление», «Интегральное исчисление», «Интегрирование дифференциальных уравнений».

Тему магистерской диссертации «Об интегрировании частных дифференциальных уравнений первого порядка» Граве выбрал под влиянием докторской диссертации своего учителя А. Н. Коркина. Он рассмотрел систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, y, p_1, p_2, \dots, p_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, g, \quad (2)$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — независимые переменные; y — искомая функция этих переменных; $p_k = \frac{\partial y}{\partial x_k}$. В этой работе Граве дал новое доказательство основной теоремы Коркина об условии существования решения y , общего для двух уравнений вида (2); изложил свой метод интегрирования системы (2), являющийся обобщением соответствующего метода Якоби; применил метод Коркина к решению обобщенной задачи Коши — интегрировать замкнутую систему g уравнений ($g \leq n$) так, чтобы искомая функция y при частных g значениях независимых переменных обращалась в произвольно заданную функцию остальных (при этом оказалось, что исследования Майера по линейным уравнениям и метод Ли являются частными случаями метода Коркина); рассмотрел систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка задачи трех тел и решил задачу, предложенную Коркиным, о нахождении всех интегралов этой системы, не зависящих от закона действия сил.

Докторской диссертацией «Об основных задачах математической теории построения географических карт» (1896 г.) — Граве, опираясь на труды Эйлера, Лагранжа, Гаусса, Чебышева, Коркина, Маркова, Дарбу, внес свой существенный вклад в решение проблем дифференциальной геометрии, имеющих прямое отношение к картографии. Он считал, что большое практическое значение имеют карты, сохраняющие площади, и поэтому взялся за решение поставленной Коркиным задачи — найти сохраняющие площади проекции шара на плоскость так, чтобы меридианы и параллели изображались прямыми или окружностями, т. е. такими линиями, которые «просто вычерчиваются». Граве решил эту задачу, найдя 11 видов проекций и доказав, что они являются единственно возможными. Выгоднейшими из них, по мнению Граве, являются те, у которых взаимно ортогональные линии, изображающие на карте меридианы и параллели, — прямые. При любом способе проектирования земной поверхности на плоскость (карту) получится искаженное изображение поверхности, поэтому весьма важно сделать так, чтобы искажения были по возможности малыми для всех точек внутри контура изображаемой страны. Задача о нахождении «наименьшего искажения» — это задача об экстремуме. Она, как указывал Граве, сама по себе неопределенна, и ее можно понимать по-разному. В этом плане как теоретическое, так и практическое значение имеет теорема Чебышева, сформулированная им (без доказательства) в 1853 г., о том, что наиболее выгодной проекцией для изображения какой-нибудь части земной поверхности на плоскости является проекция, в которой на границе изображения масштаб сохраняет одну и ту же величину. Эту теорему впервые доказал Граве в докторской диссертации. Впоследствии, в статье «Доказательство обобщенной теоремы Чебышева» (1911 г.) он обобщил ее на произвольные поверхности с гауссовской кривизной постоянного знака. В связи с доказательством теоремы Чебышева Граве рассмотрел задачу Дирихле и предложил новый способ ее решения для алгебраических контуров. Диссертацию высоко оценили современники. Коркин, выступая на защите, сказал,

что Граве «укрепил традиции, установленные Эйлером и которым следуют все математики нашего университета», и его работа «обратит на себя всеобщее внимание и вызовет уважение всего ученого мира». Эрмит прислал Граве поздравление «с точки зрения алгебраиста», воздав тем самым должное его мастерству в алгебраических выкладках.

Из других работ Граве, относящихся к 90-м годам XIX в., заслуживает внимания статья «Об основных предложениях теории функций двух вещественных переменных» (1898 г.), в которой он за несколько лет до открытия Лебега применил, по существу, его метод интегрирования для вычисления одного определенного интеграла.

В 1899 г. Граве был утвержден профессором Харьковского университета, а в начале 1902 г. он переехал в Киев. О киевском периоде его научно-педагогической деятельности см. гл. XI.

Почти одновременно с Граве начал работать в Петербургском университете И. И. Иванов (1862—1939). Иван Иванович Иванов родился в небогатой семье, которая не могла дать ему гимназического образования. Сначала он учился во Владимирском уездном училище. Затем поступил в Петербургский учительский институт. Еще в студенческие годы опубликовал в журнале «Семья и школа» (в журнале был математический отдел) несколько небольших статей, свидетельствовавших о его большом интересе к математике и математических способностях. Поскольку выпускники института не получали аттестата зрелости и не имели права на поступление в университет, Иванов в 1884 г. был определен в Петербургский университет в качестве вольнослушателя. В этом ему содействовали П. Л. Чебышев, А. Н. Коркин, Ю. В. Сохоцкий и К. А. Поссе. Через два года, в 1886 г., он успешно выдержал государственные экзамены (о допуске его к экзаменам ходатайствовал А. А. Марков) и был оставлен при университете для подготовки к ученому званию. За время обучения в университете Иванов напечатал в «Записках Физико-математического общества студентов Петербургского университета» четыре статьи: «Суммирование трех рядов Эйлера», «Представление простых чисел в форме $x^2 + Ay^2$ », «Вывод двух формул Якоби» и «Некоторые предложения о простых числах». Основными направлениями этих работ являлись теория чисел и математический анализ. Теории чисел он посвятил магистерскую и докторскую диссертации.

С 1891 г. Иванов — приват-доцент, а с 1912 г. — профессор Петербургского университета. Почти 40 лет он был профессором и заведующим кафедрой высшей математики в Петербургском политехническом институте (со дня открытия института, 1902 г.).

Магистерской диссертацией «Целые комплексные числа» (1891 г.) Иванов внес существенный вклад в теорию делимости целых алгебраических («целых комплексных», по терминологии того времени) чисел, созданную в 70-х годах XIX в. независимо друг от друга Р. Дедекин-дом и Е. И. Золотаревым и имеющую важное значение не только в теории чисел, но и в других разделах математики. Диссертация состоит из четырех глав. В первой, вводной, главе изложены основные понятия и теоремы, относящиеся к алгебраическим числам. В остальных главах

Иванов оригинально и ясно изложил теорию Дедекинда. С помощью этой теории он получил основные результаты Золотарева, касающиеся разложения алгебраических чисел на идеальные множители, и пришел к выводу, что «разложение целых комплексных чисел на идеальные множители, данное Золотаревым, по существу своему то же, что и разложение Дедекинда». Таким образом, Иванов доказал, что теория идеальных множителей Золотарева может быть выведена из теории идеальных модулей Дедекинда. В статье «К теории делимости целых комплексных чисел» (1893 г.), непосредственно примыкающей к магистерской диссертации, он показал, что теорию идеальных модулей Дедекинда можно получить, в свою очередь, из теории идеальных множителей Золотарева. Доказательство эквивалентности двух существенно различных по форме теорий Дедекинда и Золотарева являлось принципиально важным потому, что оно позволило, во-первых, рассматривать эти теории как две равноценные грани общей и единой теории делимости алгебраических чисел и, во-вторых, применять при исследовании вопросов, связанных с алгебраическими числами, ту из них, которая в каждом конкретном случае является более эффективной.

В докторской диссертации «О некоторых вопросах, находящихся в связи со счетом простых чисел» (1901 г.) Иванов систематизировал и изложил в простой форме «строго установленные результаты» в области теории простых чисел, достигнутые Эйлером, Дирихле, Чебышевым, Мертенсом и др. В частности, в диссертации впервые изложены сообщенные Иванову А. А. Марковым две теоремы Чебышева:

1) как бы мало ни было число $\alpha > 0$, существует в ряде простых чисел $p_1, p_2, p_3 \dots$ бесчисленное множество пар таких последовательных чисел p_k и p_{k+1} , что

$$\frac{p_{k+1} - p_k}{p_k} < \alpha;$$

2) как бы ни было велико число $\mu > 0$, существует в ряде $p_1, p_2, p_3 \dots$ бесчисленное множество пар таких последовательных чисел p_k и p_{k+1} , что

$$p_{k+1} - p_k > \mu.$$

В докторской диссертации Иванов дал интересное обобщение одной теоремы, связанной с именами Чебышева и Маркова. В 1895 г. Марков доказал (в статье «О простых делителях чисел вида $1 + 4x^2$ ») теорему Чебышева, которую он восстановил по обрывку, найденному в бумагах Чебышева. По Чебышеву, если μ наибольший простой делитель чисел

$$1 + 2^2, \quad 1 + 4^2, \quad 1 + 6^2, \dots, \quad 1 + 4N^2,$$

то отношение $\frac{\mu}{N}$ возрастает беспредельно с возрастанием N . В этом же году Иванов в статье под таким же названием, что и у Маркова, обобщил эту теорему для чисел

$$A + a \cdot 1^2, \quad A + a \cdot 2^2, \dots, \quad A + a \cdot N^2,$$

где A и a — целые взаимно простые положительные числа.

Видным математиком, внесшим значительный вклад в развитие теории дифференциальных уравнений, был Н. М. Гюнтер (1871—1941). Николай Максимович Гюнтер родился в Петербурге. Окончил в 1894 г. Петербургский университет и был оставлен в нем для подготовки к научной деятельности. Его учителями были А. А. Марков и А. Н. Коркин. Преподавал Гюнтер в университете, в Институте инженеров путей сообщения и с 1893 г. — на Высших женских курсах. В дореволюционные годы он издал несколько учебников — большой курс «Аналитической геометрии», «Введение в анализ», «Высшую математику» и много литографированных пособий. Гюнтер — один из авторов широко известного «Сборника задач по высшей математике». «Огромная любовь к преподаванию своей науки красной нитью проходила через всю его деятельность, — писали о нем академики В. И. Смирнов и С. Л. Соболев. — Он преподавал всегда творчески... Лекции Гюнтера воспитывали особую культуру математической точности и строгости и привычку к ясному выражению мыслей»¹. Ранние научные труды Гюнтера, в том числе магистерская и докторская диссертации, относятся к теории дифференциальных уравнений — обыкновенных и в частных производных.

В магистерской диссертации «О приложениях теории алгебраических форм к интегрированию линейных дифференциальных уравнений» (1903 г.) рассматривается линейное дифференциальное уравнение

$$y^{(m)} + p_1 y^{(m-1)} + p_2 y^{(m-2)} + \dots + p_{m-1} y' + p_m y = 0, \quad (3)$$

коэффициенты которого являются рациональными функциями независимой переменной. Диссертация посвящена проблеме, которой интенсивно занимались видные математики второй половины XIX в. (Бриоски, Дарбу, Фукс, Хальфен и др.), — случаям, когда уравнение интегрируется в алгебраических функциях. Гюнтер предполагает, что некоторая алгебраическая форма (т. е. целая рациональная и однородная функция) степени n от некоторых m линейно независимых интегралов $y_1, y_2, \dots, y_m$ уравнения (3)

$$f(y_1, y_2, \dots, y_m), \quad (4)$$

коэффициенты которой — постоянные числа, равна, как функция x , корню рациональной функции. Далее определяет условия, удовлетворяющие уравнению (3) и форме (4) и достаточные для того, чтобы можно было при известном значении этой формы утверждать, что общий интеграл уравнения (3) является алгебраической функцией x , предлагает метод для составления общего интеграла, если уравнение (3) и форма (4) удовлетворяют указанным условиям, и рассматривает некоторые случаи, когда не все указанные условия выполняются, однако общий интеграл уравнения (3) является алгебраической функцией. Общую теорию он применяет затем к случаям $m = 2$ и $m = 3$, исследование которых и составляет основную часть диссертации.

¹ В. И. Смирнов, С. Л. Соболев. Н. М. Гюнтер. — Ученые записки Ленинградского университета, сер. матем., 1948, вып. 15, 14.

В докторской диссертации — «К теории характеристик систем уравнений в частных производных» (1913 г.) — Гюнтер рассматривает сложный и трудный вопрос теории дифференциальных уравнений в частных производных, которым занимались преимущественно французские математики в конце XIX и начале XX в., — Адамар, Делассью, Рикье и др. Он исследует систему уравнений в частных производных весьма общего вида, так называемую систему Рикье,

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_m, u_i; P_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}^{(i)}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

где u_i — неизвестная функция независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_m$, а $P_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m}^{(i)}$ — частная производная от функции u_i порядка не выше n_i , взятая α_1 раз по x_1 , α_2 раз по x_2 , ..., α_m раз по x_m , и решает для этой системы задачу Коши: найти значения производных $P^{(i)}$ на данной поверхности $x_m = \psi(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})$, если известны только некоторые первые из них.

Дальнейшие исследования Гюнтера связаны с проблемами математической физики. Они относятся к советскому периоду его научной деятельности.

Рассмотрим также постановку преподавания математики на Высших женских курсах, открытых в Петербурге в сущности в качестве второго университета. Как известно, проблема допуска женщин в русские университеты была поставлена передовыми кругами русской интеллигенции еще в начале второй половины XIX в. Однако из-за косности правительственных органов, в частности Министерства народного просвещения, вопрос этот не получил желательного разрешения вплоть до Великой Октябрьской социалистической революции. В качестве же паллиатива решения этого вопроса в последней четверти XIX в. начали организовываться отдельные «женские» университеты, получившие название высших женских курсов. Они создавались по инициативе передовой русской интеллигенции. В частности, в организации Высших женских курсов в Петербурге принимала участие С. В. Ковалевская.

Высшие женские курсы в Петербурге открылись 20 сентября 1878 г. в составе двух отделений — словесно-исторического и физико-математического — с трехгодичным сроком обучения. Через год прибавилось еще одно отделение — специально-математическое. На математическом отделении кроме алгебры, геометрии и тригонометрии читались высшая алгебра, аналитическая геометрия, дифференциальное и интегральное исчисления, теория чисел. Математику преподавали Н. И. Билибин, М. А. Тихомандрицкий, К. А. Поссе. В 1889 г. курсы были реорганизованы: установлен четырехгодичный, как в университетах, срок обучения, физико-математическое и специально-математическое отделения объединены в одно — физико-математическое с двумя разрядами — математическим и химическим. Преподавали на курсах в это время В. Г. Имшенецкий, И. В. Мещерский, Д. Ф. Селиванов, Д. А. Граве, В. В. Преображенский, С. Е. Савич, В. И. Станевич, П. А. Шифф, В. И. Шифф. В 1894—1900 гг. профессором и руководи-

телем учебной части на математическом разряде был Н. Я. Сонин. Он ввел дополнительные предметы — начала высшей геометрии (II курс), эллиптические функции и теорию вероятностей (IV курс). Таким образом, к началу XX в. на курсах читались все математические предметы университетского курса и в том же объеме, более того, изучались и такие предметы, которых в это время в учебном плане Петербургского университета не было, — начала высшей геометрии и теория функций комплексного переменного (они входили в университете в курс эллиптических функций). Высшие женские курсы сыграли большую роль в математическом образовании. Так, со дня основания по 1902 г. математический разряд окончило 150 слушательниц. Выпускницы курсов работали преподавателями математики в средней и высшей школах, сотрудниками научных учреждений, например в Пулковской обсерватории. Одна из первых выпускниц Вера Иосифовна Шифф преподавала на курсах. Составленные ею задачки по аналитической геометрии, дифференциальному и интегральному исчислению пользовались в свое время популярностью. Н. Н. Гернет и Л. Н. Запольская стали впоследствии профессорами математики советских вузов.

Устав 1863 г. предоставил университетам право «учреждать для усовершенствования совокупными усилиями какой-либо определенной части наук и для совещаний о способах к возвышению их уровня в университетах ученые общества». Петербургские математики воспользовались этим правом гораздо позднее других, и математическое общество в Петербурге было создано тогда, когда такие общества уже были в Москве, Казани, Харькове. Первое организационное собрание Петербургского математического общества состоялось 20 октября 1890 г. На нем присутствовали академики О. А. Баклунд, В. Г. Имшенецкий, А. А. Марков, профессора и преподаватели университета и других учебных заведений. Председателем общества был избран В. Г. Имшенецкий.

Общество было создано с целью «сближения лиц, интересующихся высшей математикой, чистой и прикладной, для взаимного обмена мыслей по вопросам, касающимся этой науки», поэтому в его работе принимали участие все «интересующиеся математикой» — не только математики, но и специалисты в смежных областях науки и техники. В момент организации общество насчитывало 36 членов, к началу 1893 г., когда был утвержден устав общества — 56, к концу XIX в. — 100. В совет общества входили О. А. Баклунд, Д. К. Бобылев, А. Н. Коркин, А. А. Марков, К. А. Поссе, И. Л. Пташицкий, Д. Ф. Селиванов, Ю. В. Сохоцкий (с 1892 г. бессменный председатель общества), В. И. Шифф и П. А. Шифф. Членами общества были математики Г. Ф. Вороной, А. Н. Крылов, Н. А. Сонин, Д. А. Граве, Н. М. Гюнтер, механики И. В. Мещерский, Г. В. Колосов, Н. Б. Делоне, астрономы С. П. Глазенап и А. А. Иванов, физики Н. Н. Пирогов (сын известного хирурга), Н. А. Булгаков, кристаллограф и геометр Е. С. Федоров, выдающиеся представители артиллерийской науки Н. А. Забудский и А. В. Гадолин; основатель и редактор прогрессивного журнала «Научное обозрение», математик по образованию, М. М. Филиппов. В числе

членов общества было 13 женщин, преимущественно выпускниц Высших женских курсов.

Основной формой работы общества являлись заседания, проводившиеся раз в месяц. На них слушались и обсуждались согласно уставу «сообщения членов о собственных научных исследованиях в области математических наук и рефераты по литературе этих наук». Допускались сообщения по теоретической математике, теоретической астрономии и математической физике. С 1890 по 1899 г., судя по издававшимся «Протоколам», проведено 70 заседаний, на которых 50 членов общества сделали 172 доклада и сообщения. Тематика этих докладов и сообщений относится преимущественно к математическому анализу (более 50 сообщений), теории дифференциальных уравнений и приложениям их к вопросам теоретической механики и математической физики.

16 декабря 1892 г. на заседании присутствовал и председательствовал почетный член общества П. Л. Чебышев. Он выступил с докладом «О приближенном вычислении одного интеграла», в котором, исходя из своей формулы для приближенного выражения $\sqrt{\frac{1}{x}}$, вывел приближенную формулу для вычисления определенного интеграла

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos m \varphi}{\sqrt{1 + r^2 - 2r \cos \varphi}} d\varphi,$$

сыгравшую важную роль в развитии теории ортогональных многочленов, и определил верхний предел погрешности. Чебышев применил также формулу приближенного вычисления дроби $\frac{1}{H-x}$ для приближенного вычисления определенного интеграла

$$\int_{-h}^h \frac{f(x) dx}{H-x}.$$

Общество провело ряд заседаний, посвященных выдающимся математикам — Р. Декарту, Н. И. Лобачевскому, К. Вейерштрассу. Специальным собранием общество почтило память великого математика П. Л. Чебышева. Наибольшее число сообщений сделали Д. А. Граве, Н. Я. Сонин, Ю. В. Сохоцкий, П. А. Шифф, Б. М. Коялович, Д. Ф. Селиванов, Н. Б. Делоне, И. И. Иванов, А. А. Марков, В. А. Марков. Большинство сообщений представляет собой либо обзоры и резюме опубликованных работ, либо первые варианты работ, опубликованных в дальнейшем. Однако немало было сделано и таких докладов (в том числе доклад Чебышева), которые нигде кроме «Протоколов» общества в свое время опубликованы не были.

К 1905 г. Петербургское математическое общество фактически прекратило свою работу (существовало лишь формально).

Математика в высших технических и специальных военных учебных заведениях

К началу двадцатого века в Петербурге было несколько высших технических учебных заведений: Институт инженеров путей сообщения, Горный и Технологический институты, Институт гражданских инженеров, Электротехнический и Политехнический институты.

В Институте инженеров путей сообщения математика читалась на первом и втором курсах. Ее объем был расширен за счет факультативных предметов. Так, И. В. Мещерский читал необязательный курс вариационного исчисления, интегрирование уравнений в частных производных, В. И. Станевич — основные понятия из высшей алгебры и приближенные методы вычисления определенных интегралов. В 1914 г. А. Н. Крылов приступил к чтению своего знаменитого курса «Приближенные вычисления».

Аналитическую геометрию и дифференциальное исчисление в 90-е годы в этом институте читал Д. А. Граве и Н. М. Гюнтер, интегральное исчисление — профессор Петербургского университета К. А. Поссе. В 1909—1910 гг. известный педагог Н. А. Рынин и М. В. Заустиновский начали читать курс начертательной геометрии.

Увеличилось число лекций по математике и в Горном институте. Преподавали здесь И. П. Долбня, П. О. Сомов, Н. М. Крылов и др.

В Технологическом институте в 90-е годы на первом курсе изучались аналитическая геометрия, высшая алгебра, дифференциальное исчисление и основные сведения из интегрального исчисления, на втором — интегральное исчисление. Наибольшее внимание уделялось практическим занятиям (3—4 часа в неделю). В институте в эти годы читали лекции В. Г. Имшенецкий, Д. Ф. Селиванов, Е. В. Борисов, Б. М. Коялович.

В 1882 г. на базе Строительного училища был создан Институт гражданских инженеров с пятигодичным сроком обучения. Математика читалась в нем на протяжении четырех семестров.

Одним из первых электротехнических учебных заведений в мире был Петербургский электротехнический институт, основанный на базе Технического училища Почтово-телеграфного ведомства. В этом институте серьезное внимание уделялось изучению теоретических предметов. Курс математики включал основы учения об интегрировании дифференциальных уравнений в частных производных. К середине 90-х годов преподавание математики расширилось. Содержание курса соответствовало примерно современной программе технических вузов (несколько шире охватывался раздел высшей алгебры, но не изучались такие разделы, как криволинейные и поверхностные интегралы, теория поля, векторная алгебра). Первым выборным директором института (1901—1906 гг.) был известный ученый, изобретатель радио А. С. Попов, а первым преподавателем математики — С. О. Войтинский.

Петербургский политехнический институт был открыт в составе четырех факультетов: коммерческого, кораблестроительного, электро-механического, металлургического. В 1908 г. прибавились механическое и инженерно-строительное отделения. На технических факультетах математике на первом курсе отводилось 6 часов лекций и 2 часа практических занятий в неделю, на втором — в I семестре 4—6 часов лекций и 2 часа практических, во II — 2 часа практических. Посещение практических занятий было необязательным. Кафедрой высшей математики на протяжении многих лет заведовал И. И. Иванов.

В Лесном институте математика изучалась в первых двух семестрах: в первом — аналитическая геометрия, во втором — основы дифференциального и интегрального исчисления. С 1880 по 1888 г. ее читал П. О. Сомов.

Высшая математика была одним из основных предметов на Высших женских политехнических курсах, состоявших из инженерно-строительного и электротехнического факультетов (открыты в 1905 г.) и Политехнических курсах Петербургского общества народных университетов (открыты в 1908 г.). На Высших женских политехнических курсах математика преподавалась 3 года. Высшая математика изучалась примерно в таком объеме, как в современных техникумах. Читали математику на Высших женских политехнических курсах И. П. Долбня и Д. К. Бобылев, на Политехнических курсах — М. Л. Франк и его ассистенты В. С. Гриман и М. Л. Кострикин.

В военных училищах и на первых курсах военных академий читался общий курс высшей математики. Так, в Артиллерийском училище в начале 90-х годов в младшем и среднем классах преподавались аналитическая геометрия, дифференциальное и интегральное исчисления, в старшем — интегральное исчисление; в Михайловской артиллерийской академии на высшую математику, считавшуюся вспомогательным предметом, отводилось до 4 часов в неделю в младшем классе. В Инженерном, Константиновском артиллерийском и Военно-топографическом училищах высшая математика читалась в среднем по 4 часа в неделю в каждом классе. Из них на практику отводилось 1—2 часа.

Весьма серьезно было поставлено преподавание математики в Военно-морской академии. В состав ее входили четыре отделения: гидрографическое, механическое, кораблестроительное и военно-морских наук. Математика читалась на всех отделениях. На первом курсе всех отделений изучали из дифференциального и интегрального исчислений определенные и неопределенные интегралы, в том числе способ Остроградского и теоремы Гюльдена; из теории рядов — признак Ермакова, ряд Лапласа; функции Лежандра, формулу Стирлинга, а также основные понятия о дифференциальных уравнениях и простейшие случаи их интегрирования. На втором курсе читались приложения дифференциального исчисления к исследованию кривых в пространстве и поверхностей, несобственные интегралы, дифференцирование и интегрирование интегралов по параметру, эйлеровы интегралы, геометрические приложения интегралов, криволинейные интегралы, тригонометрические ряды, эллиптические интегралы и эллиптические функции, основные понятия

теории функций комплексного переменного, системы уравнений в частных производных первого порядка и основные понятия вариационного исчисления. На третьем курсе изучали интегрирование некоторых уравнений математической физики, встречающихся в технике (колебание струны), метод Коши, метод Пуассона, приближенные методы интегрирования дифференциальных уравнений, а также устройство интегратора. Преподавали математику в академии известные ученые и педагоги высшей школы Г. А. Тиме (аналитическая геометрия, высшая алгебра, до 1908 г.), А. Н. Коркин (дифференциальное и интегральное исчисления, с 1867 по 1900 г.). На смену им пришли А. Н. Крылов (читал также приближенные вычисления и инженерно-морские науки), С. Е. Савич, П. О. Сомов и др. Практические занятия вели И. П. Колонг, А. Н. Крылов. С 1906 г. преподавали в академии И. И. Иванов, Б. М. Коялович, Н. М. Гюнтер, А. А. Адамов.

В Михайловской артиллерийской академии изучались кратные (двойные и тройные) интегралы и их приложения, интегрирование дифференциальных уравнений, в том числе и уравнений с частными производными 1-го порядка, эллиптические и другие специальные функции, т. е. основы теории функций комплексного переменного, а также теория вероятностей и применение ее к стрельбе и пристрелке. Теорию вероятностей читал генерал-майор Н. А. Забудский, общий курс высшей математики — И. Л. Пташицкий (до 1912 г.), И. П. Граве, Н. С. Будаев, В. И. Станевич, Е. В. Борисов.

В Николаевской инженерной академии почти до 1917 г. продолжал читать лекции П. Е. Рошин. В Главном инженерном училище преподавали Н. С. Будаев, Н. А. Фицтум фон Экстедт, Б. М. Коялович, В. Ф. Найденов, читавший лекции по анализу также в офицерской Военно-электротехнической школе. Практические занятия вели Б. Б. Пиотровский, С. В. Завадский, Д. Д. Сергиевский, подпоручик А. А. Саткевич, Д. В. Яковлев и др. В Константиновском артиллерийском и Военно-топографическом училищах математику читали Д. А. Граве, И. П. Граве, Н. М. Гюнтер и другие, в Морском инженерном училище — А. С. Попов, А. И. Пароменский и другие, в Морском корпусе — А. Н. Страннолюбский, позже А. Н. Крылов и др.

Рассмотрим научную и педагогическую деятельность математиков, преподававших в названных учебных заведениях.

Виктор Иванович Станевич, преподаватель Института инженеров путей сообщения, Политехнического института и Артиллерийского училища, занимался теорией чисел, прежде всего числами вида $4n + 1$ и $4n - 1$, а также асимптотическими формулами. В прогрессиях такого вида он нашел границы для числа простых чисел. Распределению чисел $4n + 1$ посвящен, в частности, его доклад, прочитанный на заседании Петербургского математического общества. В докладе Станевич обобщил некоторые результаты Пуанкаре. Его работы, посвященные этой тематике, примыкали к исследованиям И. И. Иванова. Иванов отмечал оригинальность результатов Станевича.

Евгений Васильевич Борисов — преподаватель Технологического института, Института инженеров путей сообщения, Михайловского

и Константиновского артиллерийских училищ и Петербургского университета. В 1890 г. он защитил магистерскую диссертацию «О приведении положительных тройничных квадратичных форм, по способу Зеллинга». А. А. Марков, учившийся вместе с Борисовым, весьма положительно отзывался как об этой, так и о других его работах и причислял его к лучшим ученикам Чебышева, Золотарева, Коркина. Студенческую работу Борисова «Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи непрерывных дробей», удостоенную серебряной медали, Марков, также представивший сочинение на эту тему, считал «самой солидной из всех».

Владимир Андреевич Марков (1871—1897) в 1892 г. окончил Петербургский университет. Еще будучи студентом, написал сочинение «О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке», в котором обобщил вопрос, поставленный и решенный Чебышевым. Полное решение этого вопроса он дал для полинома второй степени и частичное — для полиномов третьей и четвертой степеней, получив ряд новых результатов. Результаты, полученные в первой главе сочинения, позднее были развиты профессором А. П. Пшеборским. После окончания университета Марков по предложению А. Н. Коркина занялся вопросом о счете классов положительных тройничных квадратичных форм. Он доказал весьма трудные формулы Эйзенштейна, относящиеся к этому вопросу. Вскоре Марков закончил работу над магистерской диссертацией «О положительных тройничных квадратичных формах» (опубликована после его смерти). Диссертация содержала все главные моменты теории тройничных квадратичных форм, в нее не входил лишь вопрос о приведении форм, которому была посвящена названная выше работа Е. В. Борисова.

Преподаватель Политехнического института С. А. Богомолов был активным пропагандистом идей Лобачевского. Выступая на I и II всероссийских съездах преподавателей математики, он отстаивал идею о полезности изучения геометрии Лобачевского в средней школе.

Значительную роль в распространении геометрии Лобачевского сыграл в 80-е годы преподаватель Второго петербургского реального училища и Института гражданских инженеров М. С. Волков. Ему принадлежит первая попытка осветить идеи неевклидовой геометрии в курсе математики средней школы. В 1882 г. вышла его книга «Учение о пространстве, или рациональная геометрия», в которой наряду с системой Евклида изложены и основные направления геометрии Лобачевского. Однако Волков оставлял открытым вопрос о том, какой из двух постулатов — Евклида или Лобачевского — справедлив для реального пространства. В своих представлениях о пространстве он повторяет воззрения Канта, чем вводит в заблуждение читателя относительно сущности идей Лобачевского, стоявшего на материалистических позициях. Заметим, что более удачно этот вопрос, особенно с методологической точки зрения, разрешался в книге «Элементарная геометрия, в объеме гимназического курса» профессора Ващенко-Захарченко, вышедшей год спустя. В 1886 г. Волков издал «Пантригонометрию», являвшуюся в известной степени продолжением предыдущего труда.

В этом сочинении он дал обстоятельный и довольно удачный в научном отношении очерк аналитической теории тригонометрических функций, исходя из теории рядов и тригонометрии гиперболического пространства. Но и здесь при оценке роли Лобачевского в развитии геометрии сказались увлечение Волкова воззрениями Канта.

Евграф Степанович Федоров (1853—1919) был не только знаменитым кристаллографом, известным минералогом и геологом, но и выдающимся геометром. Именно благодаря глубокому проникновению в геометрию ему удалось открыть фундаментальные законы в области кристаллографии.

Математические способности Федорова проявились в раннем возрасте. В 16 лет, будучи учеником 2-й Петербургской военной гимназии, он начал работать над своей первой крупной монографией «Начала учения о фигурах». Оставив гимназию за год до окончания курса, уже усвоенного им, Федоров выдержал трудный конкурсный экзамен и поступил в Военно-инженерное училище. По окончании его в 1872 г. получил назначение в Белую Церковь подпоручиком саперного батальона. Но уже через два года Федоров оставил военную службу. Прослушав интересовавшие его предметы в Медико-хирургической академии, он поступил на химическое отделение Петербургского технологического института, где основное внимание уделил изучению физики и химии. В это же время Федоров принимал активное участие в деятельности общества «Земля и Воля». Поступил в общество он в 1876 г., но уже через год в его взглядах наметился переход от народничества к марксизму.

В процессе работы над упоминавшейся выше монографией Федоров заинтересовался кристаллографией и в 1880 г. поступил на третий курс Петербургского горного института, который успешно окончил (первым по списку) в 1883 г. С помощью друзей он получил кафедру геологии и минералогии в Московском сельскохозяйственном институте. Это назначение способствовало его научной деятельности. Одновременно (периодически) Федоров читал лекции в Петербургском горном институте. В 1905 г. он стал первым выборным директором Горного института (вторичное избрание его в 1910 г. было отменено правительством). В этот период научные заслуги Федорова получают мировое признание. Многие академии и научные общества избирают его своим членом. Однако в России сдержанно отнеслись к его успехам. В 1902 г. Федоров был избран только адъюнктом Академии наук (через некоторое время он отказался от этого звания).

Научная деятельность Е. С. Федорова отличалась богатством идей и исключительной многогранностью. В списке его работ более 500 названий, из них около 180 по кристаллографии, 130 по геометрии, 40 по минералогии. Заслуги Е. С. Федорова были оценены должным образом только после Октябрьской революции. В 1919 г. он был избран действительным членом Академии наук.

Первый большой труд — «Начала учения о фигурах» — Федоров закончил в 1883 г. (напечатан, благодаря поддержке академика А. В. Гадолина, в «Записках Минералогического общества» за 1885 г.).

В этой книге проявилось, по словам А. Е. Ферсмана, умение Федорова вносить методы и завоевания одной науки в область другой. Она содержала в зачатке большинство последующих его достижений по геометрии и кристаллографии. В ней дополнена элементарная стереометрия несколькими главами, малоразвитыми до него, дан вывод «параллелоэдров» — выпуклых многогранников, нацело заполняющих пространство при условии их равенства, параллельности и смежности по целым граням (автор положил их в основу своей теории строения кристаллов). Сам Федоров считал это сочинение дополнительным курсом по элементарной геометрии и писал, что в основу изложения его курса положено понятие об измерении телесного угла, совершенно аналогично тому, как в основе выводов планиметрии лежат понятия об измерении плоских углов. Кроме общих оснований учения о фигурах здесь изложены начала о симметрии, поясах, заполнении плоскости и пространства равными фигурами, а также о многогранниках высшей степени. Выведенные в монографии геометрические положения можно применять в кристаллографии. Однако Федоров не встретил поддержки у кристаллографов, минералогов и математиков. П. Л. Чебышев, по свидетельству Федорова, отказался принять рукопись для просмотра, говоря, что «этим отделом современная математика не интересуется». К. А. Андреев, писавший рецензию на книгу, также не смог дать достойную оценку ей: он не понял ее огромного значения для кристаллографии. Это, вероятно, можно объяснить тем, что определения и доказательства в работах Федорова по геометрии, как отметил Б. Н. Делоне, с математической точки зрения большей частью не отличаются строгостью и полнотой.

В капитальном труде Федорова «Этюды по аналитической кристаллографии» (1887 г.) учение о кристаллах связывается с определителями и проективной геометрией. Серия его работ посвящена симметрии и структуре кристаллов (объединена впоследствии им под общим названием «Начала анализа симметрии»). Она открывается брошюрой «Основные формулы аналитической геометрии в улучшенном виде» (1888 г.), что, по словам автора, является «азбукой анализа симметрии», и завершается классическим трудом «Симметрия правильных систем фигур» (1890 г.), содержащим первый вывод 230 пространственных групп симметрии (федоровских групп).

Особенно замечательным достижением Федорова в учении о симметрии было открытие закона структуры. Б. Н. Делоне писал: «Общий математический закон структуры один, и его нашел Федоров. К открытию этого закона в течение века были близки многие выдающиеся ученые, но они выводили только его частные случаи или некоторые следствия из него, самый же закон окончательно был найден Федоровым»². (Существенные результаты в этом направлении получил также немецкий математик Шенфлисс, высоко ценивший авторитет Федорова.) Большое значение имели и другие работы Федорова, выполненные им

² Б. Н. Делоне. Е. С. Федоров как геометр. — В кн.: Труды Института истории естествознания и техники АН СССР, т. 10, 1956, стр. 5.

в конце XIX — начале XX в. Он занимался не только теоретической кристаллографией. Ему принадлежит проект двукратного (теодолитного) гониометра для измерения углов на кристаллах, благодаря которому была в корне изменена методика исследования кристаллов, изобретение универсального оптического столика (столлик Федорова).

Федоров вложил много труда в развитие некоторых отделов новой (проективной) геометрии, где вместо основного элемента элементарной геометрии — точки — брались другие геометрические образы, например круги, шары, векторы, плоскости и т. п. Для этих элементов можно построить аналогичные системы первой, второй и третьей степеней (линии, поверхности, пространственные тела). Здесь могут быть системы большего чем три числа измерений. Например, система параллельных векторов в пространстве является четырехмерной. Отсюда следует, что точки пространства можно изображать на плоскости с помощью параллельных векторов. В этом случае длина векторов означает расстояние между изображенными точками пространства и плоскостью чертежа. Направление же стрелок векторов покажет расположение точки выше или ниже плоскости чертежа. Точки плоскости чертежа изобразятся точечными векторами, т. е. совпадут сами с собой. Этот прием можно использовать для изображения на плоскости элементарных частиц, из которых слагаются кристаллические структуры при изображении многокомпонентного состава сложных химических соединений. Многие системы, например геометрия векториальных кругов и шаров, геометрия параллельных векторов, разработаны Федоровым самостоятельно.

Не ограничиваясь разработкой отдельных вопросов новой геометрии, Федоров стремился популяризировать этот отдел математики. В специальном цикле лекций (в Горном институте) он подчеркивал прикладное значение методов новой геометрии в минералогии, петрографии и горном деле. Те, кому пришлось слушать этот курс, поражались изяществу и строгости его изложения, оригинальности созданной Федоровым системы названий.

По складу своего ума Федоров был геометром. Страстное увлечение геометрией проходит красной нитью через всю его жизнь. Исходя из геометрических представлений, он разработал классификацию кристаллических многогранников и теорию строения кристаллов, ряд теоретических вопросов минералогии, петрографии, горного дела.

Наиболее крупным трудом Федорова в области геометрии является его монография «Новая геометрия как основа черчения» (1907 г.). Она составлена по материалам лекций, прочитанных им в Горном институте, и содержит не только изложение основ новой геометрии, но и множество результатов, целиком принадлежащих автору. Очень удачно выработана терминология новых понятий.

В многочисленных статьях более позднего периода Федоров продолжал развивать и совершенствовать различные разделы новой геометрии и ее применений. Очень интересна его статья «Изображение структуры кристалла векториальными кругами» (1908 г.), где описывается новый метод изображения кристаллических решеток при по-

мощи точек кристалла по отношению к плоскости проекции, а степень удаленности изображаемых узлов решетки от плоскости проекции определяется по радиусам кругов. Исследования Федорова по геометрии получили развитие в работах многих математиков — Б. Н. Делоне, Н. В. Белова, Д. К. Фадеева, Буркхарда, Цессенгауза и др.

Видным ученым-математиком был Борис Михайлович Коялович (1867—1941), ученик А. Н. Коркина и А. А. Маркова. Магистерскую диссертацию — «Исследования о дифференциальном уравнении $udy - ydx = Rdx$ » — он защитил в 1894 г., докторскую — «Об одном уравнении с частными производными четвертого порядка» — в 1903 г.

В докторской диссертации Коялович нашел решения уравнения

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0,$$

остающиеся внутри некоторого контура и на нем самом конечными и непрерывными вместе со своими производными первых трех порядков. Эти решения он называл гипергармоническими функциями и стремился определить их так, чтобы они вместе со своими производными по нормали к контуру принимали на контуре некоторого прямоугольника наперед заданные значения. Первые две главы работы посвящены теории, в третьей — прикладного характера — рассматривается задача о равновесии упругой четырехугольной пластинки, закрепленной по краям и подверженной равномерному давлению. Таким образом, автор стремился довести поставленную задачу до численного решения и доказать сходимость полученных рядов, хотя и за счет сужения постановки задачи.

В этот же период Б. М. Коялович изучал вопрос о единственности некоторых решений линейных дифференциальных уравнений, о соотношениях между частными решениями дифференциальных уравнений первого порядка, о дифференциальных уравнениях с частными производными второго порядка и др. О результатах своих исследований он докладывал на заседаниях Петербургского математического общества. В 1891 г. он начал работать в Петербургском технологическом институте репетитором по математике, позднее читал лекции по математике и аналитической механике, преподавал также на Высших женских курсах и в других высших учебных заведениях. Был членом Ученого комитета Министерства народного просвещения и членом русской делегации Международной комиссии по реформе преподавания математики. После Октябрьской революции Б. М. Коялович продолжал педагогическую деятельность в ряде высших учебных заведений Ленинграда, написал несколько пособий по изучению курса математики в высшей школе.

Сергей Евгеньевич Савич (1864—1936) окончил университет в 1886 г. За студенческую работу «Методы вычисления определенных интегралов, полного и приближенного» он получил золотую медаль. В 1892 г. защитил магистерскую диссертацию «О линейных обыкновенных дифференциальных уравнениях с правильными интегралами». Эта книга была одним из первых значительных трудов по аналитической



И. П. Долбня.

теории дифференциальных уравнений на русском языке. О результатах исследования рациональных интегралов одного нелинейного дифференциального уравнения 3-го порядка Савич докладывал на заседаниях математического общества. С 1893 г. он читал в Петербургском университете теорию функций комплексного переменного, высшую и начертательную геометрию, впоследствии был профессором Петербургского электротехнического института и Высших женских курсов.

Владимир Иванович Смирнов (род. в 1887 г.), ученик В. А. Стеклова, преподавал в Институте инженеров путей сообщения и университете. В 1910 г. он окончил Петербургский университет и после представления работы «О формах равновесия упругой нити, находящейся под равномерным нормальным давлением» (1912 г.) был принят для подготовки к научной деятельности.

В этой работе он стремился изучить качественно возможные формы равновесия, пользуясь лишь эллиптическими интегралами без применения эллиптических функций Вейерштрасса, как это делалось раньше. В 1915 г. Смирнов выдержал магистерский экзамен, стал преподавателем университета и начал самостоятельные научные исследования.

Первые работы Смирнова посвящены теории униформизации алгебраических иррациональностей. Ему удалось найти простое (хотя и при помощи сложных построений) и, как отметили С. Л. Соболев и Г. М. Фихтенгольд, «изящное» решение задачи об униформизации любого неприводимого алгебраического уравнения при помощи фуксовых функций, однозначных и регулярных в единичном круге и имеющих последний своей естественной границей. Весьма характерным для его работ, связанных с задачей униформизации, является применение глубоких современных идей принципа выбора. Они основаны на рассмотрении не одной индивидуальной функции, а сразу целого семейства. При этом решение задачи ищется в виде предела последовательности функций данного семейства.

С задачей униформизации связана и магистерская диссертация Смирнова — «Задача обращения линейного дифференциального уравнения второго порядка с четырьмя особыми точками» (1918 г.). Задачу обращения дифференциального уравнения Гаусса с тремя особыми точками впервые решил Шварц. Но его результаты не распространялись непосредственно на уравнения с четырьмя особыми точками, так

как существенным было наличие еще одного свободного параметра, от значений которого зависело решение. Значительных успехов в теории обращения уравнений достиг А. Пуанкаре, который в своих мемуарах 1881 г. между прочим осветил основные вопросы, связанные с этим обращением. Но задача так и осталась нерешенной до конца. Смирнов в магистерской диссертации решил все вопросы об уравнении с четырьмя особыми точками, используя принцип выбора, подробное исследование группы уравнения и ряд других соображений. Он дал полную картину спектра уравнения, выяснив, для каких значений параметра задача обращения имеет однозначное решение. Результат, полученный им, весьма интересен: оказалось, что значения параметра, для которых обращение однозначно, заполняют целиком некоторый отрезок, и, кроме того, образуют еще две последовательности точек по обеим сторонам этого отрезка, стремящиеся к некоторым определенным пределам. Решение этой проблемы явилось большим вкладом в науку.

Больших успехов добился В. И. Смирнов в советский период своей деятельности.

Заметный след в развитии русской математической науки оставил Иван Петрович Долбня (1853—1912), ученик Г. А. Тиме. Он впервые нашел оригинальные решения применения математического анализа к теоретической разработке специальных дисциплин горнозаводского дела. Научные труды И. П. Долбни многочисленны и разносторонни. Глубокие исследования он провел главным образом по теории эллиптических функций и теории абелевых интегралов, а также частично по алгебре.

Долбня окончил Петербургский горный институт (1875 г.) и свыше 20 лет преподавал математику в средних военных учебных заведениях Оренбурга, а затем Нижнего Новгорода. В 1896 г. после защиты диссертации «Исследования по теории абелевых интегралов» он занял кафедру высшей математики в Петербургском горном институте. В последние два года жизни он был директором этого института.

Научное наследие И. П. Долбни состоит в основном из множества небольших статей и заметок, опубликованных главным образом в русских и французских математических журналах. Некоторые его статьи и заметки касались довольно частных вопросов, но в целом они охватывали ряд общих идей и методов. Долбня стремился разрабатывать методы на примерах, которые можно было бы доводить до числовых результатов. Так, теория эллиптических функций интересовала его скорее не как цель, а как средство для решения вопроса об интегрируемости в конечном виде и для приведения абелевых интегралов к низшим трансцендентным функциям. Им получено простое доказательство основной теоремы Абеля: необходимым и достаточным условием выражаемости интеграла от $\frac{p dx}{\sqrt{R(x)}}$ (где $R(x) = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2)$) в конечном виде является периодичность непрерывной дроби, на которую разлагается $\sqrt{R(x)}$.

С изяществом и простотой, по словам Д. Д. Мордухай-Болтовского, Долбня разработал так называемый трансцендентный метод инте-

грирования. Развивая предыдущие идеи, он показал, как вычисляется эллиптический интеграл

$$\int \frac{(x + A) dx}{\sqrt{R(x)}},$$

где

$$R(x) = x(x - 1)(x - \alpha)(x - \beta),$$

в случае, если он выражается в конечном виде. Продолжая свои исследования, Долбня переходит от этого интеграла к биномиальному интегралу аналитического типа и к общему интегралу

$$\int \frac{\varphi(x) dx}{\psi(x) \sqrt{R(x)}}.$$

Он выбирает весьма удобный путь выражения рассматриваемых интегралов с помощью вейерштрассовых эллиптических функций при указанных им определенных условиях. Это позволило ему получить более точные результаты по сравнению с результатами Е. И. Золотарева и О. И. Сомова. Он рассмотрел интегралы вида

$$\int \frac{(x + H) dx}{\sqrt[6]{(x - a)^3(x - b)^4(x - c)^5}} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4 + px + q}}.$$

Исследовал Долбня также приведение ультраэллиптических интегралов к эллиптическим. В этих его работах можно найти много любопытных примеров. В противоположность таким известным математикам, как Серре, Келле и другие, он занимался приведением к эллиптическим интегралам не только 1-го, но и 2-го рода. Долбня исследовал также приведение биномиальных интегралов к биномиальным интегралам низших порядков и эллиптическим, вопрос о сложении эллиптических интегралов, об аналогии между эллиптическими и тригонометрическими функциями, о геометрическом приложении псевдоэллиптических интегралов и элементарных методах их вычислений. Теории абелевых функций и интегралов посвящено наибольшее число его работ. Некоторые статьи и заметки, в которых излагалась переработка уже известных результатов, имеют методическое значение.

Часть работ Долбни, как упоминалось выше, посвящена алгебраическим вопросам. Еще в начале своей научной деятельности он интересовался решением алгебраических уравнений в радикалах. Так, в одной из первых работ, основываясь на абелевой форме решения в радикалах уравнения простой степени, Долбня доказывает теорему Галуа о необходимом и достаточном условии разрешимости в радикалах уравнения простой степени, уточненную Кронекером. Он нашел более конкретную (по сравнению с данной Кронекером) форму радикального выражения для корней алгебраического уравнения простой степени, разрешимого в радикалах, и доказал теорему о том, что если неприводимое уравнение простой степени n с целыми коэффициентами разрешимо алгебраически, то решение его зависит от уравнения степени $\frac{n-1}{2}$ с коэффициентами формы $a + \sqrt{b}$, где a и b — целые числа, определяемые конечным числом операций.

Профессор Петербургского политехнического института и других высших учебных заведений Алексей Алексеевич Адамов (1878—1927) основные свои труды посвятил асимптотическим разложениям цилиндрических функций и их производных и разложению в ряды по цилиндрическим функциям. В частности, он уточнил асимптотические выражения цилиндрических функций и их производных, которые были даны Дини. В 1907 г. Адамов опубликовал монографию «О разложении произвольной функции одной вещественной переменной в ряды, расположенные по функциям определенного рода». Здесь он стремился распространить метод Дирихле, примененный к разложению произвольной функции в тригонометрические ряды, на случай некоторых других разложений, встречающихся в анализе, и получил ряд новых результатов о разложениях по цилиндрическим функциям.

4

Исследования по приближенным методам и прикладным вопросам

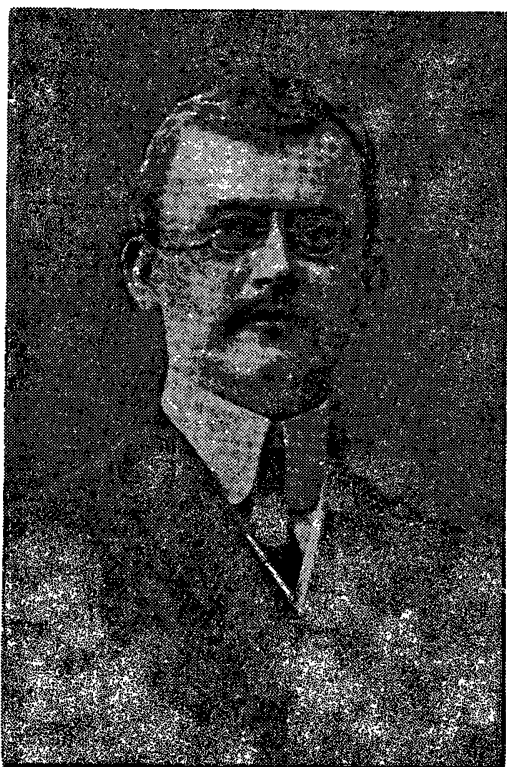
Приближенные методы и прикладные вопросы математики были предметом исследований прежде всего А. Н. Крылова³, Н. М. Крылова, И. В. Мещерского, Д. К. Бобылева.

Николай Митрофанович Крылов (1879—1955) окончил Петербургский горный институт (1902 г.). За сочинение по математике о геометрических приложениях псевдоэллиптических интегралов получил премию Тиме и был оставлен при институте для подготовки к профессорскому званию. В 1906 г. его посылают за границу, где он слушает лекции выдающихся ученых — Пуанкаре, Дарбу, Пикара, Лебега, Адамара, Бианки и др. С 1910 по 1917 г. Крылов — профессор Горного института. В 1911 г. он защищает диссертацию на степень адъюнкта Горного института по кафедре математики. С 1917 г. начинается новый период деятельности Крылова. Он переезжает в Киев (в Киевском университете получил звание доктора математики), затем, в 1917—1922 г., работает в Таврическом университете (в Крым он вынужден был уехать в связи с ухудшением здоровья). В 1922 г. его избирают действительным членом Академии наук УССР, и он возвращается в Киев. С 1925 г. Крылов — член-корреспондент, а с 1929 г. — действительный член Академии наук СССР.

Первые работы Н. М. Крылова относятся большей частью к разложениям функций в ряды, в том числе и тригонометрические, и применению полученных результатов к интегрированию дифференциальных уравнений и техническим приложениям.

В вопросе интегрирования линейных неоднородных дифференциальных уравнений основной метод математической физики сводился к разложению искомых интегралов в ряд по фундаментальным функциям, соответствующим рассматриваемой задаче. Но эти функции,

³ Деятельность А. Н. Крылова рассмотрена в гл. VIII.



Н. М. Крылов.

вообще говоря, численно были не известны, и поэтому их в свою очередь нужно было вычислять. Так возникла необходимость в создании новых, практически более подходящих методов. В известной степени эту задачу решил знаменитый английский физик Релей, предложивший для вычисления такой способ, в котором разложение искомого интеграла в ряд производится по легко вычислимым функциям, удовлетворяющим граничным условиям. В 1909 г. швейцарский ученый Ритц теоретически обосновал для некоторых случаев прием Релея, рассматривая данное дифференциальное уравнение как уравнение Эйлера, получающееся при варьировании некоторого интеграла. Иногда этот интеграл получался непосредственно из выражения потенциальной и кинетической энергии системы. Методом Релея — Ритца широко пользовались физики и инженеры

и в тех случаях, когда сходимость минимизированной последовательности к функции, удовлетворяющей исходному дифференциальному уравнению, оставалась недоказанной. Таким образом, метод Релея — Ритца, несмотря на большие преимущества, имел ряд существенных недостатков: пользуясь им, нельзя было прежде всего вычислить малость ошибки, а тем более дать конкретную оценку мажорации ошибки, получающейся при n -ом приближении.

Работы Н. М. Крылова, выполненные в рассматриваемый период, посвящены в значительной мере выработке новых приближенных методов интегрирования дифференциальных уравнений математической физики. Ему впервые удалось преодолеть многие трудности и получить весьма эффективные формулы для оценок погрешностей, получающихся при данном приближении. Тем самым был устранен основной недостаток метода Релея — Ритца, по крайней мере для обширного класса дифференциальных уравнений. В ряде работ Крылов, пользуясь результатами современной теории функций, усовершенствовал существующие и разработал целый ряд новых более эффективных методов приближенного интегрирования дифференциальных уравнений математической физики. Эти методы можно применять как для доказательства существования решения, так и для фактического его построения. Сходимость процесса он доказал наиболее пригодным для практики путем, а именно путем вычисления максимальной величины модуля ошибки, полученной при n -ом приближении. Важные новые результаты

получены им также при изучении сходимости интерполяционных формул и квадратур.

Основной научной работой Крылова, относящейся к петербургскому периоду его деятельности, является диссертация «О разложениях в ряды по фундаментальным функциям, встречаемых при интегрировании одного дифференциального уравнения с частными производными 4-го порядка, и о разложениях по полиномам Якоби» (1912 г.). В нее включены (целиком или частично) статьи, опубликованные им в 1910—1911 гг. Крылов рассматривает общее дифференциальное уравнение поперечных колебаний упругих стержней

$$\frac{d^2 \left[p(x) \frac{d^2 y}{dx^2} \right]}{dx^2} = -q(x) \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (5)$$

и получает решение в виде

$$y(x, t) = \sum_i \Phi_i(x) [c_i \cos(\sqrt{\lambda_i} t) + \dot{c}_i \sin(\sqrt{\lambda_i} t)].$$

В связи с этим возникает «задача чрезвычайной важности», которая и решается в первой части диссертации, — о разложении так называемых произвольных функций одной действительной переменной в ряды по фундаментальным функциям, относящимся к уравнению (5), т. е. о разложении в ряды по решениям этого уравнения для определенных значений параметра λ . Для решения задачи Крылов применил новый метод: образовал ряд, абсолютная и равномерная сходимость которого при соблюдении некоторых условий заранее известна, затем, воспользовавшись произвольностью в выражениях отдельных членов ряда, отождествил его почленно с разложением, которое предполагалось возможным для данной функции. В итоге он получил разложение функции $F(x)$, заданной «произвольно» в интервале (a, b) . Аналогичную задачу решали Миллер и Давидоглу. Однако Крылов получил для функции $F(x)$ «условия, наименее ограничительные». Этот результат он обобщил на случай дифференциального уравнения такого же вида, но высшего четного порядка.

Во второй части диссертации рассматривается задача о вынужденных колебаниях упругих стержней, к которой применяется теория интегральных уравнений и доказывается теорема о разложении «произвольной» функции по полиномам Якоби.

Непосредственно к диссертации примыкает статья «О некоторых разложениях в ряды интегралов линейных дифференциальных уравнений, удовлетворяющих определенным начальным условиям» (1911 г.), где Крылов обобщил теорему В. А. Стеклова о том, что всякая функция $f(x)$, представимая в форме

$$f(x) = \int_a^x \varphi(x) dx + c,$$

разлагается в равномерно сходящийся ряд по функциям Штурма — Лиувилля.

Другие научные работы Крылова, относящиеся к рассматриваемому периоду, как и диссертация, связаны в основном с вопросами математической физики. Курсы дифференциального и интегрального исчисления, читанные им в Горном институте, были изданы как пособия⁴. В советский период своей научной деятельности Н. М. Крылов создал в Киеве математическую школу, получившую широкую известность. Выдающимся ее представителем ныне является Н. Н. Боголюбов.

Иван Всеволодович Мещерский (1859—1935) окончил Петербургский университет (1882 г.) и был оставлен при нем для подготовки к профессорскому званию. Педагогическую деятельность он начал в 1890 г., в университете, с 1901 г. он преподаватель Института инженеров путей сообщения, а с 1902 г. — профессор Политехнического института. Наиболее важные его работы относятся к механике тел переменной массы. Фундаментальное уравнение динамики тел переменной массы получено им в магистерской диссертации «Динамика точки переменной массы» (1897 г.). Этим была открыта новая глава теоретической механики. В диссертации и работе «Уравнения движения точки переменной массы в общем случае» (1904 г.) Мещерский построил общую теорию движения точки переменной массы сначала для случая отделения (или присоединения) частиц, а затем для случая одновременного присоединения и отделения частиц. Он рассмотрел также множество частных задач о движении точки переменной массы.

И. В. Мещерский первый дал строгое уравнение вертикального движения ракеты и показал, в каких частных случаях это уравнение можно довести до числового результата. Ему принадлежит также решение задачи о колебании маятника переменной массы в сопротивляющейся среде. Для его построений характерны высокая математическая культура и строгая логика. Его труды явились научной основой для решения многих проблем реактивной техники, небесной механики и других областей науки. Выдающийся педагог, Мещерский радикально изменил преподавание курса теоретической механики, приблизив его к курсу прикладной механики. Он является автором наиболее популярного в нашей стране (выдержал более 30 изданий) задачника по теоретической механике. Этот задачник был принят как основное пособие также в американской высшей технической школе.

Дмитрий Константинович Бобылев (1842—1917) окончил кадетский корпус (1860 г.), Михайловскую артиллерийскую академию (1862 г.) и до 1864 г. служил в конной артиллерии. В 1866—1867 гг. он слушал лекции в Петербургском университете. Преподавал сначала в университете (в качестве приват-доцента), а затем в Институте инженеров путей сообщения, где в 1878 г. занял кафедру механики. В 1896 г. он был избран членом-корреспондентом Академии наук. Его работы по гидродинамике, электричеству, магнетизму имели большое значение для развития русской физической школы. Ему принадлежит, в частности, вывод (1873 г.) дифференциального уравнения 2-го порядка для определения давления жидкости.

⁴ Н. М. Крылов. Интегральное исчисление. СПб, 1919; Дифференциальное исчисление. СПб, 1914.



Здание Высших женских курсов.

Выдающимся педагогом и поборником высшего образования русских женщин был Александр Николаевич Страннолюбский (1839—1903), воспитанник Морского кадетского корпуса и Морской академии. Он преподавал в Морском училище почти 30 лет. У него учились началам анализа знаменитые русские математики С. В. Ковалевская и А. Н. Крылов.

Воспитанник Михайловской артиллерийской академии Борис Брониславович Пиотровский (1876—1929), преподававший в этой же академии с 1901 г. математику, механику и артиллерию, посвятил себя борьбе за реформу преподавания математики в средней школе. В 1912 г. он был назначен заместителем председателя Отдела математики Педагогического музея военно-учебных заведений в Петербурге. Преподавая математику в кадетских корпусах, он принимал также активное участие в работах комиссии по созданию новых программ по математике для кадетских корпусов. После Великой Октябрьской социалистической революции Пиотровский с увлечением и энергией включился в работу по созданию новой, советской школы, преподавал в Педагогическом институте им. Герцена и других педагогических учебных заведениях.

Сергей Георгиевич Петрович (1868—1926) в конце 90-х годов был репетитором по математике в Артиллерийском училище, а затем профессором Михайловской артиллерийской академии. Написал ряд книг по теории вероятностей и приложениям ее к стрельбе; ему принадлежат также литографированные курсы по теории функций комплексного переменного, эллиптическим функциям и различным отделам общего курса анализа.

ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В МОСКВЕ В 1890—1917 гг.

1

Преподавание математики в Московском университете и высших технических учебных заведениях. Деятельность Московского математического общества

В 1884 г. был принят наиболее реакционный в истории русских университетов устав. Университеты лишились даже формальной автономии, отменялась выборность их органов. Вся университетская жизнь подчинялась опеке министра и попечителя. С 1885 г. для поступления в университет требовалось удостоверение «о благонадежности» от полиции. По новому уставу на физико-математическом факультете были утверждены следующие кафедры: чистой математики, теоретической и практической механики, астрономии и геофизики, физики и физической географии, химии, минералогии и геологии, ботаники, зоологии, технологии и технической химии, агрономии. Уровень преподавания математики в университете был высоким. В конце XIX — начале XX в. здесь работали такие видные математики, как Н. Н. Лузин, Б. К. Млодзеевский, И. И. Жегалкин, Д. Ф. Егоров и др.

Из списка математических предметов, утвержденного в 1890 г. для студентов, получавших специальность математика, обязательными предметами являлись элементарная математика с упражнениями, введение в анализ, аналитическая геометрия, дифференциальное и интегральное исчисления, высшая алгебра, введение в теорию чисел, вариационное исчисление, теория вероятностей, дифференциальные уравнения. Начиная с третьего курса студент был обязан прослушать каждое полугодие кроме обязательных предметов, не менее шести часов по спецкурсу. В число спецкурсов входили высшая алгебра, высшая геометрия, теория чисел, теория эллиптических функций, теория функций мнимого переменного, интегрирование уравнений.

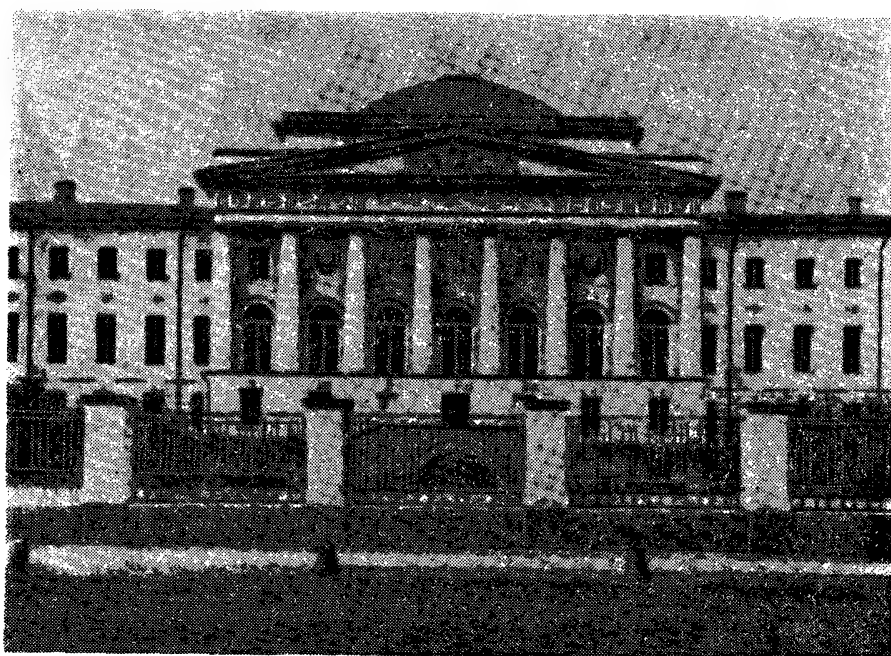
Первый курс по теории функций в университете прочитал профессор Б. К. Млодзеевский. Приват-доцент И. И. Жегалкин впервые начал читать лекции по абстрактной теории множеств (с 1906—07 учебного года — теорию множеств, затем бесконечные множества). Его магистерская диссертация «Трансфинитные числа» (1907 г.) содержала оригинальное изложение теории множеств.

Крутой поворот в развитии математики в Московском университете связан с деятельностью профессора Д. Ф. Егорова. Основная его заслуга состоит в том, что он начал пропагандировать в университете такие математические дисциплины, как теорию функций, теорию интегральных уравнений, современные методы вариационного исчисления и др. В 1910 г. Егоров организовал семинар по анализу. Семинар сыграл большую роль в создании московской математической школы: объединил и направил работу целой плеяды молодых математиков во главе с Н. Н. Лузиным. В нем принимали участие С. П. Фиников, В. В. Голубев, В. В. Степанов, И. И. Привалов. Егоров умело руководил научной работой своих учеников: ставил перед ними актуальные задачи, разработка которых открывала широкие перспективы для дальнейших исследований.

В 1914 г. в университете начал работать Н. Н. Лузин (в качестве приват-доцента). К этому времени он уже сделал много открытий, которые вошли в его диссертацию «Интеграл и тригонометрический ряд» (1915 г.). Лузин был исключительным лектором. Казалось, он творил по ходу лекции, на глазах аудитории. Лузин охотно делился занимавшими его мыслями с молодежью, ставя на лекциях, в беседах новые вопросы, предлагая новые подходы к решению задач математики. Вокруг Лузина организовалась группа его последователей и учеников. Трудно переоценить роль Лузина в развитии современной математики, в формировании советской математической школы (подробнее о нем см. настоящую главу, 3).

Прекрасным лектором был также В. Я. Цингер, который увлекательно читал курс лекций по высшей проективной геометрии.

В преподавании математики в Московском университете были достигнуты определенные успехи. Однако широкому развитию математики, как и других естественных наук, препятствовала вся система царского режима. Народные массы не имели доступа в высшие учебные заведения. На огромное государство приходилось лишь около 10 физико-математических факультетов. Научно-исследовательских институтов по математике не было, при университетах для научной работы выпускников оставляли редко и мало. Усилились репрессии министра просвещения Кассо. В начале 1911 г. во время студенческой ссоры в Московском университете по приказу Кассо в университет были введены войска. Репрессии обрушились не только на революционно настроенных студентов, но и на прогрессивную профессуру и руководство университета. Ректор и его помощники были уволены из университета. В знак протеста против реакционных мер Кассо многие прогрессивные преподаватели заявили о своем уходе из университета. Воспользовавшись этим, Кассо уволил всех неугодных ему лиц, даже тех, которые не заявили об отставке, всего около 150 профессоров, приват-доцентов и преподавателей, в том числе Б. К. Млодзеевского, А. К. Власова, С. А. Чаплыгина, И. И. Жегалкина, С. П. Финикова. Однако, несмотря на сложившиеся условия, количество студентов с каждым годом возрастало: в 1874 г. на всех курсах математического отделения училось 109, в 1885 г. — 341, в 1901 г. — 467, в 1914 г. — 1453 чел.



Московский университет (начало XX в.).

В конце XIX — начале XX в. в Москве было несколько высших технических учебных заведений: Техническое училище, Константиновский межевой и Сельскохозяйственный институты, Инженерное училище. Техническое училище с 1887 г. находилось в ведении Министерства народного просвещения. Основные положения нового устава училища, утвержденного в 1895 г., были сходны с положениями университетского устава 1884 г. Оно состояло вначале из двух отделений — механического и химического, — а в 1900 г. были открыты также инженерно-строительное и электротехническое. Инженерное училище принадлежало Ведомству путей сообщения. В 1913 г. оно было преобразовано в Московский институт инженеров путей сообщения. Константиновский межевой институт с 1899 г. находился в ведении Министерства юстиции. При этом институте долгие годы сохранялись подготовительные классы. Сельскохозяйственный институт, открытый в 1894 г. на базе Сельскохозяйственной академии, был закрытым высшим учебным заведением.

Основной курс математики в Техническом и Инженерном училищах изучался в первые два года обучения. В Инженерном училище на первом курсе для теории выделялось 4—5 часов, на втором — 2—3 часа в неделю. На практические занятия отводилось по 2 часа в год на обоих курсах. На первом курсе, как видно из обзора преподавания 1904 г., читались теория определителей, аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве, основания высшей алгебры и дифференциальное исчисление с приложениями к анализу и геометрии; во втором полугодии, кроме того, один час в неделю отводился на интегральное исчисление (интегрирование элементарных функций). На втором

курсе изучались интегральное исчисление с приложениями к геометрии, интегрирование дифференциальных уравнений, в том числе и линейных уравнений с частными производными первого порядка. В курс математики, читавшийся в Константиновском межевом институте, входили сферическая тригонометрия, высшая алгебра, аналитическая геометрия, математический анализ. Из спецкурсов здесь изучались основы теории вероятностей и способа наименьших квадратов, а также теория функций комплексного переменного, элементы вариационного исчисления и дифференциальной геометрии. Практические занятия официально были введены лишь в 1917 г.

В Техническом училище кафедру математики после профессора А. В. Летникова занял профессор Н. А. Шапошников, а кафедрой теоретической механики продолжал заведовать ее организатор и бесменный руководитель свыше 40 лет профессор Н. Е. Жуковский. Н. А. Шапошников продолжал и развивал научно-методические идеи А. В. Летникова, в содружестве с которым он работал на протяжении ряда лет. Несомненно также влияние Летникова и на научные интересы Шапошникова, занимавшегося теорией интегрирования дифференциальных уравнений. Широко известна педагогическая деятельность Шапошникова, автора многих статей и учебных руководств по различным отделам математики.

В Инженерном училище и Константиновском межевом институте алгебру, дифференциальное и интегральное исчисления и теорию вероятностей читал Л. К. Лахтин, воспитанник, а позднее и профессор Московского университета, ученик Н. В. Бугаева. Он работал в области алгебры, которой посвятил магистерскую и докторскую диссертации (первая — «Алгебраические уравнения, разрешимые в гипергеометрических функциях», 1893 г.; вторая — «Дифференциальные резольвенты алгебраических уравнений высших родов», 1896 г.). Большую научно-методическую работу здесь вели также К. А. Андреев, Е. А. Болотов, Д. Н. Горячев, С. А. Чаплыгин. Почти все они были авторами учебников и пособий. В Константиновском межевом институте математику преподавали кроме Л. К. Лахтина П. А. Некрасов, Н. А. Шапошников, С. А. Чаплыгин, Е. А. Болотов, И. И. Жегалкин, В. М. Лавров.

Ведущими преподавателями математики Московского института инженеров путей сообщения были профессора Московского университета Б. К. Млодзеевский, Д. Ф. Егоров, Л. К. Лахтин. Преподавали в институте также приват-доценты университета А. А. Волков, А. П. Поляков, И. И. Жегалкин, Н. К. Богоявленский, А. А. Дмитриевский, В. М. Коваленский и др.

В Сельскохозяйственном институте, состоящем из двух отделений — сельскохозяйственного и инженерного — с 1898/99 учебного года энциклопедию высшей математики (необязательный курс) читал Г. Г. Аппельрот, магистр прикладной математики, ученик Н. Е. Жуковского. Он же читал и курс механики. В 1913 г. были образованы две кафедры — математики и механики. Г. Г. Аппельрот остался на кафедре механики (до 1929 г.), а на кафедру математики штатным пре-



Н. Н. Лузин, Д. Ф. Егоров и В. Серпинский.

подавателем был избран приват-доцент Московского университета С. С. Бюшгенс. С осени 1913 г. он читал высшую математику на инженерном отделении.

Остановимся на деятельности Московского математического общества в рассматриваемый период.

В 1886 г., после смерти А. Ю. Давидова, президентом Московского математического общества был избран В. Я. Цингер. Под его руководством в Москве начали проводиться исследования по проективной геометрии. Он привлек к работе в этой области Егорова, Млодзеевского и Андреева. Последний избрал проективную геометрию своей основной специальностью. В дальнейшем московскую проективно-геометрическую школу возглавил выдающийся ее представитель А. К. Власов. Это направление деятельности московских математиков нашло отражение в работе математического общества.

Весьма значительными были исследования московских математиков в области дифференциальной геометрии. Как уже отмечалось, начало этому направлению положил К. М. Петерсон. В связи с исследованиями в области дифференциальной геометрии разрабатывалась теория дифференциальных уравнений с частными производными, читались доклады по этой тематике на заседаниях общества.

После Цингера президентом общества был Н. В. Бугаев. В этот период активное участие в работе общества принимали Егоров, Млодзеевский, Умов, Голицын, Жуковский, Власов и др. Их работы и определили основное направление деятельности общества.

Непродолжительное время (с 1903 по 1905 гг.) общество возглавлял П. А. Некрасов, ярый реакционер, выступавший против всего прогрессивного, против таких ученых, как А. А. Марков, П. Л. Чебышев. Но в 1905 г. его сменил крупнейший ученый Н. Е. Жуковский, оставшийся на этом посту до конца своей жизни (1921 г.). Роль Жуковского, одного из величайших механиков, в деятельности общества трудно переоценить. Он был выдающимся руководителем общества, ему оно обязано направлением своей работы в течение многих лет и многими лучшими своими традициями. Вся научная деятельность Жуковского была тесно и непосредственно связана с обществом. На заседаниях общества им прочитано 114 докладов, в которых нашло отражение все его научное творчество.

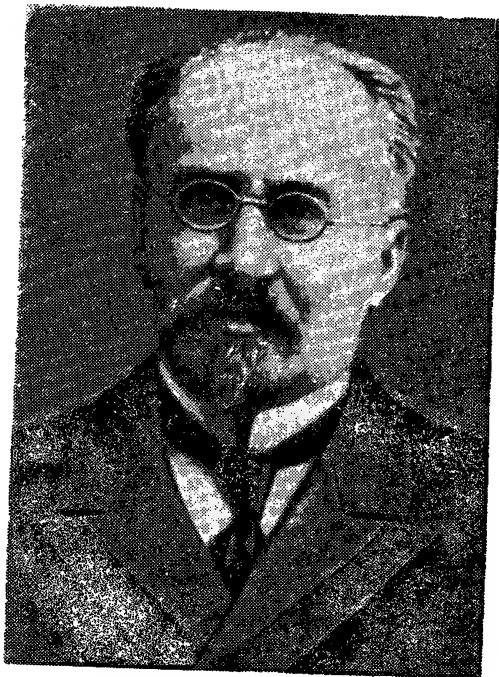
2

Московская школа дифференциальной геометрии

Наиболее выдающимся представителем школы дифференциальной геометрии, основанной К. М. Петерсоном, является Б. К. Млодзеевский.

Болеслав Корнелиевич Млодзеевский (1858—1923) родился в Москве в семье врача, профессора Московского университета. В 1876 г. он окончил с золотой медалью гимназию и поступил на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета. Здесь в это время работали такие выдающиеся русские ученые, как астроном Ф. А. Бредихин, физик А. Г. Столетов, механики Ф. А. Слудский и А. Ю. Давидов, геометр В. Я. Цингер. Впоследствии Цингер стал самым близким наставником Млодзеевского.

Университет Млодзеевский окончил в 1880 г. Представив сочинение «Классификация плоских кривых 3-го порядка», он был оставлен при университете для подготовки к профессорскому званию. В 1886 г. защитил магистерскую диссертацию — «Исследования об изгибании поверхностей», а спустя четыре года — докторскую — «О многообразиях многих измерений» (1890 г.). Защита докторской диссертации дала ему возможность получить полугодовую командировку за границу, где он слушал лекции Дарбу, Эрмита, Клейна и Шварца. Последний произвел на молодого ученого особенно сильное впечатление. По возвращении в Москву Млодзеевскому было присвоено звание



Б. К. Млодзеевский.

экстраординарного профессора. В 1911 г. в знак протеста против реакционной политики царского министра просвещения Кассо Млодзеевский вместе с группой прогрессивно настроенных профессоров ушел из университета (возвратился лишь после Февральской революции 1917 г.). Как в эти годы, так и позднее, он преподавал на Высших женских курсах в Москве, принимал активное участие в работе Московского математического общества (после смерти академика Н. Е. Жуковского, в 1922 г. был избран его президентом).

Первым крупным исследованием Б. К. Млодзеевского следует считать его магистерскую диссертацию «Исследования об изгибании поверхностей». Диссертация была опубликована в 1887 г. в «Ученых записках Московского университета» (вып. 7). Важнейшим ее результатом является вывод

общего уравнения изгиба, которое оказалось уравнением второго порядка, линейным относительно вторых производных от искомой функции и их дискриминанта. Другим важным результатом, полученным в магистерской, а затем развитым в докторской диссертации, является разработка теории дифференциальных инвариантов квадратичных форм. Если

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (1)$$

является инвариантной квадратичной формой, то, полагая

$$x^i = \varphi^i(x'^1, \dots, x'^n),$$

получим

$$ds^2 = g'_{kl} dx'^k dx'^l = g_{ij}(\varphi^1, \dots, \varphi^n) \frac{\partial \varphi^i}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial \varphi^j}{\partial x'^l} dx'^k dx'^l.$$

Функции

$$g'_{kl} = g_{ij}(\varphi^1, \dots, \varphi^n) \frac{\partial \varphi^i}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial \varphi^j}{\partial x'^l}$$

являются, по Млодзеевскому, дифференциальными инвариантами системы функций $\varphi^1, \dots, \varphi^n$.

Пусть

$$\Delta_1(\varphi^p) = G^{ik} \frac{\partial \varphi^p}{\partial x'^i} \cdot \frac{\partial \varphi^p}{\partial x'^k},$$

$$\nabla(\varphi^p, \varphi^q) = G^{ik} \frac{\partial \varphi^p}{\partial x'^i} \cdot \frac{\partial \varphi^q}{\partial x'^k},$$

где $G^{ik} = \frac{\partial \ln |g_{ik}|}{\partial g_{ik}}$, — два оператора. Это — основные инварианты функций для риманова многообразия (по современной терминологии), определенного квадратичной формой (1). Основным результатом докторской диссертации состоит в следующем: всякий инвариант скольких угодно функций $\psi, \theta, \dots$ может быть получен с помощью достаточного числа операций Δ_1 и ∇ над этими и над некоторыми другими, произвольно взятыми, функциями. Любопытно сравнить этот результат с содержанием одного из пунктов известного трактата Дарбу по теории поверхностей. Символ $\Delta_1(\varphi^p)$ есть не что иное, как первый дифференциальный параметр Бельтрами $\Delta\varphi$ (если ограничиться двумерным случаем):

$$\Delta_1(\varphi^p) = \Delta\varphi = \frac{1}{H^2} \left[E \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} \right)^2 - 2F \frac{\partial\varphi}{\partial u} \frac{\partial\varphi}{\partial v} + G \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} \right)^2 \right], \quad H^2 = EG - F^2.$$

Далее, ∇ есть символ, обозначенный Дарбу $\Delta(\varphi, \psi)$:

$$\nabla(\varphi^p, \varphi^q) = \Delta(\varphi, \psi) = \frac{1}{H^2} \left[E \frac{\partial\varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial v} - F \left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial u} \right) + G \frac{\partial\varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial u} \right].$$

Дарбу обнаруживает, что квадрат линейного элемента поверхности может быть представлен в виде

$$ds^2 = \frac{\Delta\psi d\varphi^2 - 2\Delta(\varphi, \psi) d\varphi d\psi + \Delta\varphi d\psi^2}{\Delta\varphi\Delta\psi - \Delta^2(\varphi, \psi)}.$$

Выражение, стоящее в знаменателе, есть $\theta^2(\varphi, \psi)$, где $\theta = \frac{1}{H} \cdot \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$ — дифференциальный оператор, которому он также присваивает имя Бельтрами. Дарбу показывает, что всякий инвариант, составленный из коэффициентов E, F, G и их производных и содержащий, кроме того, одну или много функций $\varphi, \psi, \dots$ и их производные до заданного порядка, может быть определен с помощью символов Бельтрами Δ, θ .

Сопоставление с несомненной очевидностью показывает тождество обоих результатов — Млодзеевского и Дарбу. Но результат, полученный Млодзеевским, следует признать более общим. Будучи в Париже, Млодзеевский пытался встретиться с прославленным французским геометром, чтобы в личной беседе выяснить вопрос о приоритете в указанном открытии, однако такой встречи ему добиться не удалось.

Весьма существенные результаты получены Млодзеевским по геометрическому истолкованию условий наложимости двух поверхностей. Одни условия истолковываются так: две поверхности налагаются одна на другую, если на каждой из них можно найти по такой системе линий, чтобы заключенные между соответствующими линиями дуги их ортогональных траекторий были равны на обеих поверхностях и имели в соответствующих точках равные геодезические кривизны. Другим дается такое истолкование: две поверхности налагаются одна на другую, если на них есть по две ортогональные системы линий, обладающие следующими свойствами: 1) линии первой системы имеют равную

геодезическую кривизну в соответствующих точках обеих поверхностей; 2) линии второй системы отсекают от соответствующих линий первой системы на обеих поверхностях равные отрезки; 3) дуги линий второй системы, заключенные между соответствующими линиями первой, равны на обеих поверхностях.

Развитию московской дифференциально-геометрической школы во многом способствовала разработка вопросов, ведущих свое начало от К. М. Петерсона: об изгибании поверхностей на главном основании, об изгибании поверхностей, получивших название поверхностей Петерсона, об изгибании поверхностей вращения и поверхностей второго порядка и др. В числе других этими вопросами занимался и Б. К. Млодзеевский.

Сопряженную сеть на поверхности называют главным основанием, если при непрерывном изгибании поверхности сеть остается сопряженной. Линия на поверхности называется конической (цилиндрической), если она представляет собой линию прикосновения некоторого конуса (цилиндра), касающегося поверхности. Поверхность, впервые отмеченная Петерсоном (и названная впоследствии его именем), есть та, у которой существует сопряженная сеть из конических (цилиндрических) линий. В параметрах u, v такой сети, как показал Петерсон, уравнения поверхности имеют вид

$$x = \frac{a + \alpha}{l + \lambda}, \quad y = \frac{b + \beta}{l + \lambda}, \quad z = \frac{c + \gamma}{l + \lambda},$$

где a, b, c, l — функции одного параметра u ; $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ — функции одного параметра v . Было обнаружено, что если главным основанием изгибания поверхности Петерсона является сеть из конических (цилиндрических) линий, то после изгибания сеть остается такой же, т. е. изогнутая поверхность есть также поверхность Петерсона.

Б. К. Млодзеевский решил до конца задачу о поверхностях переноса, показав, что существует только три семейства поверхностей Петерсона, допускающих изгибание на конических или цилиндрических линиях, как на главном основании: поверхности, производные от поверхностей вращения, поверхности переноса и минимальные поверхности. Следует принять во внимание, что под производными поверхностями от поверхностей вращения Млодзеевский понимает поверхности, полученные из поверхностей вращения путем изменения всех координат одного и того же меридиана в одном и том же отношении, изменяющемся от одного меридиана к другому. Эти классы поверхностей установил Петерсон, однако его результаты не были опубликованы, и Млодзеевскому пришлось их заново находить с помощью нового метода. Поверхности же переноса были хорошо известны. Каждая из них образована параллельным скольжением одной кривой вдоль некоторых траекторий. Такая поверхность может быть двумя способами расслоена на однопараметрическое семейство плоских конгруэнтных кривых (второе семейство представляет собой траектории), а потому ее уравнения могут быть записаны в виде

$$x = a(u) + \alpha(v), \quad y = b(u) + \beta(v), \quad z = c(u) + \gamma(v).$$

В 1866 г. Петерсон отметил два класса поверхностей

$$x = a(u) \alpha(v), \quad y = a(u) \beta(v), \quad z = b(u), \quad (2)$$

$$x = a(u) + \alpha(v), \quad y = b(v), \quad z = b(u). \quad (3)$$

Для изгибания их он вывел соответствующие формулы. Легко понять, что поверхность второго порядка есть частный случай поверхностей (2). Среди поверхностей второго порядка параболоиды относятся к типу поверхностей (3), т. е. являются некоторыми поверхностями переноса. Пользуясь формулами, полученными Петерсоном, Млодзеевский в работе «О деформации поверхностей» (1891 г., написана на французском языке), находит следующие изгибания поверхностей вращения:

$$x = a \sqrt{\alpha^2 + \beta'^2 + h - 1} \cos I,$$

$$y = a \sqrt{\alpha^2 + \beta'^2 + h - 1} \sin I,$$

$$z = \int_{u_0}^u \sqrt{b'^2 - (h-1) \alpha'^2} du,$$

$$I = \int_{v_0}^v \frac{\sqrt{(\alpha\beta' - \beta\alpha')^2 + (h-1)(\alpha'^2 + \beta'^2)}}{\alpha^2 + \beta^2 + h - 1} dv,$$

где h — произвольная постоянная.

Млодзеевский изучал также бесконечно малые изгибания, которые впоследствии стали предметом исследований большого коллектива советских геометров. Если изгибаемую поверхность в параметрах асимптотических линий задать формулами Лельевра

$$\begin{aligned} x &= \int \left| \begin{matrix} \beta & \gamma \\ \beta_u & \gamma_u \end{matrix} \right| du - \left| \begin{matrix} \beta & \gamma \\ \beta_v & \gamma_v \end{matrix} \right| dv, & y &= \int \left| \begin{matrix} \gamma & \alpha \\ \gamma_u & \alpha_u \end{matrix} \right| du - \left| \begin{matrix} \gamma & \alpha \\ \gamma_v & \alpha_v \end{matrix} \right| dv, \\ z &= \int \left| \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \alpha_u & \beta_u \end{matrix} \right| du - \left| \begin{matrix} \alpha & \beta \\ \alpha_v & \beta_v \end{matrix} \right| dv, \end{aligned} \quad (4)$$

где α, β, γ — частные решения уравнения Мутара

$$\Theta_{uv} = k\Theta$$

(k — данная функция от u, v), то вектор изгибающего поля в параметрах сопряженной системы с равными инвариантами соответствующей ему поверхности (он является радиусом-вектором этой поверхности) определяется равенствами

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \int \left| \begin{matrix} \alpha & \omega \\ \alpha_u & \omega_u \end{matrix} \right| du - \left| \begin{matrix} \alpha & \omega \\ \alpha_v & \omega_v \end{matrix} \right| dv, & \bar{y} &= \int \left| \begin{matrix} \beta & \omega \\ \beta_u & \omega_u \end{matrix} \right| du - \left| \begin{matrix} \beta & \omega \\ \beta_v & \omega_v \end{matrix} \right| dv, \\ \bar{z} &= \int \left| \begin{matrix} \gamma & \omega \\ \gamma_u & \omega_u \end{matrix} \right| du - \left| \begin{matrix} \gamma & \omega \\ \gamma_v & \omega_v \end{matrix} \right| dv, \end{aligned} \quad (5)$$

где ω — любое решение уравнения Мутара. Если вместо $\alpha, \beta, \gamma, \omega$ подставить их линейные комбинации с постоянными коэффициентами, то получится новая поверхность и новое изгибающее ее поле. На

возможность такого преобразования поверхностей обратил внимание Дарбу, однако подробное исследование его было впервые выполнено лишь Млодзеевским.

Определенный вклад внес Млодзеевский также в алгебраическую геометрию — работами по теории кремоновых преобразований.

Представителями московской школы дифференциальной геометрии являются также Д. Ф. Егоров, С. П. Фиников и С. С. Бюшгенс.

Дмитрий Федорович Егоров (1869—1931) родился в Москве. После окончания Московского университета в 1891 г. был оставлен в нем для подготовки к профессорскому званию. Защитил магистерскую и докторскую диссертации. Все время работал в Московском университете (с 1893 г. — приват-доцент, а с 1903 г. — профессор). В 1924 г. был избран членом-корреспондентом, а в 1929 г. — почетным членом Академии наук.

Первые исследования Д. Ф. Егорова относятся к дифференциальной геометрии и связанным с ней вопросам теории уравнений в частных производных. Эти исследования, особенно по трижды ортогональным системам и введенным им так называемым потенциальным поверхностям, которые вошли в математическую литературу и прежде всего в известный трактат Дарбу под названием поверхностей E^1 , являются значительным вкладом в науку.

Несколько геометрических работ Егорова посвящено изгибаниям на главном основании. Например, в 1911 г. Егоров определил изгибания на основаниях с одним семейством конических линий. Он показал, что для установления изгибания на главном основании достаточно найти три решения θ_1 , θ_2 и θ_3 уравнения Мутара

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = M\theta, \quad M = f(u, v)$$

так, чтобы они удовлетворяли условию

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = \varphi(u) + \varphi(v).$$

Задача сводится к отысканию функции M , допускающей квадратичные решения, и самих решений.

Сергей Павлович Фиников (1883—1964) окончил Московский университет в 1906 г. и был в нем оставлен, по предложению Б. К. Млодзеевского, для научной подготовки. В 1910 г. он начал преподавать в Московском университете, затем, с 1912 г., преподавал в Московском городском университете Шанявского, с 1913 г. — в Техническом и Инженерном училищах, а с 1917 г. — снова в университете. Первые его работы посвящены исследованию проблемы изгибания поверхности на главном основании. Фиников составил общее уравнение определения всех главных оснований поверхности. Ему удалось решить задачу отыскания всех главных оснований поверхности второго порядка

¹ П. С. Александров. Математика в Московском университете в первой половине 20 в. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 8. Физматгиз, М., 1955, стр. 14.

и установить, что, кроме известных, нет больше никаких других оснований. Он также показал, что семейство главных оснований поверхности зависит не более чем от двух параметров и что минимальный геликоид — единственная действительная поверхность, несущая такие семейства с двумя параметрами.

Сергей Сергеевич Бюшгенс (1882—1963) первые свои статьи посвятил вопросу изгибания поверхностей постоянной кривизны. За сочинение на эту тему он получил золотую медаль. В следующем цикле Бюшгенс получил уравнения, связывающие коэффициенты линейного элемента, координатные линии которого обращают главное основание изгибания, путем преобразования криволинейных координат установил общие уравнения для главных оснований поверхности (1912 г.), а затем также характеристические уравнения циклической конгруэнции и поверхностей Бианки (1915 г.). Этот цикл работ он завершил магистерской диссертацией «Об изгибании поверхностей на главном основании» (1917 г.). В диссертации впервые поставлена задача определения главных оснований, принадлежащих заданному линейному элементу. С большим искусством выведена система уравнений, определяющих эти главные основания, если они существуют. В качестве приложения общих уравнений доказывается ряд теорем. Характеристические уравнения поверхностей Бианки в произвольной системе криволинейных координат позволяют Бюшгенсу определить все поверхности Бианки, которые являются поверхностями вращения или винтовыми поверхностями. Большой интерес представляет глава диссертации, где рассмотрены главные основания линейного элемента определенного вида.

Развитие проективной геометрии в России, в частности в Московском университете, в дореволюционный период связано, главным образом, с именем К. А. Андреева. До него проективной геометрией в университете в некоторой мере занимались Н. Д. Брашман и В. Я. Цингер. Однако Брашман написал лишь учебник по аналитической геометрии, в котором изложил идеи проективной геометрии, В. Я. Цингер же, насколько известно, не оставил ни одного печатного сочинения по проективной геометрии. Поэтому основателями русской школы проективной геометрии следует считать К. А. Андреева и А. К. Власова.

Константин Алексеевич Андреев (1848—1921) родился в Москве. Окончил гимназию, затем Московский университет, где слушал лекции А. Ю. Давидова, В. Я. Цингера, Ф. А. Бредихина. С 1874 г. — приват-доцент, затем — профессор Харьковского университета, в котором работал 25 лет. Здесь же в 1879 г. защитил докторскую диссертацию «О геометрических соответствиях в применении к вопросу о построении кривых линий». В 1884 г. по представлению академиков О. А. Баклунда, В. Г. Имшенецкого, В. Я. Буняковского был избран членом-корреспондентом Петербургской академии наук. С 1899 г., после ухода в отставку В. Я. Цингера, преподавал в Московском университете.

Наиболее существенные работы К. А. Андреева в области проективной геометрии относятся к сетям конических сечений, многоугольникам Понселе и семиугольникам Шретера. Теория сетей конических

сечений представляет собой один из наиболее содержательных разделов его докторской диссертации. Андреев называет сетью первого рода конических сечений такую их систему, в которой каждое сечение принадлежит пучку, определяемому одним из трех данных конических сечений A, B, C и каким-нибудь коническим сечением, входящим в состав пучка, определяемого двумя другими сечениями. Система конических сечений, из которых каждое принадлежит пучку, определяемому одним из четырех данных конических сечений A, B, C, D и каким-нибудь коническим сечением, входящим в состав сети первого рода, определяемой тремя остальными сечениями, есть сеть второго рода. Подобным же образом он определяет сеть третьего рода и т. д. Свойствам таких сетей посвящена четвертая глава диссертации. Вот пример одной из многих теорем, доказанных в этой главе: система конических сечений, обладающая свойством, что все кривые, ей принадлежащие и имеющие сверх того две общие пары гармонически сопряженных точек, составляют сеть первого рода, или свойством, что все кривые, ей принадлежащие и имеющие сверх того одну общую пару гармонически сопряженных точек, составляют сеть второго рода, есть сеть третьего рода. Здесь под гармоническими парами понимаются точки, попарно сопряженные относительно конического сечения.

Андреев всегда стремился к строгости и безупречности математического рассуждения, свободного от каких-либо сомнительных или непроверенных допущений. Характерным примером может служить его критика так называемого принципа непрерывности, которую положил в основу своих рассуждений Понселе и к которому прибегали некоторые другие геометры. Суть этого принципа заключается в том, что если какое-либо предложение доказано для случая существования некоторых случайных частей фигуры (не исключаемых общим рассуждением), то оно справедливо также и в случае отсутствия этих частей. Опираясь на этот принцип, Понселе, например, сформулировал два общих предложения, отнесенных им к произвольным коническим сечениям, но доказанных лишь для окружности. Суть этих предложений заключается в следующем:

1) если все вершины какого-нибудь простого многоугольника перемещаются по коническому сечению, а все стороны, кроме одной, огибают другое коническое сечение, то последняя сторона будет перемещаться, огибая третье коническое сечение, проходящее через точки пересечения двух первых;

2) если все стороны какого-либо простого многоугольника перемещаются, огибая одно коническое сечение, а все вершины, кроме одной, скользят по другому коническому сечению, то последняя вершина будет перемещаться по третьему коническому сечению, касающемуся общих касательных двух первых.

Андреев доказывает оба предложения (впрочем, второе двойственно первому и в специальном доказательстве не нуждается) без всякого намека на принцип непрерывности, чем придает им совершенно безупречную проективную форму.

3

Московская школа теории функций. Н. Н. Лузин

Московская школа теории функций, ставшая впоследствии одной из наиболее сильных математических школ Советского Союза, была основана Д. Ф. Егоровым и Н. Н. Лузиным. Датой рождения ее следует считать 1911 год — время появления в «Comptes rendus» Парижской академии наук работы Егорова «О последовательности измеримых функций»².

Введение понятия измеримой функции, как и создание теории меры точечных множеств и теории обобщенных интегралов, принадлежит французскому математику Лебегу. Класс измеримых функций, более широкий, чем класс непрерывных функций, или функций, интегрируемых в смысле Римана, стал объектом особого исследования. В теореме Егорова, доказанной в названной выше работе, утверждалось, что последовательность измеримых функций, сходящаяся на множестве положительной меры m , сходится равномерно на множестве меры $m - \varepsilon$, где ε — положительное сколь угодно малое число. Эта теорема имеет основополагающее значение во многих разделах математического анализа и включена ныне в учебные руководства по теории функций действительного переменного³.

Признанным главой московской школы теории функций стал впоследствии ближайший ученик Егорова Н. Н. Лузин. В научный коллектив входили В. В. Голубев, И. И. Привалов, В. В. Степанов, А. Я. Хинчин, Д. Е. Меньшов, П. С. Александров, М. Я. Суслин и др.

Николай Николаевич Лузин родился 9 декабря (27 ноября) 1883 г. в Томске в семье торгового служащего. Начальное образование получил в частной школе, затем учился в гимназии. В 1901 г., после окончания гимназии, поступил на математическое отделение физико-математического факультета Московского университета. Здесь Лузин сразу же обратил на себя внимание профессоров. Занятиями одаренного студента руководил Егоров. По его рекомендации в 1907 г. Лузин был оставлен при университете для подготовки к профессорскому званию. В 1909 г. он сдал магистерский экзамен, а в 1910 г. — получил звание приват-доцента. В 1910—1914 гг. молодой ученый был послан для усовершенствования знаний по математике и приобретения опыта научной работы в Геттинген и Париж, где он познакомился с французскими учеными — Лебегом, Борелем и Данжуа, работавшими в области теории функций и множеств, слушал лекции Пикара, Бореля и Бохера, посещал семинар Адамара. Однако основным предметом занятий Лузина во время пребывания за границей были его собственные научные исследования. Он интересуется и изучает метрическую теорию функций

² D. E g o r o f f. Sur les suites des fonctions mesurables. — Comptes rendus... de l'Acad. d. sci. de Paris, 1911, t. 152, p. 244—246.

³ См., например, книгу: И. П. Н а т а н с о н. Теория функций вещественной переменной. Физматгиз, М., 1957, стр. 111.

действительного переменного ⁴, в частности теорию интеграла и связанную с ней теорию тригонометрических рядов. Исследования в этой области, выполненные им в 1911—1915 гг., составляют содержание 11 его работ, в том числе знаменитой итоговой диссертации «Интеграл и тригонометрический ряд». Диссертация была опубликована в Москве в 1915 г ⁵. и защищена, как докторская, в апреле 1916 г. Достаточно полное представление об указанных исследованиях дает «Отчет о заграничной командировке...» ⁶ Лузина, а также обзорные статьи Н. К. Бари и Л. А. Люстерника ⁷.

Основной целью исследований Лузина являлось изучение в самом общем случае сходимости тригонометрических рядов Фурье, т. е. рядов

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \cos n\alpha d\alpha \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \sin n\alpha d\alpha \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (7)$$

Понятие ряда (6) всецело зависит от понятия определенного интеграла, фигурирующего в формулах (7). Если принимать все более и более общее понятие интегралов Коши, Римана, Дюбуа-Реймона, Харнака, Лебега, Данжуа, то все более и более расширится класс рядов Фурье. Вопросы о сходимости таких рядов и о свойствах функций, изображаемых ими, оказываются, таким образом, тесно связанными с вопросами теорий интеграла. Задача Лузина заключалась в нахождении наиболее общего определения интеграла, с тем, чтобы расширить до возможных пределов класс тригонометрических рядов (6).

В качестве основы для обобщения понятия интеграла Лузиным взята задача о нахождении первообразной функции. Эта задача рассмотрена в двух его работах ⁸ и во второй главе диссертации. Здесь, во-первых, получено необходимое и достаточное условие существования первообразной функции $F(x)$ для данной функции $f(x)$, если определяющее первообразную функцию равенство

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

⁴ Теорию функций, построенную на понятии меры множества.

⁵ Новое издание: Н. Н. Лу з и н. Интеграл и тригонометрический ряд. ГИТТЛ, М.—Л., 1951. В книге приведен список печатных трудов Лузина.

⁶ Два документа к биографии Н. Н. Лузина. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 8. Физматгиз, М., 1955, стр. 57—70.

⁷ См. книгу: Н. Н. Лу з и н. Интеграл и тригонометрический ряд. 1951.

⁸ Н. Н. Лу з и н. К основной теореме интегрального исчисления. — Математический сборник, 1912, т. 28, вып. 2, стр. 266—294; Sur les propriétés des fonctions mesurables. — Comptes rendus..., 1912, t. 154, p. 1688—1690.

выполняется на рассматриваемом множестве M почти всюду, т. е. за исключением множества нулевой меры. Условие состоит в том, что $f(x)$ измерима и конечна на M почти всюду. Во-вторых, указан путь для нахождения первообразных функций. В-третьих, теорема о существовании первообразной функции применена к решению первой краевой задачи для уравнения Лапласа. Доказано существование внутри круга гармонической и голоморфной функции, совпадающей почти всюду на окружности с заданной на ней измеримой и конечной почти всюду функцией $f(x)$. Этот результат явился началом важного цикла дальнейших исследований Лузина по граничным свойствам аналитических функций, которые он проводил, отчасти с И. И. Приваловым, уже после 1917 г. Заметим, что до Лузина такую же задачу для случая, когда $f(x)$ суммируема, решил Фату.

В работах 1912 г., а также в первой главе диссертации, изучая структуру измеримых множеств и функций, Лузин получил основной результат — так называемое C -свойство (ныне излагается во всех учебниках по теории функций). Согласно этому свойству, всякая измеримая функция является непрерывной, если пренебречь множеством сколь угодно малой меры. Именно с помощью этой теоремы он получил результаты, о которых говорилось выше. C -свойство измеримых функций в дальнейшем стало широко применяться в теории функций. Простым его следствием является, например, теорема Фреше о том, что для всякой измеримой функции, конечной почти всюду, существует ряд из непрерывных функций, сходящийся к ней почти всюду, или теорема Витали: всякая измеримая функция, конечная почти всюду, отличается лишь на множестве меры нуль от функции второго класса по классификации Бэра. На основе C -свойства можно определить само понятие измеримой функции и построить теорию интеграла Лебега. Из этого свойства следует, что всякая измеримая функция, конечная почти всюду, является почти всюду асимптотически непрерывной. Обратная теорема была доказана в 1924 г. В. В. Степановым⁹.

В третьей и четвертой главах диссертации Лузин решает задачу выделения из бесконечного множества первообразных функций $F(x)$, для которых $F(0) = 0$, первообразной функции $F_0(x)$ ($F_0(0) = 0$), которая по своим свойствам была бы аналогичной интегралу $\int_0^x f(\alpha) d\alpha$.

Он находит те характеристические свойства таких интегралов, в наиболее общем в то время смысле интегрирования Лебега и Данжуа, которые отличают их от указанных первообразных для функций $f(x)$.

Для суммируемых, т. е. интегрируемых по Лебегу, функций $f(x)$ в классе их первообразных существуют функции с ограниченной вариацией. Лузин доказал, что интеграл Лебега $\int_0^x f(\alpha) d\alpha$ есть единствен-

⁹ V. S t e p a n o f f. Sur une propriété caractéristique des fonctions mesurables. — Математический сборник, 1924, т. 31, стр. 487—489.



Н. Н. Лузин.

ная первообразная с наименьшей полной вариацией. Геометрически это означает, что если функция суммируема, то среди графиков ее первообразных указанный интеграл Лебега является кривой с наименьшей длиной дуги. Для получения же характеристического свойства интеграла Данжуа Лузину пришлось предварительно обобщить понятие функции с ограниченной вариацией. Он доказал: 1) для того чтобы непрерывная функция

была интегралом Данжуа $\int_0^x f(\alpha) d\alpha$, необходимо и достаточно, чтобы она была функцией с обобщенной ограниченной вариацией, а ее полная вариация, если только она существует, была равна нулю для всякого совершенного множества нулевой меры¹⁰; 2) если функция $f(x)$ интегрируема по Данжуа, то в семействе всех ее первообразных есть одна и только одна функция, обладающая указан-

ными выше свойствами, и она совпадает с интегралом Данжуа $\int_0^x f(\alpha) d\alpha$.

Последние результаты Н. Н. Лузин опубликовал в 1912 г. без доказательств¹¹.

В этом же году опубликовали свои обобщения понятия интеграла Борель и Монтель. В третьей главе диссертации Лузин показал, что интеграл Монтеля является тождественным интегралу Лебега, а интеграл Бореля не выходит за рамки интеграла Данжуа. Таким образом, необходимость исследования характеристических свойств этих интегралов отпала.

В четвертой главе диссертации решается задача об отыскании первообразных для функций $f(x)$, которые не интегрируемы по Данжуа, а, стало быть, не интегрируемы и ни в каком ином смысле. Не решив этой задачи в общем случае, Лузин ограничился изложением частных результатов. Он поставил ряд проблем, касающихся обобщения понятия интеграла. Об основной такой проблеме упоминалось выше. Это проблема определения интеграла как суммы того ряда, который получается при интегрировании тригонометрического ряда (6), сходящегося к данной функции. Она приводит, между прочим, к необходимости обобщения понятия производной. В связи с последним обстоятельством

¹⁰ Н. Н. Лузин. Интеграл и тригонометрический ряд. 1951, стр. 100.

¹¹ N. L o u s i n. Sur les propriétés de l'intégrale de M. Denjoy. — Comptes rendus..., 1912, t. 155, p. 1475—1477.

Лузин изучил производные числа Дини и доказал, что если непрерывная функция имеет все четыре производных числа, конечных почти всюду на некотором множестве положительной меры, то она имеет обыкновенную производную почти всюду на этом множестве.

Свои первые результаты о сходимости тригонометрических рядов Лузин получил еще в 1911 г.¹² Он привел пример тригонометрического ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (8)$$

который расходится почти всюду и коэффициенты которого a_n и b_n при $n \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, а также рассмотрел степенной ряд Тейлора, который расходится в каждой точке окружности единичного круга сходимости и коэффициенты которого стремятся к нулю. Эти примеры давали ответы на важные нерешенные вопросы и послужили началом для исследований других ученых.

В 1912 г. Лузин показал¹³, что если тригонометрический ряд (8) сходится для множества положительной меры, то сходятся также ряды

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ и $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$. Отсюда вытекало любопытное следствие: всякий тригонометрический ряд, имеющий две точки абсолютной сходимости, расстояние между которыми несоизмеримо с π , почти всюду сходится или почти всюду расходится. В 1913 г.¹⁴ Лузин исследовал сходимость ряда Фурье вообще и специально для функции с суммируемым квадратом. Он получил необходимое и достаточное условие сходимости, правда в мало доступной для практических приложений форме, а именно: для того чтобы ряд Фурье (8) для функции $f(x)$ с суммируемым квадратом сходилась почти всюду, необходимо и достаточно, чтобы почти всюду

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{g(x + \alpha) - g(x - \alpha)}{\alpha} \cos n\alpha d\alpha = 0,$$

где $g(x)$ есть функция с суммируемым квадратом, которая определяется сопряженным рядом Фурье

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-b_n \cos nx + a_n \sin nx),$$

а интеграл определяется как предел $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi}$.

¹² N. Lousin. Über eine Potenzreihe.—Rend. Circ. mat. di Palermo, 1911, t. 32, p. 386—390; Об одном случае ряда Тейлора.—Математический сборник, 1912, т. 28, вып. 2, стр. 266—294.

¹³ N. Lousin. Sur l'absolue convergence des séries trigonométriques.—Comptes rendus... de l'Acad. d. sci. de Paris, 1912, t. 155, p. 580—582.

¹⁴ N. Lousin. Sur la convergence des séries trigonométriques de Fourier.—Ibid., 1913, t. 156, p. 1655—1658.

Вопросы сходимости рядов Фурье изложены Лузиным в пятой главе диссертации. Последняя, шестая, глава этой работы посвящена вопросам представимости функций и определения интеграла при помощи тригонометрических рядов Фурье. Основная теорема формулируется так: всякая измеримая функция, конечная почти всюду, может быть представлена тригонометрическим рядом, суммируемым к ней почти всюду методами Римана и Пуассона — обобщенными приемами суммирования расходящихся рядов. Такое представление неединственно.

С осени 1914 г. под руководством Н. Н. Лузина в области метрической теории функций начали работать А. Я. Хинчин и Д. Е. Меньшов.

Александр Яковлевич Хинчин (1894—1959) начал заниматься научной работой, еще будучи студентом второго курса Московского университета. Его первый результат (1914 г.) включен в четвертую главу (§ 60) диссертации Лузина. Он относится к задаче обобщения понятия производной, сформулированной Б. К. Млодзеевским в 1904 г. Асимптотическая производная Хинчина для функции $f(x)$ определялась на измеримом множестве E с точкой плотности x_0 как предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (x \in E).$$

Им установлена необходимая для корректности такого определения независимость асимптотической производной от того или иного выбора множества E . В 1917 г. он доказал такую теорему: для того чтобы измеримая функция $f(x)$, определенная на сегменте $[0, 1]$, имела асимптотическую производную почти всюду, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлось совершенное множество $P \subset [0, 1]$, для которого $\text{mes } P > 1 - \varepsilon$ и $f(x)$ абсолютно непрерывна на множестве P .

Свои исследования по асимптотическим производным Хинчин использовал (1916 г.) для обобщения интеграла Данжуа¹⁵. Он нашел необходимое и достаточное условие для того, чтобы интеграл Данжуа был первообразной функцией, а также снял ограничение, наложенное Данжуа на применение своего интегрального процесса, и в результате получил интеграл, позволяющий восстанавливать примитивную функцию по ее асимптотической производной. Немного спустя сам Данжуа опубликовал такое же обобщение, но приоритет принадлежит Хинчину, хотя в мировой литературе этот интеграл носит имя Данжуа—Хинчина.

К теории интеграла Данжуа относится и первый результат Дмитрия Евгеньевича Меньшова (род. в 1892 г.). Меньшов установил¹⁶, что интеграл Бореля уже интеграла Данжуа. Этот результат получен им в 1916 г., в год окончания Московского университета. Вторым его результатом гораздо значительнее: он нашел пример тригонометриче-

¹⁵ Sur une extension de l'intégrale de M. Denjoy. — Comptes rendus... de l'Acad. d. sci. de Paris, 1916, t. 162, p. 287.

¹⁶ Д. Е. Меньшов. Взаимоотношение между интегралом Borel'я и Denjoy. — Математический сборник, 1916, т. 30, стр. 288—295.

ского ряда, почти всюду сходящегося к нулю, но имеющего коэффициенты, отличные от нуля¹⁷. Этот результат Меньшова был развит затем другими исследователями.

В 1907 г. приват-доцент Московского университета Иван Иванович Жегалкин (1868—1947) опубликовал магистерскую диссертацию «Трансфинитные числа». Работа была первой в России монографией по теории множеств. С 1914 г. дескриптивная теория множеств и функций¹⁸ постепенно входит в круг научных интересов Н. Н. Лузина и становится основной проблематикой его исследований. Первые его работы в этом направлении (1914—1917 гг.) относятся к проблеме классификации функций по Бэру, задаче о разбиении интервала на несчетное множество неизмеримых множеств, вопросам о плотности множеств и о свойстве континуума¹⁹. Три работы написаны им совместно с известным польским математиком В. Серпинским, на творчество которого он оказал значительное влияние.

Дескриптивной теории множеств были посвящены также работы двух учеников Н. Н. Лузина: Павла Сергеевича Александрова (род. в 1896 г.) и Михаила Яковлевича Суслина (1894—1919).

Как известно, борелевские множества — это такие множества, которые получаются в результате применения к конечному или счетному множеству замкнутых множеств конечного или бесконечного числа действий сложения и умножения. Лузин поставил вопрос: имеет ли каждое несчетное борелевское множество мощность континуума. Положительный ответ был дан П. С. Александровым в 1916 г., тогда еще студентом университета²⁰. Для решения вопроса он построил новую теоретико-множественную операцию, названную впоследствии *A*-операцией. С ее помощью может быть получено любое борелевское множество. Александров показал, что всякое несчетное множество, полученное с помощью *A*-операции, содержит совершенное подмножество. Лузин сразу поставил другой вопрос: всякое ли множество, полученное с помощью *A*-операции, исходя из интервалов, является борелевским. Отрицательное решение этого вопроса получил М. Я. Суслин.

В 1917 г.²¹ он доказал существование множества, которое получается с помощью *A*-операции из интервалов и не является борелевским. Множества, получаемые *A*-операцией из интервалов (или *n*-мерных параллелепипедов), называют *A*-множествами. Для построения неборелевского *A*-множества, Суслин рассмотрел плоское *A*-множество *E*, универсальное для всех борелевских множеств, т. е. такое, которое с прямыми, параллельными оси *y*, пересекается по всевозможным линейным борелевским множествам, и взял множество точек *E*, лежа-

¹⁷ D. M e n c h o f f. Sur l'unicité du développement de la série trigonométrique. — Comptes rendus..., 1916, t. 163, p. 443—446.

¹⁸ Направление критического пересмотра основ теории множеств и функций.

¹⁹ См. список научных работ Лузина в кн.: Н. Н. Л у з и н. Интеграл и тригонометрический ряд, 1951, стр. 538—539.

²⁰ P. A l e x a n d r o f f. Sur la puissance des ensembles mesurables B. — Comptes rendus..., 1916, t. 162, p. 323.

²¹ M. S o u s l i n. Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis. — Comptes rendus..., 1917, t. 164, p. 88—90.

щих на диагонали $y = x$. Им найдено также достаточное условие для того, чтобы A -множество было борелевским. Это условие состоит в том, чтобы дополнение к A -множеству было также A -множеством.

Тесно связаны с работами Н. Н. Лузина и его учеников по теории множеств и функций действительного переменного исследования московских математиков в области теории функций комплексного переменного. Основополагающими работами в этом направлении явились диссертации В. В. Голубева — «Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек» (1917 г.) и И. И. Привалова — «Интеграл Коши» (1918 г.). Важное значение имели также первые работы В. В. Степанова о применении идей метрической теории функций к функциям почти периодическим. Исследования, в которых идеи и методы школы Н. Н. Лузина переносились в другие области математики, постепенно расширялись. После Октябрьской революции, когда отечественная наука получила все возможности для своего развития, в Москве были созданы различные самостоятельные математические школы. Московская школа теории функций оказала благотворное влияние на развитие математики и в других центрах нашей страны, а также за рубежом.

4

Математические исследования Н. Е. Жуковского

Крупнейший русский механик Николай Егорович Жуковский родился 17 (5) января 1847 г. близ с. Орехова Владимирской губернии. В 1857 г. семья переехала в Москву. По окончании гимназии в 1864 г. Жуковский поступил на физико-математический факультет Московского университета. По его словам, наибольшее влияние на формирование его научных интересов оказал профессор В. Я. Цингер, читавший в университете курс теоретической механики.

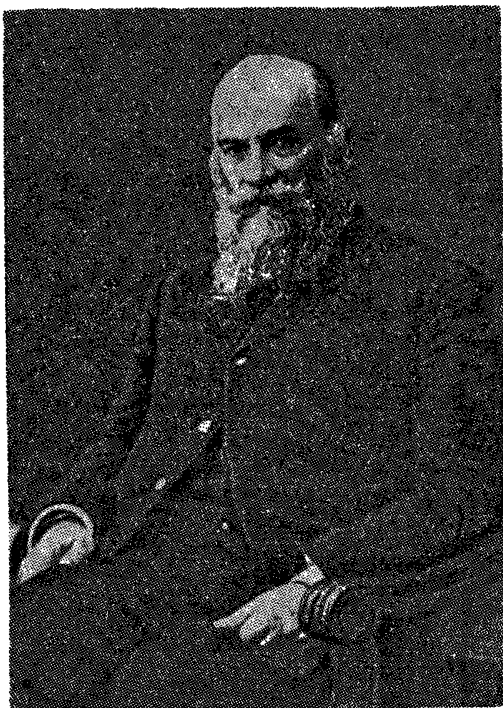
Педагогическая и научная деятельность Жуковского связана главным образом с Московским высшим техническим училищем (ныне им. Баумана) и с Московским университетом (с 1885 г.). В 1876 г. он блестяще защитил магистерскую диссертацию «Кинематика жидкого тела», а в 1882 г. получил ученую степень доктора прикладной математики за работу «О прочности движения». Жуковский принимал активное участие в многочисленных научных съездах, был президентом (с 1905 г.) Московского математического общества, членом Московского политехнического общества, Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. Им создано Воздухоплавательное общество, по его инициативе в 1918 г. был организован Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ), носящий ныне его имя и пользующийся мировой известностью.

В 1894 г. Жуковского избрали членом-корреспондентом Российской академии наук. В 1900 г. его кандидатуру выдвинули в действительные члены академии. Однако он снял свою кандидатуру, поскольку

работа в академии требовала переезда в Петербург, а покидать Москву он не хотел. После Великого Октября многогранная деятельность Н. Е. Жуковского получила высокую правительственную оценку. Пятидесятилетие его научной деятельности было отмечено специальным Постановлением Совета Народных Комиссаров от 3 декабря 1920 г.²² В. И. Ленин назвал его «отцом русской авиации».

Умер Н. Е. Жуковский в санатории Усово под Москвой 17 марта в 1921 г., похоронен на Донском кладбище в Москве.

Огромен диапазон научных исследований Жуковского. Они относятся к различным областям механики и некоторым проблемам математики. Посмертно было издано полное собрание сочинений Жуковского в десяти томах и пяти выпусках²³. Жуковским написано не-



Н. Е. Жуковский.

много специальных математических работ, однако его исследования в различных областях механики сыграли определенную роль и в развитии математики. Решая механические задачи, он создавал новые математические методы. Характерной особенностью всего его научного творчества является широкое внедрение геометрических методов как в математике, так и во всех других областях, к которым относятся его работы. С его именем связано также широкое применение в прикладных вопросах методов теории функций комплексного переменного.

Рассмотрим математические работы Н. Е. Жуковского.

В 1885 г. была опубликована первая работа Жуковского по математике — «Геометрическое разъяснение некоторых вопросов теории уравнений с частными производными», в которой разъясняются главные приемы интегрирования уравнений с частными производными первого порядка. Это разъяснение иллюстрируется примером решения трех геометрических задач. Первая из них формулируется так: даны направления касательных семейства кривых линий; требуется провести через данную точку пространства поверхность, перпендикулярную этому семейству. Решение задачи Жуковский сводит к интегрированию дифференциального уравнения в полных дифференциалах. Во второй задаче при данных направлениях касательных семейства кри-

²² Текст Постановления приведен в I томе «Полного собрания сочинений» Н. Е. Жуковского.

²³ Н. Е. Жуковский. Полн. собр. соч. Под ред. А. П. Котельникова, т. I—X, ОНТИ, М.—Л., 1935—1937.

вых линий требуется провести поверхность, которая была бы образована линиями этого семейства, проходящими через точки данной кривой. Жуковский показал, что эта поверхность должна удовлетворять линейному уравнению в частных производных. Найденный им метод решения задачи включает способ интегрирования уравнения в частных производных. Третья задача состоит в следующем: в каждой точке пространства построен конус; провести через данную кривую поверхность, нормали которой направлены по образующим этих конусов. Решена она так. Предполагается, что косинусы углов образующих конуса находятся в отношении $p : q : -1$, где p и q удовлетворяют уравнению

$$F(p, q, x, y, z) = 0. \quad (9)$$

Представим себе, что в каждой точке пространства есть другие конусы, для которых косинусы углов образующих удовлетворяют уравнению

$$\Phi(p, q, x, y, z) = 0. \quad (10)$$

Указанные конусы подбираются так, чтобы их образующие, по которым они пересекаются с конусом (9), определяли направления касательных семейства линий, к которому можно провести ортогональную поверхность. Последнее требует, чтобы p и q , найденные из уравнений (9) и (10), удовлетворяли условию

$$p \frac{\partial q}{\partial z} - q \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

Определяя частные производные в условии (11) из уравнений (9) и (10), получим соотношение, из которого с помощью уравнения (9) может быть исключено z . Тогда уравнение (11) приводится к виду

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial F}{\partial q} + \frac{\partial \Phi}{\partial p} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + p \frac{\partial F}{\partial z} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial q} \left(\frac{\partial F}{\partial y} + q \frac{\partial F}{\partial z} \right) = 0. \quad (12)$$

Уравнение (12) является уравнением в частных производных, из которого можно определить функцию Φ .

Большой интерес представляет работа Жуковского «Заметка по вариационному исчислению» (опубликована после его смерти), являющаяся продолжением его предыдущего исследования статьи «О начале наименьшего действия» (1879). В статье Жуковский доказал, что инте-

гралы, выражающие действие в форме Лагранжа $\int_0^t 2T dt$ и в форме

Гамильтона $\int_0^t (T + U) dt$ (где T — кинетическая энергия; U — сило-

вая функция или потенциал; t — время), имеют между двумя неизменными конфигурациями системы при действительном ее движении сильный минимум по сравнению со всякими движениями, которые в случае Лагранжа должны удовлетворять теореме об изменении кинетической энергии, а в случае Гамильтона должны быть одновременными. В «Заметке» же он показал, что метод доказательства, примененный

в названной статье, можно распространить на различные виды подынтегральных функций. При этом им получены новым путем результаты Вейерштрасса и Гильберта. В этой же работе, исследуя свойства экстремалей, Жуковский доказал следующую теорему: для двух бесконечно близких экстремалей ab и ac , которые выходят из полюса a и концы которых соединены элементом дуги bc , справедливо равенство

$$(bc) + (ab) - (ac) = E,$$

где (ab) , (bc) и (ac) — длины отрезков; E — функция Вейерштрасса, $E = F(y') - F(p) - \frac{\partial F(p)}{\partial p}(y' - p)$; y' — тангенс угла наклона касательной к элементу bc с осью ox ; p — тангенс угла наклона к оси ox экстремали в точке b .

В конце «Заметки» рассмотрена задача об устойчивости вертикальных колонн. Показано, что вертикальная колонна, несущая некоторую нагрузку P , будет устойчива при условии

$$l \leq \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{IE}{P}},$$

где l — высота колонны; I — момент инерции; E — функция Вейерштрасса.

Работа Жуковского «Геометрическое доказательство первой и второй теорем С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах» (1919 г.) оформлена Н. Г. Ченцовым после смерти ученого по материалам его лекций в ЦАГИ. Еще в 1899 г. на юбилее Политехнического общества при обсуждении доклада о связи науки и техники С. А. Чаплыгин сообщил Жуковскому о своих идеях приближенного интегрирования. Речь шла об интегрировании дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y). \quad (13)$$

С точки зрения геометрии решение этого уравнения сводилось к такому построению на плоскости xoy кривой, проходящей через точку (x_0, y_0) , чтобы тангенс угла наклона касательной к оси x выражался в каждой точке на плоскости xoy функцией $f(x, y)$. По мнению С. А. Чаплыгина, для практики имеет второстепенное значение, будет ли известно точное расположение интегральной кривой на плоскости xoy или только достаточно узкая полоса плоскости, за пределы которой не выходит искомая кривая. В последнем случае вместо искомой интегральной кривой будут известны две другие кривые, которые близко расположены друг к другу и между которыми находится искомая кривая²⁴. Основная идея метода Чаплыгина заключалась в том, чтобы найти эти первые приближения решения уравнения (9), заменяя его другими уравнениями, интегрирующимися в квадратурах. После построения интегральных кривых, между которыми находится искомая

²⁴ С. А. Чаплыгин. Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений. — Бюллетень Научно-экспериментального института путей сообщения, М., 1919, № 13.

интегральная кривая, возникает возможность их сближения. Чаплыгин доказал две теоремы. Первая теорема устанавливала признак, достаточный для того, чтобы выбранную функцию можно было рассматривать как верхний или нижний предел искомого решения уравнения (13), вторая давала способ сближения этих пределов с помощью точного интегрирования линейных дифференциальных уравнений. Продолжая исследования Чаплыгина, Жуковский указал на возможность аналогичным путем находить вторые, третьи и четвертые приближения.

Статья Жуковского «Вывод точных формул движения, произведенного отталкивающей силой Солнца» (1879 г.) была оформлена по рукописным материалам А. П. Котельниковым. Основным результатом работы — получение формулы Нортонна. История вопроса такова. Известный астроном Ф. А. Бредихин в 1878 г. на заседании Московского математического общества сделал доклад по этой теме. Жуковский заинтересовался докладом и через неделю представил вывод точных формул движения по ветвям гиперболы, обращенной выпуклостью к Солнцу, т. е. движения, вызванного отталкивающей силой Солнца. Для решения задачи он применил гиперболические функции.

В опубликованной в 1883 г. работе «Упрощенное изложение Гауссова способа определения планетных орбит» Жуковский определяет элементы орбиты по двум радиусам-векторам, углу между ними и времени, в течение которого описывается планетой этот угол, а также по трем наблюдениям путем применения метода последовательных приближений для двух гауссовых величин, которые входят в соответствующие уравнения, характеризующие абсолютное движение планеты в пространстве по трем ее видимым положениям. На VII съезде русских естествоиспытателей и врачей в Одессе в 1883 г. он сделал доклад «О графическом решении основного уравнения при вычислении планетных орбит» (напечатан в «Трудах» этого съезда), в котором показал, что вычисление планетной орбиты по трем наблюдениям связано с решением уравнения восьмой степени. Из этого уравнения нужно определить угол между радиусом-вектором планеты во втором наблюдении и линией, соединяющей планету и Землю в момент наблюдения. Для приближенного нахождения угла в случае, когда промежутки времени между наблюдениями малы, Жуковский применил простой графический способ, который сводится к определению точек пересечения прямой с постоянной кривой при помощи линейки.

Весьма важной для математики является работа «О новом доказательстве теоремы Ламберта» (1884 г.). Теорема Ламберта заключается в том, что время, в течение которого планета проходит эллиптическую дугу, зависит только от длины хорды пройденной дуги, суммы радиусов-векторов концов дуги, проведенных из Солнца, и большой оси эллиптической орбиты планеты. Доказательство теоремы Ламберта Жуковским основано на формуле вариации «действия» по Эйлеру, т. е. вариации интеграла от произведения скорости на элементарный путь вдоль траектории. Эта вариация равна разности произведений проекций скоростей движущейся материальной точки (планеты) в конце и, соответственно, в начале траектории на перемещение концов траектории, когда

данная траектория переходит в бесконечно близкую. Предложенный им метод доказательства пригоден в случае действия силы как притяжения, так и отталкивания. Жуковский доказал, что время, в течение которого планета описывает эллиптическую дугу, зависит только от длины хорды большой оси эллипса и суммы радиусов-векторов по отношению к Солнцу.

Некоторые работы Н. Е. Жуковского по аэродинамике имеют также большое значение для математики. Важнейшая задача аэродинамики заключается в определении сил, которые действуют на тело, движущееся в воздухе. Движение крыла самолета в воздухе представляет собой частный случай движения твердого тела в сжимаемом газе. Следовательно, в теории крыла исходными уравнениями являются основные уравнения движения газа. Однако эти уравнения гидроаэродинамики необычайно сложны, что затрудняет их применение. Налагая ограничение на физические свойства потока жидкости или газа, обтекающего крыло, в классической аэродинамике считают поток плоскопараллельным, а жидкость идеально-невязкой и несжимаемой. Это позволяет широко использовать в гидродинамике для решения задачи об обтекании тел плоскопараллельным потоком хорошо разработанный аппарат теории функций комплексного переменного. Оказывается, что для каждого плоскопараллельного установившегося потенциального потока идеальной несжимаемой жидкости существует аналитическая функция комплексного переменного z

$$w = f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (14)$$

называемая комплексным потенциалом или характеристической функцией течения, где $\varphi(x, y)$ — потенциал скоростей; $\psi(x, y)$ — функция тока. Функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ удовлетворяют условию Коши — Римана:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (15)$$

Исследование плоскопараллельного потока идеальной жидкости сводится к изучению функции $f(z)$: если она известна, то можно определить φ и ψ , а следовательно, и скорость потока v .

Решение механической задачи, связанной с определением величины и направления подъемной силы крыла и точки ее приложения, также приводится к решению чисто математической задачи. Обычно в аэродинамике сначала рассматривают обтекание хорошо изученного цилиндрического крыла с круговым сечением, называемым образующим кругом, а затем переходят к рассмотрению крыльев с произвольным профилем. Для этого нужно определить функцию, осуществляющую конформное преобразование внешности профиля на внешность круга. Плоскопараллельный поток, обтекающий заданный крыловый профиль, в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ может быть охарактеризован одной характеристической функцией потока $w = f(z) = \varphi + i\psi$. Функция w должна удовлетворять следующим условиям: 1) быть аналитической; 2) мнимая ее часть, т. е. $i\psi$, на контуре про-

филя должна иметь постоянное значение; 3) $\frac{dw}{dz}$ должна быть регулярна в области вне профиля.

Применяя теорию функций комплексного переменного для исследования плоскопараллельного течения идеальной несжимаемой жидкости, Жуковский установил формулы конформного преобразования области вне круга на область внекрылового профиля (в теории функций комплексного переменного — профили Жуковского).

С помощью теории функций комплексного переменного Жуковский в исследовании «О присоединенных вихрях» (1906 г.) решает задачу об определении гидродинамических сил, которые действуют на тела, движущиеся в бесконечном потоке несжимаемой жидкости. В работе «О контурах поддерживающих поверхностей аэропланов» (1910 г.) введена функция комплексного переменного, осуществляющая конформное преобразование. Она дает отображение профиля крыла самолета (в аэродинамике и теории функций комплексного переменного — профиль Жуковского). В статье «Определение давления плоскопараллельного потока жидкости на контур, который в пределе переходит в отрезок прямой» (1911 г.) применяется метод конформного преобразования с помощью функции, называемой ныне функцией Жуковского:

$$\frac{z-a}{z+a} = \left(\frac{w-a}{w+a} \right)^2,$$

$$z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{a^2}{w} \right), \quad w = z \pm \sqrt{z^2 - a^2}.$$

Эта функция осуществляет конформное преобразование внешности указанного контура на внешность круга. Получаемый крыловой профиль Жуковского зависит от трех параметров (ширины крыла, искривления и расстояния, характеризующего толщину крыла). Профили Жуковского и его теорема о подъемной силе применяются в исследованиях по теории функций комплексного переменного как отечественных, так и зарубежных ученых²⁵. Работы Жуковского по теории крыла способствовали появлению в теории конформных отображений экстремальных задач.

Введение Жуковским новых математических методов и приемов нашло широкое применение в различных областях механики. Так, в его статье «Об одном частном случае движения материальной точки» (1878 г.) показано, как, не отыскивая общие интегралы уравнений движения материальной точки, можно получить частные интегралы этих уравнений, если начальная скорость зависит от начальных координат, например, в случае движения точки в плоскости под действием центральной силы, если линии уровня являются изотермическими. В заметке «К вопросу о движении материальной точки под притяжением одного и двух центров» (1881 г.) предложен простой способ исследования движения материальной точки под притяжением одного и двух

²⁵ См., например, кн.: М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат. Методы теории функций комплексной переменной. ГИТТЛ. М., 1951, стр. 135—136.

центров, основанный на выражении радиуса кривизны конических сечений радиусами-векторами точек. В работе «Приложение теории центров ускорений высших порядков к направляющему механизму Чебышева» (1885 г.) изложен метод синтеза механизмов, отличный от метода Чебышева, в его применении к направляющему механизму Чебышева. Этот плоский механизм состоит из треугольника, две вершины которого движутся по кругам. Чебышев в Приложениях к XXX тому «Записок Академии наук» сформулировал правило построения центров таких кругов. При выполнении этого правила третья вершина треугольника описывает кривую, имеющую с прямой соприкосновение пятого порядка. Жуковский показал, что эти результаты проще получить, применив теорию центров ускорений высших порядков.

Новые математические результаты содержит статья Жуковского «Условия конечности интегралов уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} + py = 0$ » (1891 г.). А. М. Ляпунов в знаменитом сочинении «Общая задача об устойчивости движения» (1892 г.) рассмотрел дифференциальное уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} + py = 0$, предполагая, что p — периодическая функция x , и на примерах показал, что при этом условие положительности и конечности функции p не характеризует конечность интегралов уравнения для всякого значения x . Жуковский показал, что доказательство конечности y при положительном p теряет силу, когда p — функция периодическая. Для этого случая он вывел некоторые достаточные признаки конечности интеграла.

В работе «Геометрическая интерпретация рассмотренного С. В. Ковалевской случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки» (1896 г.) Жуковский дал геометрическую интерпретацию общего случая движения тела с неподвижной точкой. В основе этой интерпретации лежит разъяснение геометрического смысла двух гиперэллиптических функций времени, посредством которых С. В. Ковалевская выразила все величины, определяющие положение движущегося тела.

Значительный интерес представляет статья «О применении в строительной механике уравнения $\frac{d^4y}{dx^4} = -4x^4y$ ».

В ней показано, что, применяя формулы преобразования

$$\frac{d^2}{dx^2} [\operatorname{ch} \alpha (x + a) \sin \alpha (x + b)] = 2\alpha^2 \operatorname{ch} \alpha (x + a) \cos \alpha (x + b),$$

$$\frac{d^2}{dx^2} [\operatorname{ch} \alpha (x + a) \cos \alpha (x + b)] = -2\alpha^2 \operatorname{sh} \alpha (x + a) \sin \alpha (x + b),$$

можно сразу написать интеграл уравнения $\frac{d^4y}{dx^4} = -4x^4y$, удовлетворяющий некоторым граничным условиям. Указанное уравнение удовлетворяется как функцией y , так и ее производными по x . Поэтому в зависимости от граничных условий по приведенным формулам можно выразить не функцию, а одну из ее производных.

Н. Е. Жуковский был не только великим ученым, но и выдающимся педагогом. Им написаны первоклассные учебники, не утратившие своего значения до наших дней. Его «Теоретическая механика» впервые была издана в 1878 г. и много раз переиздавалась. В двухтомном университетском курсе «Кинематика, статика, динамика точки» (1939 г.) и «Механика системы, динамика твердого тела» (1939 г.) собраны лекции Жуковского, прочитанные в Московском университете в период с 1886 по 1919 г. Весьма оригинальны его «Лекции по гидродинамике» (1897 г.), где подробно изложена кинематика жидкой частицы. Жуковский не ограничивался аналитическим исследованием предмета. Свои выводы он облакал в геометрическую форму, а в доказательства даже известных теорем вносил упрощения. Чрезвычайно изящно решены им задачи о кажущемся взаимодействии двух шаров, движущихся в жидкости, и о пульсирующих шарах Биеркнеса. Н. Е. Жуковскому принадлежит также ряд других учебников по прикладной механике, аэродинамике и теоретическим основам воздухоплавания.

5

О математических работах С. А. Чаплыгина

Выдающийся ученый-механик Сергей Алексеевич Чаплыгин был учеником Н. Е. Жуковского. Родился он 24 (12) марта 1869 г. в г. Рененбурге (ныне г. Чаплыгин) Рязанской области. Среднее образование получил в Воронежской гимназии. В 1890 г. блестяще окончил физико-математический факультет Московского университета и начал заниматься научными исследованиями. Уже в ранний период своей научной деятельности Чаплыгин решает труднейшие проблемы классической механики. Его первые исследования относятся к теории движения твердых тел в жидкости. Здесь он получил широкую геометрическую интерпретацию законов такого движения. Его магистерская диссертация «О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости»²⁶ также посвящена этим вопросам. Докторской диссертацией «О газовых струях»²⁷ (1902 г.) Чаплыгин положил начало современной аэродинамике звуковых и сверхзвуковых скоростей.

В этот же период Чаплыгин начал педагогическую деятельность. С 1893 г. он преподает в женском среднем учебном заведении, с 1896 г. по 1906 г. — в Московском высшем техническом училище (на кафедре теоретической механики). После защиты докторской диссертации его избирают профессором Московского университета, где он читает курс механики (в 1911 г. в знак протеста против реакционных действий министра просвещения Кассо он ушел из университета). В 1905 г. Чаплыгина назначают директором Высших женских курсов, которые под его руководством выросли в крупное высшее учебное заведение.

²⁶ С. А. Чаплыгин. О некоторых случаях движения твердого тела в жидкости. — Математический сборник, 1897, т. 20, вып. 1.

²⁷ С. А. Чаплыгин. О газовых струях. М., 1902.

Умер С. А. Чаплыгин 8 октября 1942 г. в Новосибирске.

Исследования Чаплыгина относятся к различным областям математики и механики: приближенным методам интегрирования дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного, динамике твердого тела, динамике неголономных систем, гидроаэромеханике. Его работы по теории крыла самолета, газовой динамике и динамике неголономных систем признаны классическими. Они положены в основу многочисленных исследований современных советских и зарубежных ученых. Богатое научное наследие Чаплыгина собрано в четырех томах ²⁸. В первый том включены работы по теоретической механике и математике, во второй — по гидродинамике и аэродинамике, в третий — исследования по



С. А. Чаплыгин.

прикладной механике и теории упругости, обзорные статьи, речи Чаплыгина и его биография, в четвертый — его лекции по теоретической механике, т. е. отдельные учебники и учебные руководства («Элементы статики», 1914 г.; «Механика системы», 1924 г.; «Пропедевтический курс механики», 1923 г.).

В научных исследованиях Чаплыгин широко применял и разрабатывал для решения проблем механики математические методы, чем содействовал непосредственному развитию математики, особенно теории интегрирования дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного и вариационного исчисления. Например, он успешно применял теорию функций комплексного переменного для решения вопросов аэрогидромеханики, с удивительной проницательностью умел найти аналитический аппарат, соответствующий геометрической картине изучаемого физического явления. Особо важными для математики являются его работы по теории интегрирования дифференциальных уравнений. Примененный им приближенный метод интегрирования дифференциальных уравнений широко известен (метод Чаплыгина) и имеет важное значение также для решения функциональных уравнений.

В работе «Изыскание интегралов линейных уравнений второго порядка с остаточным членом» (1905 г.) Чаплыгин изложил свой приближенный метод интегрирования линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Этот метод назван первым методом Чаплыгина. Опубликование работы Чаплыгин задержал, стремясь доказать обобщенную теорему Ролля на случай линейных уравнений n -го по-

²⁸ С. А. Чаплыгин. Собр. соч. Т. I—IV. Гостехиздат, М.—Л., 1948—1950.

рядка. Однако этого он не мог сделать, но значительно позднее, уже после 1917 г., создал другой метод, названный вторым методом Чаплыгина. Создание второго метода Чаплыгина явилось выдающимся событием в математике. Этот метод он применил для решения уравнения n -го порядка вида

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

а также для решения уравнения в частных производных

$$\Delta \varphi - p(x, y, z) \varphi = 0,$$

где $p > 0$.

Рассмотрим четыре чисто математических исследования Чаплыгина, опубликованные с некоторыми дополнениями в «Трудах ЦАГИ» в 1932 г. в виде одной работы под названием «Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений».

Первую работу — «Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений» — Чаплыгин посвящает нахождению приближенного интеграла данного дифференциального уравнения. Для этого необходимо либо построить аналитическое выражение искомой функции с наибольшей возможной точностью, либо найти прием определения ее числовой величины при заданном значении аргумента. Предложенный метод существенно отличен от других известных методов, в том числе от метода разложения искомого решения в ряд. Чаплыгин ставит перед собой задачу: по данному дифференциальному уравнению, решенному относительно высшей производной

$$y^{(n)} - f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0, \quad (16)$$

найти такие две функции $z = z(x)$ и $u = u(x)$, равные искомому интегралу $y = y(x)$ в начальной точке $x = x_0$, которые бы на участке, прилегающем к этой точке, удовлетворяли неравенству

$$z > y > u.$$

Геометрически это означает, что на плоскости xoy нужно выделить ленту, по возможности узкую, внутри которой должна лежать интегральная кривая. Уравнения граничных кривых имеют вид $y = z(x)$; $y = u(x)$. Чаплыгин решает эту задачу, опираясь на одну из основных теорем о дифференциальных неравенствах, доказанную им для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений любого порядка. Он анализирует пределы применимости доказанных основных теорем и показывает, что их можно распространить также на дифференциальные уравнения в частных производных.

Вторая работа — «Новый метод интегрирования общего дифференциального уравнения движения поезда» (1919 г.). При определении влияния профиля пути на движение железнодорожных поездов Чаплыгин учитывает, что в каждый момент времени, если условия движения остаются постоянными, благодаря изменению кривизны профиля появляется составляющая силы тяжести отдельных элементов поезда (паровоза, тендера и вагонов). Направление этой составляющей либо совпадает с направлением движения (при уклонах), либо противополо-

ложно последнему (при подъемах), т. е. связано с направлением касательных к кривой профиля в различных точках. На основании этого он рассматривает различные формы приведенного уравнения движения поезда вида

$$\frac{1}{\xi} \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{1}{\xi} v \frac{dv}{ds} = a - bv + cv^2 - \frac{dy}{ds}, \quad (17)$$

где t — время; s — путь; v — скорость;

$$\xi = \frac{g}{1000} = 127 \text{ м/час}^2;$$

g — ускорение силы тяжести. Решить уравнение (17) можно, выражая с помощью кривой профиля ординату y как функцию пути или времени. В работе приводятся примеры приближенного интегрирования уравнения движения поезда.

Третья работа — «Интегрирование основных уравнений баллистики при законе сопротивления, данном Лоренцом» (1920 г.) — содержит способ приближенного интегрирования уравнения баллистики, когда сила сопротивления выражена формулой

$$R = kmv^2 \left[1 + \frac{Av^4}{(v^2 - a^2) + c^2 v^2} \right], \quad (18)$$

где a — скорость звука; c — особая скорость затухания колебаний; v и m — соответственно скорость и масса снаряда. Чаплыгин рассматривает случай отлогой стрельбы. Он использует доказанную им такую теорему. Пусть задано дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} - f(x, y) = 0 \quad (19)$$

и z — некоторая функция x , имеющая при начальном значении $x = x_0$ то же значение y_0 , которое должен иметь искомый интеграл. Пусть, далее, в результате подстановки в уравнение (19) значения z вместо y получится при всех значениях $x = x_0$ величина больше нуля. Тогда, если участок расположен в области обыкновенных точек функции $f(x, y)$ и если y и z не имеет особых точек,

$$z > y \text{ для } x > x_0 \text{ и } z < y \text{ для } x < x_0.$$

Далее Чаплыгин интегрирует основное уравнение баллистики, определяющее связь между скоростью и углом наклона (уравнение годографа) и приводит несколько приемов интегрирования этого уравнения.

В четвертой работе — «Приближенное интегрирование обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка» (1920 г.) — Чаплыгин доказывает теорему о дифференциальных неравенствах для уравнения (19) и с помощью этой теоремы находит метод приближенного интегрирования данного дифференциального уравнения, который сводится к отысканию верхней и нижней границ для искомого интеграла.

Исследования Чаплыгина по вариационному исчислению (1902 г.) связаны с нахождением необходимых и достаточных условий, при которых искомые функции двух переменных $z(x, y)$ и $z_1(x, y)$, принимающие на границе области заданные значения, доставляют минимум двукратному интегралу, если подынтегральная функция имеет вид

$$f(x, y, z, z_1, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial y}).$$

В этих исследованиях Чаплыгин шел самостоятельным путем, не используя сложный аппарат классического вариационного исчисления. Полученные им результаты, к сожалению, не опубликованы.

В число рукописей неопубликованных работ, написанных Чаплыгиным в первые годы XX в., входит три исследования, посвященные задаче трех тел²⁹. В них рассматривается треугольник, составленный тремя точками, перемещающимися по плоскости. Эти точки являются проекциями движущегося в пространстве треугольника, в вершинах которого помещены массы точек, причем изучаются такие материальные точки, последовательное положение которых представляют собой подобные треугольники. Такая постановка задачи привела Чаплыгина к нахождению коэффициента подобия вспомогательного треугольника и геометрических параметров, определяющих положение треугольника в пространстве. Первая из названных работ — «Новая форма дифференциальных уравнений задачи о движении трех тел в плоскости» — содержит уравнения для определения всех геометрических параметров, характеризующих положение в пространстве основного треугольника. Вторая — «Вывод уравнений движения изменяемой системы из начала Гамильтона. К задаче о движении трех тел» — посвящена выводу рассмотренных в предыдущей работе дифференциальных уравнений иным способом — путем применения вариационного принципа Гамильтона — Остроградского. Третья работа — «Новая форма уравнений задачи о трех телах. О движении Луны» — содержит новые результаты, представляющие интерес как для астрономии, так и для математики.

Большой математический интерес, связанный с интегрированием дифференциальных уравнений, представляют работы С. А. Чаплыгина по динамике неголономных систем. В конце XIX в. назрела проблема составления системы дифференциальных уравнений неголономной механики, аналогичной системе уравнений Лагранжа второго рода в голономной механике, и создания методов интегрирования этих уравнений. Первый вариант такого рода динамических уравнений принадлежит Чаплыгину (1897 г.). Уравнения Чаплыгина знаменуют собой новую эру в развитии неголономной механики. Благодаря открытию этих уравнений неголономная механика была поставлена на такой же высокий уровень, как голономная механика после опубликования «Аналитической механики» Лагранжа. Преодолев тупик, в котором

²⁹ Л. Н. С р е т е н с к и й. О работах С. А. Чаплыгина по теоретической механике. — В кн.: С. А. Ч а п л ы г и н. Собр. соч. Т. 3, стр. 366—377.

оказалась динамика неголономных систем в конце первого периода своего развития (1687—1897 гг.) Чаплыгин раскрыл потенциальные возможности создания мощных методов неголономной механики, обобщающих соответствующие методы классической динамики голономных систем. Его исследованиями начинается второй период в истории неголономной механики, характеризующийся бурным развитием теории и ее многочисленных приложений в различных областях естествознания и техники. Чаплыгину принадлежит заслуга обобщения принципа Гамильтона — Остроградского в случае неголономных систем, преобразования уравнений динамики неголономных систем с двумя свободными параметрами к канонической форме, а также распространения метода интегрирования динамических уравнений голономной механики (метода Гамильтона — Остроградского — Якоби) на случай движения неголономных систем с двумя степенями свободы. Он открыл конкретный случай движения неголономной системы (задача Чаплыгина). Соответствующая неголономная система является элементом счетно-решающих устройств, получивших широкое распространение в настоящее время в связи с развитием кибернетики.

ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ НА УКРАИНЕ В 1890—1917 гг.

1

Социально-экономическое и культурное развитие Украины в конце XIX — начале XX в.

Украинские губернии до конца XIX в. составляли один из основных сельскохозяйственных районов России. Царское правительство всячески сдерживало развитие производительных сил на окраинах империи, концентрируя капитал в центральных губерниях страны и в самом Петербурге. Но с увеличением добычи угля в Донецком бассейне и развитием железнодорожного строительства ускоряются темпы роста промышленности на Украине особенно быстро. В начале XX в. очень интенсивно стали развиваться металлургия и машиностроение в южных районах и сахарная промышленность — на Правобережье Днестра.

В это время многие земледельцы переходят от выработки товарного зерна к свекловодству и табаководству, происходит процесс обеднения крестьян, что не могло не повлиять на резкое повышение темпов классового расслоения на селе. Бедняки мало-помалу совсем теряли свою землю и образовывали сельский пролетариат — батрачество. Часть крестьян направлялась в город, а часть переселялась на новые земли (в Сибирь и Среднюю Азию). В результате притока сельского населения в начале XX в. бурно растут промышленные города — Харьков, Юзовка, Луганск, Екатеринослав Кривой Рог и другие.

К началу XX в. темпы развития промышленных предприятий Украины, несмотря на относительно позднее их развитие, были большими по сравнению с другими районами России. Кризис начала XX в., наступивший вслед за промышленным ростом, стимулировал концентрацию капитала, организацию трестов и синдикатов. В 1902 г. был организован синдикат «Продамет», объединивший около 80% предприятий металлургической промышленности, а в 1904 г. — «Продуголь», который охватил почти все предприятия угольной промышленности Украины. Оба эти гигантских синдиката находились в руках иностранного капитала. «Продамет» концентрировали французский и бельгийский капиталы, вложенные в украинскую металлургию. Что касается «Продугля», то из 3600 угольных шахт на Донбассе около 3200 принадлежали иностранным капиталистам. Отечественный капитал нашел

себе применение в другой отрасли промышленности — в сахарной, которая была сконцентрирована главным образом на Правобережье, на Киевщине, а также в северо-западных уездах Харьковской губернии (Сумы). И все же, несмотря на сравнительно высокие темпы роста промышленного производства, Украина продолжала оставаться сельскохозяйственным районом страны. Накануне первой мировой войны 1914—1917 гг. сельское хозяйство давало 81% валовой продукции России, и 82% населения было занято в сельском хозяйстве.

Борьба между отечественным и иностранным капиталом за преимущественное обладание той или иной отраслью промышленности, развитие капитализма в сельскохозяйственном производстве и рост капиталистических отношений на селе, пауперизация крестьянства и, наконец, рост сознательности пролетариата, переходившего от борьбы экономической к борьбе политической,— все это налагало определенный отпечаток на развитие науки и культуры на Украине в годы последнего этапа капитализма.

Произвол самодержавия чувствовался на Украине в еще большей степени, чем в центральных губерниях России,— здесь к классовому гнету добавлялся еще и национальный. Нельзя было издавать украинские книги, даже печатать ноты с текстом на украинском языке. Еще более тяжелый запрет лежал на введении украинского языка в школу. Естественно, что такая дискриминация очень затрудняла развитие национальной культуры и науки — ведь развитие науки неразрывно связано с необходимостью широкого доступа в высшие учебные заведения, а об этом в царское время не могло быть и речи.

Однако сильно возросшая нужда в инженерах и техниках для промышленности привела к организации на Украине высших и средних технических учебных заведений. В Харькове в 1885 г. был открыт технологический институт, а в Киеве в 1898 г. — политехнический. Вскоре, в 1899 г., организовалось Екатеринославское горное училище, преобразованное в 1912 г. в институт. В 1906 г. в Киеве и Одессе, а в 1907 г. — в Харькове на общественные средства были организованы Высшие женские курсы, в состав которых входили физико-математические факультеты.

В начале XX в. на Украине находилось три университета с физико-математическими факультетами: Киевский, Харьковский и Новороссийский. По количеству студентов Киевский университет стоял на третьем месте после Московского и Петербургского.

Кроме того, на Украине существовало еще два центра математической мысли — Львов и Черновицы, которые были оторваны от России и насильно включены в состав Австро-Венгрии.

Австрийское монархистское правительство и магнатско-шляхетская верхушка Восточной Галиции подвергала жестокой эксплуатации коренное население — украинцев, лишая его земли, свободы, человеческих прав и даже родного языка. Во Львовском университете и Политехническом институте преподавание велось на польском языке. Украинцам очень трудно было попасть в высшее учебное заведение, а если это и удавалось, то в университете они могли рассчитывать глав-

ным образом на богословский факультет. На других факультетах, особенно по математической специальности, число украинцев было ничтожным. Так, в 1910 г. в Черновицком университете на 1027 студентов было только 144 украинца, из которых 95 учились на богословском факультете. Во Львовском политехническом институте в том же году из 1660 студентов только 70 человек составляли украинцы и то из зажиточных слоев населения. Такое положение во Львовском и Черновицком университетах лишало украинцев возможности получать высшее образование. Средние школы, количество которых было весьма ограничено, находились лишь в крупных городах, причем на родном языке преподавание почти не велось.

Единственной научной организацией, созданной на народные средства и издававшей свои труды на украинском языке, являлось Научное общество имени Т. Г. Шевченко во Львове. Его математическо-естествоведческо-медицинская секция сыграла некоторую роль в истории развития отечественной математики. Обществом было напечатано до 1917 г. 48 статей математического содержания. Этим львовские ученые сделали первую попытку создания украинской терминологии.

Большую роль в развитии математики сыграло Харьковское математическое общество, которое было одной из старейших общественных научных организаций. В Киеве Д. А. Граве в эти годы положил основы алгебраической школы, а в Екатеринославе в начале XX в. Я. И. Грдина создал свою «механику живых организмов». В Одессе значительную роль в деле организации печатания научных математических изданий сыграло книгоиздательство «Матезис», организованное группой одесских ученых во главе с геометром В. Ф. Каганом. В 1884 г. на Украине В. П. Ермаков организовал первый в России популярный журнал по математике — «Журнал элементарной математики», впоследствии преобразованный в «Вестник опытной физики и элементарной математики».

Таким образом, до 1917 г. высшие учебные заведения и общественные организации Украины внесли определенный вклад в развитие отечественной математики и подготовили почву для выдающегося расцвета математики и математических знаний, которого добился украинский народ, как и другие народы нашей страны, за годы Советской власти.

2

Математика в Харьковском университете. Харьковское математическое общество

Харьковский университет в конце XIX — начале XX в. сыграл большую роль в развитии математики на Украине. Кафедра чистой математики университета в 90-е годы имела в своем составе трех штатных преподавателей — ординарных профессоров М. Ф. Ковальского и Д. М. Деларю и доцента К. А. Андреева. На кафедре прикладной математики был единственный преподаватель —

ординарный профессор В. Г. Имшенецкий, который перешел в Харьковский университет из Казанского в 1872 г.

В это время в Харькове работали А. М. Ляпунов и В. А. Стеклов. Широко известны их исследования по качественным методам математического анализа и математической физике с их многочисленными приложениями. Большое значение имели также исследования С. Н. Бернштейна по конструктивной теории функций и теории дифференциальных уравнений с частными производными и работы Д. М. Синцова по теории коннексов и геометрической теории дифференциальных уравнений.

Благоприятные условия для научного общения, обмена мнениями и публикации готовых результатов создала деятельность Харьковского математического общества при университете, организованного в 1879 г.

Значительную роль в организации общества сыграл Имшенецкий. Общество заседало регулярно каждый месяц, количество членов его уже в конце первого года существования достигло 23. К участию в заседаниях общества привлекались и студенты физико-математического факультета, и преподаватели средних учебных заведений.

Первым председателем общества был избран Е. И. Бейер, секретарем — К. А. Андреев, а в 1880 г. председателем стал В. Г. Имшенецкий. Общество имело свой печатный орган — «Сообщения и протоколы Харьковского математического общества». С 1882 г. в нем кроме харьковских математиков публиковали свои работы П. Л. Чебышев, А. А. Марков, продолжал присылать свои работы переехавший в Петербург Имшенецкий, а позже печатали здесь свои статьи также А. Н. Коркин, Н. Е. Жуковский и другие видные математики. После отъезда Имшенецкого председателем общества и редактором его журнала на долгие годы (до 1899 г.) стал К. А. Андреев.

Рассмотрим кратко научную и педагогическую деятельность ученых Харькова конца XIX — начала XX в.

Двадцать пять лет в Харьковском университете работал К. А. Андреев. Он читал различные математические лекционные курсы, в том числе аналитическую геометрию на младших и высшую геометрию на старших курсах. Лекции по высшей геометрии были литографированы в 1885 г., а по основному курсу аналитической геометрии в 1888 г. вышел учебник, издававшийся впоследствии пять раз и пользовавшийся большой популярностью. Удачно изложены в нем элементы проективной геометрии и фокальные свойства поверхностей 2-го порядка и многие другие вопросы, что с методической точки зрения до сих пор не утратило интереса. Это же относится и к изданному в 1892 г. сборнику упражнений по аналитической геометрии. После 25-летней деятельности в Харькове в 1898 г. Андреев переехал в Московский университет. К этому времени он уже завершил основные свои работы и являлся вместе с В. Я. Цингером признанным главой проективно-геометрического направления в отечественной математике.

Наиболее значительной научной работой К. А. Андреева была его докторская диссертация «О геометрических соответствиях в применении к вопросу о построении кривых линий», защищенная в 1879 г.



К. А. Андреев.

в Московском университете. Уже в магистерской диссертации «О геометрическом образовании плоских кривых» Андреев чисто синтетическим геометрическим способом обосновал построение кривых высших порядков при помощи установления взаимнодвузначного соответствия между прямыми, входящими в состав двух пучков на плоскости, и вывел условия, при которых это соответствие вполне определяется. В докторской диссертации Андреев поставил задачу о построении общей теории взаимномногозначных соответствий между прямыми двух пучков на плоскости так, чтобы проективное однозначное соответствие и основанная на нем теория проективного построения кривых 2-го порядка служила частным случаем этой общей теории. Диссертация Андреева не была своевременно замечена и оценена геометрами. Результаты, по-

лученные К. А. Андреевым, послужили основой для избрания его в 1884 г. членом-корреспондентом Академии наук.

В 80—90-х годах Андреев опубликовал несколько работ геометрического содержания — «О многоугольниках Понселе», «О семиугольниках Шретера» и «Гомоциклические изображения сферы на плоскость», которые содержали новые чисто проективные доказательства уже известных ранее геометрических теорем, при этом не использовались бесконечно малые перемещения и закон непрерывности. В статье «О построении поляра относительно плоских кривых линий» (1878 г.) Андреев указал способы проективного определения поляра любого порядка любой точки плоскости относительно плоской алгебраической кривой, а в работе «К вопросу о конфигурациях» (1891 г.) доказал возможность вписания и описания около любой поверхности 2-го порядка в трехмерном пространстве теории конфигурации любого порядка на 2^{n-1} точек и 2^{n-1} плоскостей, у которой в каждой плоскости лежит n точек, а через каждую точку проходит n плоскостей. Интересна работа «Об изложении начал проективной геометрии» (1880 г.), в которой высказывались важные идеи о необходимости и путях разработки аксиоматики проективной геометрии. Среди немногочисленных работ Андреева по математическому анализу наиболее важна статья «Некоторые обобщения в вопросе о разложении определенного интеграла по формуле, предложенной П. Л. Чебышевым» (1883 г.), где Андреев одновременно с Грамом и независимо от него ввел определитель (называемый теперь определителем Грама), и применил его к исследованию

остаточного члена чебышевской формулы. Другие работы по математическому анализу Андреев выполнил в связи с оценкой метода Имшенецкого для разыскания рациональных частных интегралов линейных и нелинейных дифференциальных уравнений.

В это время Андреев написал также свои известные историко-биографические очерки о жизни и научном творчестве М. Шаля, К. Штаудта, В. Г. Имшенецкого и В. Я. Буняковского.

В 1883 г. на кафедре чистой математики был утвержден штатным доцентом приват-доцент Петербургского университета М. А. Тихомандрицкий (1844—1921). Родился он в Киеве в семье профессора-математика Киевского университета. В 1865 г. он закончил Петербургский университет со степенью кандидата, а в 1876 г. защитил магистерскую диссертацию «О гипергеометрических рядах». В Харьков он прибыл уже с большим опытом педагогической работы. На протяжении последующих 20 лет (до 1903 г.) Тихомандрицкий работал в Харьковском университете и был долгое время секретарем Харьковского математического общества. В 1885 г., вернувшись из заграничной командировки, он защитил докторскую диссертацию «Обращение гиперэллиптических интегралов». Защите диссертации предшествовали статьи об обращении эллиптических интегралов в лейпцигском журнале «*Mathematische Annalen*» и «Сообщениях Харьковского математического общества». В них Тихомандрицкий получил прямой переход от эллиптических интегралов к тэта-функциям Якоби без использования теоремы сложения интегралов первого и второго рода. В докторской диссертации он осуществил переход гиперэллиптических интегралов к тэта-функциям, доказав формулы Вейерштрасса, опубликованные без вывода в журнале Крелля и дающие выражения частных производных от логарифма абелевых функций через интегралы второго рода. Впоследствии, в 1894 г., Тихомандрицкий выполнил аналогичную задачу для абелевых интегралов в работе «Основания теории абелевых интегралов» (1894 г.). В своих исследованиях Тихомандрицкий не получил существенно новых результатов по теории эллиптических функций, но определил связи между различными эллиптическими функциями, в частности, нашел функции несколько более общего типа, заключающего в себе как функции Вейерштрасса, так и функции Якоби.

За 20 лет своей деятельности в Харьковском университете Тихомандрицкий прочитал 16 различных математических курсов. Многие из них были литографированы и впоследствии опубликованы. Впервые читались специальные курсы теории гиперэллиптических интегралов и теорий абелевых интегралов, а также курс теории вероятностей, опубликованный в 1898 г., но составленный и читанный Тихомандрицким еще с 1887 г. Наиболее существенным из курсов, введенных в университете Тихомандрицким, был, однако, его большой курс теории эллиптических интегралов и эллиптических функций, изданный в Харькове в 1895 г. и удостоенный в 1897 г. Академией наук премии имени В. Я. Буняковского. В 1904 г. Тихомандрицкий уехал из Харькова в Петербург. Перед отъездом он попытался доказать пятый постулат Евклида в рамках евклидовой геометрии в то время, когда

значение открытий Лобачевского было уже давно общепризнанным. Д. М. Синцов разъяснил Тихомандрицкому ошибочность его позиции и самого доказательства.

В 1885 г. из Петербургского университета в Харьковский на кафедру теоретической механики был переведен А. М. Ляпунов, незадолго до этого защитивший в Петербурге свою магистерскую диссертацию. Ляпунову поручили в университете кроме лекций по механике читать курс теории вероятностей. Ляпунов опубликовал в 1900—1901 гг. пять работ по теории вероятностей. В них он дал свой метод, позволивший ему установить центральные предельные теоремы.

А. М. Ляпунов оказал большое влияние на формирование научных интересов своего выдающегося ученика — В. А. Стеклова. В 1891 г. Стеклов стал приват-доцентом, в 1894 г. — экстраординарным профессором кафедры теоретической механики Харьковского университета. После отъезда Ляпунова в 1902 г. он возглавил кафедру теоретической механики и Харьковское математическое общество. В Харьковском университете Стеклов все годы вел не только интенсивную научную, но и не менее интенсивную педагогическую деятельность. Он читал кроме обязательного курса механики курсы теории интегрирования дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного, а также специальные курсы динамики твердого тела, гидродинамики и теории упругости, излагая в них многие собственные результаты.

Несколько раньше Стеклова в 1877 г. на математическое отделение физико-математического факультета Харьковского университета поступил В. П. Алексеевский (1858—1916). Родился он в Новгородской губернии в семье военного инженера. В 1884 г. он окончил Харьковский университет со степенью кандидата. Первые его работы, опубликованные в «Сообщениях Харьковского математического общества», относились к вопросу об интегрировании в конечном виде некоторых специальных видов дифференциальных уравнений. В них обобщались некоторые результаты Летникова и Вейлера. Вскоре, однако, Алексеевский, получив в 1887 г. в университете стипендию «для приготовления к профессорскому званию», начал изучать некоторые вопросы теории функций, которым и посвятил в дальнейшем свои основные, немногочисленные, но интересные работы. Уже в 1888—1889 гг., ведя в университете практические занятия по курсам Тихомандрицкого, Алексеевский опубликовал в «Сообщениях Харьковского математического общества» исследование «О функциях, подобных функции гамма», которое в 1892 г. было представлено им в качестве магистерской диссертации, а в 1893 г. — защищено. С этого времени Алексеевский был утвержден приват-доцентом кафедры чистой математики. Он стал читать курсы теории функций комплексного переменного и вариационного исчисления, а в дальнейшем и другие общие и специальные курсы, среди которых наиболее близким к его научным интересам был курс теории эйлеровых интегралов. В магистерской диссертации Алексеевский ввел и подробно изучил специальный класс функций, подобных эйлеровой функции гамма. Этот класс был отличен от класса гаммаморф-

ных функций, введенных до того П. Аппелем и включавших в себя как частные случаи более специальные виды функций, рассмотренные еще ранее Гейне и Пикаром.

Алексеевский рассмотрел функции, имеющие корни вида $m\omega + n\omega'$, где m и n — целые отрицательные числа; ω и ω' — периоды эллиптических функций. В частном случае такие функции $H(x)$ удовлетворяют функциональному уравнению

$$H(x+1) = \Gamma\left(\frac{x}{\alpha}\right) H(x),$$

где $\alpha = \frac{\omega'}{\omega}$. Он показал, что при α вещественном и рациональном можно свести дальнейшие рассуждения к случаю $\alpha = 1$, и при этом обозначил функцию через $g(x)$. Функции $g(x)$ и $H(x)$ он назвал гаммаморфными. Эта аналогия подтверждалась в диссертации выводом многих свойств функций $g(x)$ и $H(x)$; так, для $g(x)$ были получены интегралы, аналогичные интегралам Раабе и Коши для обычной функции гамма, разложения в ряды и бесконечные произведения, формула, аналогичная формуле Стирлинга, формула удвоения аргумента и многие другие свойства. Как непосредственное обобщение функций $g(x)$, Алексеевский рассматривал класс функций $g_n(x)$, который можно определить функциональным уравнением $g_n(x+1) = g_{n-1}(x)g_n(x)$, причем $g_0(x) = \Gamma(x)$; $g_1(x) = g(x)$.

В более поздних работах Алексеевский установил также связи между своими гаммаморфными функциями и функциями Бопэна и Кинкелина. Дальнейшему, глубокому исследованию гаммаморфных функций он собирался посвятить докторскую диссертацию, которую ему так и не удалось написать.

Основной помехой в его научно-исследовательской деятельности было тяжелое материальное положение. Еще будучи студентом, он вынужден был из-за этого на некоторое время прервать занятия в университете, а сразу после защиты магистерской диссертации едва не покинул университет, собираясь перейти на другую работу. Несмотря на неоднократные просьбы профессоров и ректора, Алексеевского утвердили исполняющим обязанности экстраординарного профессора лишь в 1904 г. после пятого ходатайства. Обширный, подготовленный им к изданию курс дифференциального и интегрального исчисления так и не был напечатан в связи с переездом Алексеевского в Томский технологический институт. В 1902 г. Стеклов отозвался об Алексеевском как о «серьезном ученом, установившем прочно свое научное достоинство». Исследования Алексеевского были продолжены английским математиком Барнсом, доказавшим в 1902 г. некоторые из теорем Алексеевского в общем виде, а также бельгийским математиком Бопэном, который ввел название «функции Алексеевского».

В 1899 г. в Харьковский университет был приглашен А. П. Пшеборский (1871—1942). Родился он в Киевской губернии в семье морского врача. В 1894 г. закончил Киевский университет и был оставлен (в 1895 г.) при университете стипендиатом. В этом же году Пшебор-



А. П. Пшеборский.

ский за работу «О методах Абеля, Якоби, Лиувилля и Вейерштрасса в теории эллиптических функций» получил премию имени И. И. Рахманинова. В 1897 г., выдержав устные магистерские экзамены, он занял в университете должность приват-доцента. После защиты в 1902 г. магистерской диссертации «Некоторые приложения теории линейчатых конгруэнций» (1901 г.) он был назначен исполняющим обязанности экстраординарного профессора кафедры чистой математики Харьковского университета, а в 1908 г., после защиты докторской диссертации «Исследования по теории аналитических функций, задача о продолжении ряда Тейлора» (1908 г.), — ординарным профессором.

Научные интересы Пшеборского отличались некоторой пестротой. Его первые работы киевского периода относились к теории эллипти-

ческих функций. В Харькове он занялся некоторыми вопросами дифференциальной геометрии и в магистерской диссертации рассмотрел некоторые приложения теории конгруэнций к теории поверхностей. В 1913 г. он опубликовал две статьи о свойствах некоторых многочленов, наименее уклоняющихся от нуля в заданном интервале (одна из этих статей была напечатана в «Comptes rendus» по представлению Пикара), а годом раньше опубликовал доказательство теоремы Лагерра о числе корней многочлена с вещественными коэффициентами. Ему принадлежит фундаментальное учебное пособие по основаниям арифметики и обширный литографированный курс теории конечных разностей, а также опубликованное «Введение в анализ». Будучи на протяжении многих лет секретарем Харьковского математического общества, Пшеборский составил обзор его деятельности за первые 20 лет существования, изданный в 1911 г.

В 1899 г. на должность ординарного профессора кафедры чистой математики был приглашен Д. А. Граве, который в те годы занимался главным образом теорией алгебраических линий и поверхностей. Он собирався организовать при кафедре чистой математики семинар по алгебре и взял на себя чтение всех геометрических курсов, преподававшихся до него Андреевым, однако, уже 1 января 1902 г. был переведен в Киевский университет.

В 1902 г. начал свою преподавательскую деятельность на кафедре чистой математики в качестве приват-доцента воспитанник Харьковского университета, сдавший в 1902 г. магистерские экзамены,

М. Н. Лагутинский (1871—1915). Он опубликовал более десяти научных работ. Наиболее интересными из них были работы, посвященные распространению метода Дарбу на системы алгебраических дифференциальных уравнений и применению этого метода к задаче Брио и Буке.

После переезда Д. А. Граве в Киев на кафедру чистой математики в 1903 г. был избран Д. М. Синцов (1867—1946). В 1890 г. он окончил математическое отделение физико-математического факультета Казанского университета и был оставлен при университете для подготовки к профессорскому званию. Уже на четвертом курсе Синцов написал первую научную работу, за которую получил золотую медаль. В 1893 г. он сдал магистерские экзамены и в 1895 г. защитил магистерскую диссертацию «Теория коннексов в пространстве в связи с теорией дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка». Эта диссертация определила дальнейшее направление большинства научных исследований ученого.

Будучи приват-доцентом Казанского университета, Синцов в 1898 г. защитил докторскую диссертацию «Рациональные интегралы линейных уравнений», посвященную проблеме о соотношении способов Лиувилля и Имшенецкого определения рациональных решений линейных дифференциальных уравнений. Он усовершенствовал способ Лиувилля, распространил его уравнения порядка выше второго и на системы дифференциальных уравнений и определил, что методы Лиувилля и Имшенецкого по существу являются родственными.

В 1899 г. Синцов был приглашен на должность ординарного профессора в незадолго до того открытое Екатеринославское высшее горное училище. Здесь он интересуется методикой и организацией преподавания: издает литографированные курсы своих лекций, разрабатывает программы математических курсов для технической высшей школы.

В Харькове Синцов опубликовал целый ряд работ, в которых развил и обобщил теорию коннексов в ее связи с интегрированием дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Он блестяще преодолел трудности изучения теории коннексов, требовавшей, как об этом писал в свое время Клейн, широкой эрудиции в самых разнообразных вопросах теории функций, геометрии, теории инвариантов. Клебш в 1872 г. назвал тернарным коннексом геометрическую конфигурацию плоскости, элементом которой служит



Д. М. Синцов.

сочетание «точка — прямая». Такая конфигурация определяется как совокупность сочетаний «точка — прямая», удовлетворяющих уравнению

$$f(x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3) = 0,$$

где x_1, x_2, x_3 — однородные координаты точки; u_1, u_2, u_3 — однородные координаты прямой, а функция однородна относительно x_1, x_2, x_3 и u_1, u_2, u_3 в отдельности.

А. Клебш построил теорию такого тернарного коннекса и применил ее к изучению поведения интегральных кривых обыкновенных дифференциальных уравнений. Синцов в магистерской диссертации рассмотрел так называемый «кватернарный коннекс», т. е. коннекс с элементом «точка — плоскость» в пространстве, в его связи с интегрированием дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

В первой большой работе харьковского периода «К теории коннексов» (1904 г.) Синцов впервые рассмотрел не исследованный никем до него обобщенный коннекс с элементом «точка — прямая — плоскость» в пространстве (коннекс (x, p, u)). Он предположил, что обобщенный коннекс — это конфигурация из сочетаний (элементов) «точка — прямая — плоскость», связанных однородным относительно x_i, p_{ik} и u_k соотношением

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4; p_{12}, p_{13} \dots p_{34}; u_1, u_2, u_3, u_4) = 0. \quad (1)$$

После наложения такого условия совокупность сочетаний «точка — плоскость», ему удовлетворяющих, представляет собой многообразие девяти измерений. Если подставить в уравнение (1) координаты некоторой произвольной точки, то уравнение определит, вообще говоря, некоторое многообразие шести измерений из сочетаний «прямая — плоскость», которое Синцов назвал «коннексом (p, u) », принадлежащим данной точке. Если при подстановке координат точки уравнение (1) обратится в тождество, то всякая прямая и всякая плоскость в сочетании с этой точкой составит элемент исходного коннекса (x, p, u) и точка будет основной для данного коннекса. Далее аналогичным образом вводится понятие основных сочетаний «точка — прямая», «точка — плоскость» и «прямая — плоскость» коннекса (x, p, u) . В работе вводится также понятие простых и кратных коинциденций коннексов. Рассматриваются особенные точки, особенные прямые и плоскости, дающие начало кратным элементам (x, p, u) , содержащим эти особенные образы. Очень подробно изучается трилинейный коннекс (x, p, u) , а также коннекс (x, s, u) , состоящий из соединений элементов «точка — линейный комплекс — плоскость». В работе показано, что коннекс (x, p, u) не имеет сопряженного, т. е. ковариантного коннекса, который из тех же элементов, что и исходный, и элементы которого находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами исходного. С этой точки зрения более близким аналогом к клебшевскому тернарному коннексу является коннекс с элементом (x, s, u) .

В другой работе — «Системы кривых, связанных с главной коинциденцией коннекса (x, p, u) », доложенной на XII съезде естествоис-

пытателей и врачей в Москве и опубликованной в «Математическом сборнике» (т. 27), рассматривается так называемая главная коинциденция обобщенного коннекса (x, p, u) . Так была названа четвертая коинциденция (пересечение пяти коннексов), образуемая теми элементами данного коннекса $L(x, p, u) = 0$, у которых точка x лежит на прямой p , а плоскость u содержит прямую p . В работе исследуется интегративная задача, связанная с главной коинциденцией: распределить элементы главной коинциденции на многообразия одного измерения, в которых соседние элементы находились бы в соединении. В результате выводится дифференциальное уравнение системы пространственных кривых

$$f(x; (xdx); (xdxd^2x)) = 0,$$

являющееся дифференциальным уравнением второго порядка в полных дифференциалах. Если коннекс — алгебраический, то эти кривые имеют рациональные характеристики, и тогда для таких систем пространственных кривых обобщаются теоремы, доказанные ранее для плоского случая. В смысле интегративной задачи, связанной с главной коинциденцией, коннекс (x, p, u) является, таким образом, аналогом тернарного коннекса.

В серии статей, опубликованных в «Сообщениях Харьковского математического общества» (том X и XII) под общим названием «К вопросу об особенных элементах коннекса», исследовались свойства особенных элементов клешевского коннекса (x, u) , задаваемого уравнением $f(x, u) = 0$, рассматривалась связь свойств их особенных элементов со свойствами сопряженного коннекса и строилась теория сопряженного коннекса. В работе использовано введенное Синцовым в магистерской диссертации понятие полярной пары. Выполнив эти исследования, Синцов отметил все же в своем докладе на Международном математическом съезде в Кембридже в 1913 г., что «даже теория простейших тернарных коннексов на плоскости еще не завершена», и в работах, относящихся уже к советскому периоду, он продолжил и углубил свои исследования по теории коннексов, а в дальнейшем занялся связанным с этим вопросом изучением свойств пфаффовых и монжевых многообразий.

Большое внимание уделял Синцов преподавательской деятельности. Читая на протяжении ряда лет курсы интегрирования дифференциальных уравнений, аналитической геометрии и геометрических приложений математического анализа, он из года в год совершенствовал эти курсы, издавая соответствующие печатные руководства, на которых воспитывались многие поколения студентов. На X съезде естествоиспытателей и врачей он сделал доклад об организации русской математической библиографии. Многочисленные материалы по вопросам программ по математике для высшей и средней школы, а также по вопросам методики преподавания были опубликованы в журналах «Математическое образование», «Вестник опытной физики и элементарной математики» и «Записках Харьковского университета». Синцов собрал и издал материалы по истории физико-математического факуль-



С. Н. Бернштейн.

тета за 100 лет, отредактировал и прокомментировал вступительную статью к изданию «Новых начал геометрии Лобачевского». С 1906 г., после отъезда В. А. Стеклова, он был председателем Харьковского математического общества и редактором «Сообщений Харьковского математического общества» на протяжении сорока лет.

В 1906 г. на кафедру чистой математики был приглашен Ц. К. Руссьян (1867—1934). Родившийся в семье адвоката в Подольской губернии, он закончил в 1889 г. Новороссийский университет и защитил там в 1900 г. докторскую диссертацию, которая как и магистерская, была посвящена интегрированию уравнений Пфаффа. В Харькове Руссьян занимался главным образом обобщением

различных методов интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных, в частности методов Якоби и Дарбу. Он читал в университете курсы дифференциального и интегрального исчисления и интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Некоторые его лекции были изданы литографированным и печатным способом.

В 1907—1908 учебном году в Харьковский университет был принят приват-доцентом кафедры чистой математики С. Н. Бернштейн (родился в 1880 г.), который работал в Харькове до 1933 г.

Бернштейн родился в семье доцента анатомии и физиологии Новороссийского университета, учился в Париже и Геттингене. В 1900 г. на Первом международном математическом съезде в Париже Д. Гильберт поставил перед математиками двадцать три математические проблемы и уже тогда две из них — девятнадцатая и двадцатая — приковали к себе внимание молодого Бернштейна. В 1903 г. двадцатичетырехлетнему ученому удалось решить девятнадцатую проблему. Это решение он представил в качестве диссертации на соискание степени доктора наук, которая была ему присуждена комиссией, куда входили Адамар, Пикар и Пуанкаре. Первые работы по этому вопросу, опубликованные в «Comptes rendus» и «Mathematische Annalen» в 1903—1904 гг., сделали уже тогда Бернштейна признанным ученым. В 1908 г. он защитил в Харькове магистерскую диссертацию «Исследование и интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка эллиптического типа» (при защите оппонентами были Д. М. Синцов и А. П. Пшеборский). В ней содержалось видоизмененное и детализированное решение девятнадцатой проблемы Гильберта, а также решение двадцатой проблемы. Решив девятнадцатую проблему, Бернштейн доказал, что любое достаточно регулярное решение аналитического уравнения в частных производных эллиптического типа яв-

ляется аналитической функцией. Достаточная регулярность решения обеспечивалась условием существования его непрерывных производных до третьего порядка включительно. Для получения этого общего и фундаментального вывода Бернштейн использовал метод, основанный на установлении специального необходимого и достаточного критерия аналитичности функции в вещественной области. Этот критерий устанавливался при помощи разложения функции в специального вида функциональный ряд, названный Бернштейном нормальным. В дальнейшем Бернштейн использовал свойства таких рядов в своих теоретико-функциональных исследованиях: так, в 1913 г. он рассмотрел многочлены специального вида (впоследствии многочлены Бернштейна). Решение двадцатой проблемы Гильберта давало положительный ответ на вопрос о разрешимости задачи Дирихле для нелинейных дифференциальных уравнений эллиптического типа, при достаточно общих предположениях. В магистерской диссертации содержались и важные геометрические результаты. Из первой части вытекал вывод об аналитичности всех поверхностей постоянной положительной кривизны с непрерывными производными первых трех порядков. Приводилось также первое решение проблемы Плато о построении минимальной поверхности, которая опирается на заданный контур для случая аналитического контура, проектируемого на плоскость в выпуклую кривую. В 1910 г. Бернштейн получил еще один геометрический результат, доказав теорему, что поверхность $z = f(x, y)$, которая имеет всюду непрерывные частные производные первого и второго порядка и полная кривизна которой не положительна и не равна нулю тождественно, не может находиться между двумя плоскостями $z = \pm c$. Эта теорема была впоследствии им самим усилена.

Большинство дальнейших исследований Бернштейна относилось к теории функций и главным образом к теории наилучшего приближения функций многочленами. Они положили начало новой области теории функций, которую он сам назвал конструктивной теорией функций. Эта теория была создана на основе синтеза идей Чебышева о наилучшем приближении непрерывных функций многочленами в смысле наименьшего значения в данном промежутке величины

$$E_n[f(x)] = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g_n(x)|,$$

где $g_n(x)$ — искомый многочлен заданной степени, с проблематикой теоретико-функциональной школы Вейерштрасса, доказавшего, что величина $E_n[f(x)]$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Наиболее значительной из работ Бернштейна по теории функции была его докторская диссертация «О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов n -й степени», защищенная им в Харькове в 1913 г. при официальных оппонентах А. П. Пшечорском и Н. Н. Салтыкове¹.

¹ Н. Н. Салтыков — ученик А. М. Ляпунова и В. А. Стеклова, защитивший в университете магистерскую и докторскую диссертации. Стал профессором кафедры теоретической механики после отъезда В. А. Стеклова.

В ней приводилось решение поставленной Ш. Ж. Валле-Пуссенем задачи об оценке величины $E_n[f(x)]$ для случая $f(x) = |x|$, встречающейся при аппроксимации непрерывной функции с помощью кусочно-линейной. При решении этой задачи Бернштейн ввел общие методы, с помощью которых установил связь быстрого убывания величины $E_n[f(x)]$ при $n \rightarrow \infty$ с дифференциальными свойствами функции $f(x)$, и получил необходимые и достаточные условия аналитичности $f(x)$, необходимые и достаточные условия существования производных всех порядков и др. В другой работе, относящейся к 1913 г., Бернштейн дополнил условия новыми предложениями, что позволило ему найти формулу для асимптотического значения величины $E_n[f(x)]$.

В 1912 г. Бернштейн опубликовал в «Сообщениях Харьковского математического общества» простое решение возникшей в теории интерполирования задачи о нахождении многочленов, зависящих только от значений функции в конечном числе точек промежутка $[0, 1]$ и неограниченно приближающихся в этом промежутке к заданной функции. Решением задачи был многочлен Бернштейна

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

не являющийся, однако, интерполяционным для $f(x)$, так как

$$f\left(\frac{m}{n}\right) \neq B_n\left(\frac{m}{n}\right).$$

В этот же период он впервые обратился к проблемам теории вероятностей. В 1911 г. вышло первое издание его курса теории вероятностей.

Бернштейн проявлял живой интерес к вопросам преподавания математики, популяризации ее основных понятий, математическому просвещению, программам по математике для средних школ. Вместе с Д. М. Синцовым он много занимался этими вопросами и опубликовал за рассматриваемый период более 30 статей и рецензий по различным общим проблемам образования. В Харьковском университете он прочитал целый ряд лекционных курсов; некоторые из них, например отдельные дополнительные курсы аналитической теории дифференциальных уравнений, теории интегральных уравнений и интегрирования уравнений математической физики, читались впервые.

3

Математика в Харьковском технологическом институте

Харьковский технологический институт был открыт в 1885 г. Первым директором института был назначен, по рекомендации И. А. Вышнеградского, его ученик и сотрудник, профессор Петербургского технологического института В. Л. Кирпичев (1845—1913). Кирпичев был видным специалистом в области прикладной ме-

ханики и сопротивления материалов и имел широкую эрудицию в смежных науках, в особенности в математике, физике и теоретической механике. С 1886 г. и до конца своей жизни он состоял членом Харьковского математического общества и на протяжении десяти лет избирался товарищем председателя общества.

Министерство не утвердило самостоятельной кафедры высшей математики в институте, поэтому для преподавания математических курсов в технологическом институте, по инициативе Кирпичева, были приглашены ведущие профессора университета: М. Ф. Ковальский, М. А. Тихомандрицкий и К. А. Андреев.

Тихомандрицкий читал дифференциальное и интегральное исчисления с элементами высшей алгебры на первом курсе, общем для студентов механического и химического отделений. Этот курс был неоднократно литографирован, а в 1891 г. издан типографским способом.

К. А. Андреев преподавал на первом курсе аналитическую геометрию, на втором М. Ф. Ковальский вел у механиков интегральное исчисление, содержащее интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений и некоторые методы интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных. Всего на курс высшей математики в институте отводилось 192 часа лекций (для механиков).

Курс теоретической механики с 1886 по 1894 г. читал А. М. Ляпунов, а с 1894 по 1904 г. — В. А. Стеклов. Стеклов значительно расширил курс, дополнив его основными понятиями векторной алгебры и некоторыми понятиями векторного анализа, а также криволинейными интегралами и некоторыми факультативными разделами математики.

В 1898 г. преподавание математического анализа на первом курсе, а после смерти Ковальского в 1900 г. и на втором, перешло к В. П. Алексеевскому.

В 1908 г. в институте была организована кафедра механики, куда на должность штатного адъюнкт-профессора пригласили ассистента Киевского политехнического института И. И. Белянкина (1876—1913), автора ряда учебных пособий и задачников по различным вопросам математики и механики. Кроме теоретической механики Белянкин читал курс дифференциального и интегрального исчислений и специальный курс приближенных вычислений. Работал Белянкин в институте около четырех лет.

Курс аналитической геометрии после отъезда К. А. Андреева в Москву в течение двух лет читал Д. А. Граве, а с 1902 г. — А. П. Пшеборский, который издал впоследствии обширный учебник ана-



М. А. Тихомандрицкий.

литической геометрии. Пшеборский начал свою деятельность в Харькове в октябре 1898 г. штатным преподавателем технологического института, будучи с января 1899 г. одновременно приват-доцентом Харьковского университета. В штат университета Пшеборский перешел лишь в 1905 г., но в институте продолжал работать по совместительству. Пшеборский вел также практические занятия по математическому анализу и геометрии и читал несколько раз дополнительные курсы вариационного исчисления и методов приближенных вычислений.

Одновременно с Пшеборским в штат института был принят преподавателем математики выпускник Харьковского университета С. И. Лукьянченко (1876—1955), работавший в институте до 1923 г. На протяжении многих лет он вел в институте практические занятия по математическим курсам и механике, а также читал лекции по дифференциальному и интегральному исчислениям и интегрированию дифференциальных уравнений. Этот последний курс, а также его задачник по интегральному исчислению были литографированы. В 1917 г. Лукьянченко, читавший в то время курс теоретической механики, был утвержден адъюнкт-профессором Харьковского технологического института. Он был автором нескольких работ, посвященных популярному изложению геометрии Лобачевского.

С 1898 г. преподавали математику и механику в институте также К. Г. Щиголев и А. В. Панченко, который впоследствии (в 1918 г.) был утвержден доцентом кафедры теоретической механики.

С 1902 по 1914 г. в институте работал М. Н. Лагутинский, который ввел практические занятия по аналитической геометрии и математическому анализу, а также читал факультативный курс — теория вероятностей и способ наименьших квадратов. С марта 1914 г. (недолго до своей смерти) Лагутинский перешел в штат института.

4

Математика в Киевском университете. Киевское физико-математическое общество

К началу 90-х годов на кафедре чистой математики Киевского университета было три профессора: В. П. Ермаков, М. Е. Ващенко-Захарченко и Б. Я. Букреев. В 1891 г. профессором в университет был назначен П. М. Покровский, а после его смерти (1901 г.) — Д. А. Граве. В это время на кафедре работал приват-доцент (с 1909 г. — профессор) Г. В. Пфейффер. В 1914 г. Б. Я. Букреева перевели в сверхштатные, а на освободившееся место приняли профессора Казанского университета А. П. Котельникова.

Преподавание по предметам в университете распределялось следующим образом: алгебраический анализ, аналитическую геометрию читал Ващенко-Захарченко, затем Д. А. Граве; Ермаков читал аналитическую геометрию, теорию чисел, разностное и вариационное исчисление, дифференциальные уравнения в обыкновенных и частных про-

изводных, Б. Я. Букреев — дифференциальное и интегральное исчисления и приложение их к геометрии, а также эпизодически — теорию функций комплексного переменного, теорию эллиптических функций. Примерно такой же круг дисциплин был предметом преподавания П. М. Покровского.

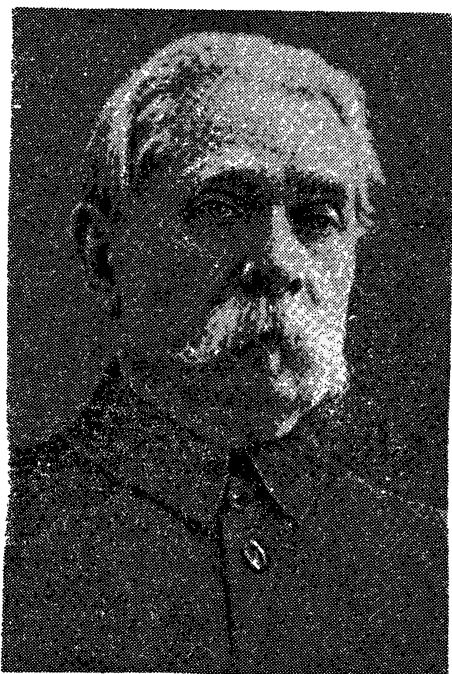
В 900-е годы теорию чисел и соответствующие спецкурсы стал читать Граве. Г. В. Пфейффер вел курсы теории вероятностей, разностного исчисления, теории эллиптических функций, а с 1907 г. — интегрирование дифференциальных уравнений. А. П. Котельников читал лекции по высшей математике для студентов естественного отделения и некоторые спецкурсы (неевклидову, начертательную, проективную геометрию и др.).

Особенно высоко в Киевском университете было поставлено преподавание алгебры и теории чисел, а также соответствующих спецкурсов. Некоторые из них читались только в Киеве, в частности весьма интересный спецкурс — основы новой математики, куда входили новейшие вопросы по теориям множеств, групп, полей и чисел.

Очень много времени педагогической работе уделял профессор Киевского университета Б. Я. Букреев (1859—1962). Он впервые в 1897 г. начал читать курс теории поверхностей как самостоятельный предмет. Общий характер его лекций отличался от лекций его учителей прежде всего тем, что он с самого начала своей преподавательской деятельности был сторонником обоснования анализа в соответствии с идеями Вейерштрасса, Дедекинда и Кронекера. Большое значение Букреев придавал наглядности материала. Он проявил настойчивость и энергию в организации математического кабинета в Киевском университете в 1907 г. Букреев преподавал также с 1896 г. на Высших женских курсах, а с 1898 г. по 1930 г. был профессором Киевского политехнического института. Он был одним из инициаторов возобновления работы Высших женских курсов в 1905 г. после закрытия их царским правительством.

На формирование математического таланта Букреева большое влияние оказал профессор Киевского университета В. П. Ермаков. Университет Букреев окончил в 1882 г. и был оставлен для подготовки к профессорскому званию. В 1885 г. он сдал магистерские экзамены, прочел пробные лекции, получил звание приват-доцента и начал преподавать математику на Высших женских курсах и в университете, одновременно работая над магистерской диссертацией «О разложении трансцендентных функций на частные дроби».

В 1887 г. Букреев был командирован за границу для продолжения научной работы. Основное внимание он уделял исследованиям по вопросу о фуксовых функциях, которые были в общих чертах завершены к концу 1888 г. и стали предметом докторской диссертации «О фуксовых функциях нулевого ранга с симметрическим основным полигоном», защищенной в мае 1889 г. Букреев исходил из теории конформных отображений, и фуксова функция нулевого ранга получалась из решения задачи об отображении известной формы односвязной области на полуплоскость. Исследование Букреева носило почти исключи-



Б. А. Букреев.

тельно аналитический характер. Ограничения, наложенные им на класс исследуемых функций, не были вызваны какими-либо затруднениями принципиального порядка. Они помогли ему избежать громоздких вычислений, что сделало теорию более удобной. Кроме того, именно такой выбор функций дал возможность Букрееву определить условия непрерывности фуксовой группы и построить дифференциальные уравнения, соответствующие каждой данной разрывной группе. Он получил основные подстановки группы и выяснил геометрический смысл их коэффициентов. Затем он использовал принцип симметричного продолжения Римана для определения всех необходимых разложений. Как известно, фуксовы функции в те годы только входили в науку и были в центре внимания многих математиков. Первая работа в этой

области в России принадлежала Букрееву. Она популяризировала идеи Фукса и Пуанкаре и решала новые проблемы в теории.

В 90-е годы XIX в. внимание Букреева продолжали привлекать исследования в области теории функций комплексного переменного, эллиптических и специальных функций. Он изучал общие вопросы дифференциального исчисления, особенно функции на максимум и минимум. К концу 90-х годов Букреев начал интересоваться главным образом дифференциальной геометрией. На эту тему была написана статья «Выражение элемента поверхности постоянной кривизны в симметрических координатах» (1897 г.), а также его известный оригинальный курс «Элементы теории поверхностей» (1900 г.). Букреев интересовался также и вопросами алгебры, которой увлекались тогда все киевские математики, а впоследствии — вариационным исчислением.

Значительный вклад внес Букреев и в популяризацию истории науки. Исторические отступления выгодно дополняют его научные работы и учебные курсы. Из-под его пера вышли биографические очерки о жизни и деятельности профессоров-математиков В. П. Ермакова, М. Е. Ващенко-Захарченко, В. Г. Имшенецкого, Монжа и других. Будучи очевидцем многих событий, Букреев увлекательно, образно и подробно рассказывал в своих воспоминаниях многие интересные эпизоды из истории русской математики, из истории Киевского университета.

Много времени педагогической работе уделял П. М. Покровский (1857—1901). Его курсы по читаемым им предметам были литографированы, а некоторые, как например, по теории эллиптических функций

и теории функций комплексного переменного были опубликованы (первый — 1886 г., второй — 1892 г.).

П. М. Покровский, воспитанник Московского университета (окончил в 1881 г.), ученик Н. В. Бугаева, почти все свои работы посвятил изучению высших трансцендентных функций. Магистерскую диссертацию «Теория ультраэллиптических функций первого класса» он защитил в 1887 г., докторскую — «О преобразованиях ультраэллиптических интегралов и функций 1-го класса» — в 1891 г. В Киеве Покровский продолжал тематику московского периода, т. е. занимался теорией ультраэллиптических функций. Так, в статье «Теорема сложения трансцендентных функций» (1895 г.) дается вывод теоремы сложения эллиптических и ультраэллиптических функций первого класса. Здесь Покровский исследовал также основы теории трансцен-



Г. В. Пфейффер.

дентных функций, обладающих теоремой сложения, и рассматривал последнюю в различных аспектах, в том числе и в применении ее к абелевым интегралам. Несколько статей и заметок Покровского относятся к теории эллиптических функций. В них доказывался новым методом теорема сложения эллиптических трансцендентных Вейерштрасса, излагается общее учение о рациональных функциях эллиптического образа, а также исследуется вопрос о решениях уравнений четвертой степени через функцию Вейерштрасса $p(u)$ и другие. В статье «К элементарной теории уравнения 3-й и 4-й степени» (1893 г.) предлагается новый способ отыскания рационального корня (если он есть) для кубического уравнения.

Покровский принимал деятельное участие в заседаниях съездов русских естествоиспытателей и врачей и в работе научных математических обществ (был членом Московского, Киевского и Казанского обществ). Только в Киевском физико-математическом обществе он выступил с 22 сообщениями.

Выдающаяся роль в развитии математической науки в Киеве принадлежит ученику В. П. Ермакова и Б. Я. Букреева, впоследствии (с 1920 г.) академику АН УССР — Георгию Васильевичу Пфейфферу (1872—1946). В 1891 г. он окончил Прилукскую гимназию и в 1896 г. — Киевский университет с дипломом первой степени и был оставлен здесь для подготовки к научной деятельности. С 1896 г. Пфейффер преподавал в гимназиях, а с 1900 г. — в университете. К этому времени он сдал магистерские экзамены и получил звание приват-доцента. Первые научные работы Пфейффера относились к весьма важной

и трудной части алгебры — решению уравнений в радикалах — и свидетельствовали о хорошем знании автором теории групп. В магистерской диссертации «Группы многогранников» (1903 г.) Пфейффер, как отметил Букреев, сумел подыскать и решить такие отдельные вопросы, которые или вовсе не были затронуты другими учеными, или же были только намечены, но не разработаны с достаточной подробностью. Так, из семи глав, посвященных вопросу о представлении линейных подстановок с комплексными коэффициентами при помощи инверсий в окружностях, последние две содержали почти исключительно самостоятельные выводы Пфейффера. В 1904—1905 гг. он был в зарубежных командировках, слушал лекции Клейна и Гильберта — в Геттингене и Пикара — в Париже. В 1905—1911 гг. он занимался почти исключительно теорией алгебраических функций. Он ставил перед собой прежде всего задачу об изучении особых точек алгебраических поверхностей с целью выяснить их влияние на периоды двойных интегралов и интегралов Пикара в полных дифференциалах. Такое направление его работ вело непосредственно к главной цели теории — достижению проведения аналогии с теорией абелевых функций. В статьях по этому вопросу Пфейффер предложил и новый метод исследования, являющийся известным видоизменением нетеровских идей, а также установил новую классификацию простых точек алгебраических поверхностей.

К концу 1910 г. Пфейффер опубликовал «Представление областей особых точек алгебраических поверхностей рядами, расположенными по целым положительным степеням двух параметров», где обстоятельно изложил результаты своих исследований за последние годы в этой области. За эту работу он был удостоен степени доктора математических наук в начале 1911 г. Работа состояла из пяти глав. Значительная часть ее посвящалась двойным, бипланарным и унипланарным точкам, и только в конце рассматривались точки более высокого порядка. Главным средством исследования являлось особое преобразование, которое Пфейффер скомбинировал из вейерштрассовского и обычного пространственного. Как отмечали оппоненты — Д. А. Граве и Б. Я. Букреев, рассуждение это представляло самостоятельное решение вопроса о тех условиях, при которых область особой точки алгебраической поверхности может быть представлена аналитически так, чтобы или одна координата выражалась обыкновенным, естественным относительно двух других координат рядом, или же чтобы две координаты выражались рядами того же типа относительно третьей координаты. Пфейффер получил также и другие важные результаты и ему удалось существенно продвинуться в новом и актуальном вопросе, решить который не могли многие известные математики — его современники. С 1911 г. Пфейффер начал проводить исследования в другой области — в теории интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных. Работы его в этой области впоследствии создали ему авторитет и почетное имя в науке. Значительную часть исследований он выполнил в годы советской власти. Ему удалось существенно расширить и усовершенствовать известные методы интегриро-

вания, установленные в классических исследованиях Якоби и других известных математиков.

Пфейффер принимал активное участие в работе Киевского физико-математического общества, в заседаниях съездов русских естествоиспытателей и врачей, в международных математических съездах. С 1910 г. он был членом Московского математического общества.

Педагогической деятельности Пфейффер уделял тоже очень много времени. До 1909 г. он оставался приват-доцентом Киевского университета, будучи одновременно преподавателем математики Киевского политехнического института, а в 1909 г. получил звание профессора университета. В 1909—1918 гг. он преподавал математику также на Высших женских курсах. Пфейффер был большим знатоком математической литературы по многим отделам математики, ученым с глубоким критическим чувством и высокой требовательностью к себе и другим.

Глубокие результаты по неголономной механике и отдельным вопросам математики получил П. В. Воронец (1871—1923).

П. В. Воронец по окончании Рижской губернской гимназии в 1892 г. поступил на математическое отделение физико-математического факультета Киевского университета. За сочинение «Геометрическое исследование эйлера случая о вращении тяжелого твердого тела» (1898 г.) он был награжден золотой медалью. По окончании университета в 1896 г. его оставили здесь для научной подготовки по кафедре механики. Занимался он под руководством профессоров Г. К. Суслова и П. М. Покровского. В 1899 г. он сдал магистерские экзамены, получил звание приват-доцента и стал читать лекции по математике и вести практические занятия по механике и математике.

С конца 90-х годов прошлого века Воронец проводит исследования в области дифференциальных уравнений, векторного анализа, интересуется различными проблемами динамики. Затем он особенно заинтересовался проблемами динамики материальных систем, которые подчиняются неголономным связям. Решение их было связано с гораздо большими трудностями по сравнению с классическим случаем голономных связей. Воронец опубликовал по этому вопросу целый цикл работ, где получил систему дифференциальных уравнений движения материальной системы с линейными неголономными связями в голономных и неголономных координатах в наиболее общем виде и общий метод преобразования таких систем. В магистерской диссертации Воронец предложил «Уравнения движения твердого тела, катящегося без скольжения по неподвижной плоскости» (1903 г.) и применил новый метод для получения уравнений движения неголономных систем. Благодаря этому стали хорошо заметны характерные особенности систем с неинтегрируемыми связями. Именно эти особенности были причиной ошибок в работах Неймана, Линдемана и Аппеля. В приложениях способ Воронца имел ряд преимуществ перед известными ранее. В последующих работах Воронец дал несколько обобщений этой задачи. Кроме решения многих конкретных вопросов механики в работах Воронца содержатся и новые открытия чисто математического характера.

ра. Так, в докторской диссертации «Преобразование уравнений динамики с помощью линейных интегралов движения» (1906 г.) он получил метод непосредственного интегрирования уравнения Лагранжа второго рода, а в предыдущих работах — метод интегрирования уравнения в частных производных Гамильтона — Остроградского и многие другие. В 1908 г. Воронеж получил звание ординарного профессора. Он читал лекции и вел практические занятия по математике и механике в университете и политехническом институте.

В начале 1914 г. на вакантное место по кафедре математики Киевского университета был избран А. П. Котельников.

А. П. Котельников (1865—1944) в 1883 г. поступил в Петербургский технологический институт. Через год он перевелся на математическое отделение Казанского университета и окончил его в 1888 г. В 1893 г. сдал магистерские экзамены, получил должность приват-доцента и начал читать механику и теорию упругости в университете. В 1896 г. Котельников защитил в Казани магистерскую диссертацию «Винтовое исчисление и некоторые его приложения к геометрии и механике». Большим вкладом в науку была его докторская диссертация «Проективная теория векторов» (1899 г.), за которую он получил звание доктора чистой и прикладной математики. В том же году по конкурсу он перешел на кафедру теоретической механики в Киевский политехнический институт. Здесь в течение четырех лет он читал основной курс теоретической механики и проводил практические занятия со студентами механического и химического отделений. В 1903 г. Котельников снова возвратился в Казанский университет на кафедру чистой математики, где в течение десяти лет читал лекции по общему курсу.

В Киевском университете с 1914 г. он читал лекции по сферической тригонометрии, начертательной и дифференциальной геометрии, а также вел специальные курсы и семинары по проективной и неевклидовой геометрии. На киевских Высших женских курсах Котельников читал курс интегрирования дифференциальных уравнений.

Кроме работ известных математиков часто появлялись сочинения студентов-математиков Киевского университета.

Некоторые из них публиковались в «Университетских известиях» и других журналах. Таковы были сочинения О. Ю. Шмидта, Б. Н. Делоне, Е. И. Жилинского, А. П. Пшеборского и других.

В 1889 г. М. П. Авенариус, Б. Я. Букреев, М. Е. Ващенко-Захарченко, В. П. Ермаков, И. И. Рахманинов, П. Э. Ромер, Г. К. Суслов, М. Ф. Хандриков, Н. Н. Шиллер, Е. К. Шпачинский организовали в Киеве физико-математическое общество.

Членами общества были ученые, преподаватели университета и реальных училищ, магистранты и студенты. До 1904 г. председателем общества был Н. Н. Шиллер, потом Г. К. Суслов. На заседаниях обсуждались научные темы как общего, так и специального характера. Рассматривались также и методические вопросы. За 28 лет существования Киевское физико-математическое общество насчитывало в своем составе более чем 350 членов. На его 462 заседаниях обсуждалось

множество научных вопросов по математике, физике, механике и смежным дисциплинам.

Значительное место в программе общества занимали алгебра и теория чисел, которым посвящалась большая часть сообщений и докладов. На заседаниях общества с докладами выступали также Н. Я. Сонин, Н. Е. Жуковский, Н. В. Бугаев, А. Г. Столетов и другие ученые. В обществе очень серьезное внимание уделялось преподаванию элементарной математики и это способствовало зарождению и укреплению известной киевской школы методики математики, к которой принадлежали члены общества: В. П. Ермаков, П. А. Долгушин, Н. В. Оглоблин, К. М. Щербина, М. А. Астряб, К. Ф. Лебединцев, М. Г. Попруженко и другие. На заседаниях общества неоднократно поднимался вопрос о введении в курс средней школы так называемых элементов высшей математики, например функциональной зависимости в связи с учением о бесконечно малых и понятием о координатах. Общество организовывало чтение популярных курсов публичных лекций. Иногда читались циклы лекций, объединенных общей большой темой. Члены общества активно участвовали в съездах русских естествоиспытателей и врачей, а также в международных съездах и конгрессах (Граве, Суслов, Покровский, Пфейффер, Воронеж, Белянкин и др.).

5

Научно-педагогическая деятельность Д. А. Граве. Киевская алгебраическая школа

В конце 1901 г. по конкурсу профессором кафедры чистой математики Киевского университета был избран Д. А. Граве. В январе 1902 г. он переехал в Киев, где почти 40 лет продолжалась его научно-педагогическая деятельность.

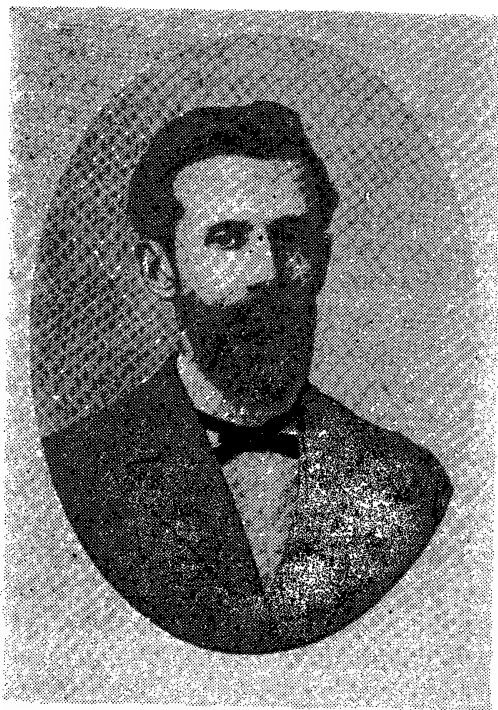
С 1907 г. Граве сосредоточивает свои научные интересы главным образом на новых направлениях алгебры и теории чисел, что вскоре отражается и на его публикациях.

По инициативе Граве в Киеве началось углубленное изучение и дальнейшая разработка трудов Вороного. Возрос интерес к вопросам аналитической теории чисел. В журнале «Intermediaire des Mathematiciens» Граве дал решение вопросов, поставленных другими учеными, и предложил доказать, что неопределенное уравнение

$$\frac{\pi}{4} = m \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{p} + n \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{q}$$

имеет только пять четверок целых решений m, n, p, q (эту теорему впоследствии доказал К. Штермер). Подобные задачи Граве предлагал и своим студентам.

Большое значение для развития математических знаний в нашей стране имели получившие широкое распространение курсы и пособия Граве — курсы по интегрированию уравнений с частными производ-



Д. А. Граве.

ными, аналитической геометрии, алгебраическому анализу и высшей алгебре. «Элементы алгебраического анализа» (1908 г.) явились первой монографией на русском языке, посвященной специально теории групп. В 1910 г. вышел литографированный «Курс алгебраического анализа», в 1914 г. были изданы «Элементы высшей алгебры», где автор использовал новейшие данные науки и практики преподавания этого предмета. Граве не ограничился составлением руководств по алгебре для университетов. В 1915 г. он опубликовал «Начала алгебры» для гимназий и других средних учебных заведений.

Тесно связаны с алгебраическими курсами Граве его курсы по теории чисел. Первый из них — «Элементарный курс теории чисел» — появился в 1909 г. В него Граве

включил новые исследования, в том числе исследования своих учеников. В 1909 г. Граве наметил широкую программу дальнейшего чтения специальных курсов и вскоре издал «Арифметическую теорию алгебраических величин» (1910 г.). Это был первый том задуманного обширного труда. В виде приложения здесь помещена статья В. П. Вельмина, в которой содержалось интересное изложение теории идеалов квадратичной области и рассматривались алгебраические числа в квадратичной области. Второй том — «Теория идеалов» — был опубликован в 1913 г. Он состоял из трех глав: в первой главе — фундаментальный базис — рассматривались основные свойства алгебраических чисел, вторая — посвящена общей теории модулей, третья, основная, — арифметике идеалов. В заключение Граве остановился более подробно на изучении некоторых свойств функций $\varphi(m)$ ($\varphi(m)$ — число классов по модулю m взаимно простых с m и представляющих естественное обобщение свойств функции, встречающейся в элементарной теории чисел).

Дальнейшие руководства Граве охватывают такие предметы, как введение в анализ, теорию эллиптических функций, различные вопросы страхования. Особенно увлекательна его «Энциклопедия математики», где популярно, живо и связно изложены основные направления, цели и методы математических исследований.

Курсы и учебные пособия Граве сыграли большую роль в развитии математического образования. Один из его выдающихся учеников Н. Г. Чеботарев писал: «Можно без особого преувеличения сказать, что книги Граве воспитали и привили вкус к математике большинству

современных математиков Союза»². В создании и издании учебных книг Граве существенную помощь оказывали его ученики: В. П. Вельмин, О. Ю. Шмидт, Е. И. Жилинский и др.

Д. А. Граве читал в Киевском коммерческом институте (с начала 1910 г. до 1925 г.) общий курс математики для студентов страхового подотдела, теорию вероятностей, страховую математику, а с 1915 г. стал читать также специальный курс — теорию пенсионных касс.

Д. А. Граве проявил себя как прогрессивный, демократически настроенный ученый.

Так, он неоднократно высказывался за допущение женщин в высшую школу. Вскоре он был приглашен на Высшие женские курсы читать лекции.

На основании различных высказываний Граве можно утверждать, что он в теории познания стоял на материалистических позициях, хотя, возможно, и не всегда был последовательным. В вопросе о происхождении и развитии науки, в частности математики, Граве, подобно Чебышеву, отмечал особую роль практики и прикладных наук. «Значение приложений для прогресса чистой математики, — писал он, — по моему мнению, настолько важно, что я не берусь отвечать на вопросы, что имеет более важное значение: математика для приложений или приложения для математики»³.

Как профессор Граве пользовался большим авторитетом и популярностью. Его лекции носили творческий характер. Многие теоремы, например по теории Галуа, впервые сообщались им на лекциях.

Для занятий со студентами Граве использовал также уже не новую, но интересную форму — семинары. Темами его семинаров и специальных курсов были: арифметическая теория квадратичных форм, теория идеалов, теория групп, теория Галуа, числа Бернулли, теория эллиптических функций и связанных с нею проблем теории чисел, общая теория полей и другие. Характерно, что молодежь в семинарах привлекалась к самостоятельной работе с младших курсов. Все участники семинаров изучали труды современных ученых и реферировали текущую литературу, а кроме того, читали классиков математики. Проводилась и коллективная работа, например, продолжение таблицы Якоби. Наибольшее внимание на семинарах уделялось теории групп. Неудивительно поэтому, что О. Ю. Шмидт опубликовал вскоре известную книгу «Абстрактная теория групп» (1916 г.).

Ученики Граве предложили доказательства ряда важных теорем еще будучи студентами третьих-четвертых курсов. На семинаре по алгебре в 1913 г., как сообщал об этом Граве в письме В. А. Стеклову⁴, изучалось два вопроса: 1) конечные группы ортогональных преобразований; 2) теория алгебраических функций с арифметической и групповой точек зрения. В 1912—1914 гг. семинар по алгебре стал извест-

² Сборник, посвященный памяти акад. Д. А. Граве. ГИТТЛ, М.—Л., 1940, стр. 12.

³ Д. А. Граве. Энциклопедия математики. К., 1912.

⁴ Архив АН СССР, ф. 162, оп. 2, д. 108, л. 20—21.



О. Ю. Шмидт.

ным за пределами России и положил начало киевской алгебраической школе.

Создание этой школы, из которой вышли крупнейшие алгебраисты нашей страны, является главным достижением в научной деятельности Граве.

Приведем кратко основные сведения о творческих достижениях киевской математической школы рассматриваемого периода.

Известным деятелем школы был О. Ю. Шмидт (1891—1956). За первую студенческую работу «Об уравнениях, решаемых в радикалах, степень которых есть степень простого числа» (1913 г.) он получил золотую медаль. О значении ее тогда Граве писал: «Дебют автора в этой важной отрасли следует признать блестящим. Автор говорит свое новое слово—сло-

во настолько серьезное, что становятся заметными неясные контуры красивых законов там, где до сих пор было пустое белое пятно. Изложение настолько новое и самостоятельное, что легче сказать, что не принадлежит автору, чем перечислить его результаты»⁵. В дальнейшем, как отметил А. Г. Курош, эту работу продолжили в своих исследованиях некоторые советские алгебраисты. Две последующие работы Шмидта были посвящены доказательству известной теоремы Ремака (это доказательство приводится почти во всех книгах по теории групп). Выдающимся явлением в математической литературе была работа Шмидта «Абстрактная теория групп», которая стала классическим пособием по теории групп.

Серьезные научные результаты получил также Б. Н. Делоне. Первое его сочинение «О соотношении между теорией идеалов и теорией Галуа» (1912 г.) было отмечено золотой медалью. Вскоре ему удалось дать новое доказательство известной теоремы Кронекера о рациональном выражении через некоторый корень из единицы всякого корня абелева уравнения, степень которого — простое число. Доказательство было проведено при помощи закона взаимности Эйзенштейна. Результат этих исследований Делоне опубликовал в статье «К определению алгебраической области при помощи сравнений (с приложением к абелевым уравнениям)» (1915 г.). Дальнейших успехов он добился в области решения неопределенных кубических уравнений вида $ax^3 + y^3 = 1$ и более сложных.

Видным представителем киевской математической школы был Н. Г. Чеботарев (1894—1947). Он стал участвовать в семинаре Граве

⁵ ЦГА УССР, ф. 708, оп. 1912, д. 160, л. 70.

еще будучи студентом второго курса. Уже в одном из своих первых докладов он предложил простое доказательство теоремы Бертрана о границе индексов симметричной группы. Затем он изучал теорию алгебраических функций и алгебраические числа по Гензелю, т. е. в связи с p -адическими разложениями. Он нашел арифметическую теорему монодромии: композиции всех групп инерции нормального поля есть группа Галуа этого поля. В дальнейших исследованиях Чеботарев получил доказательство теоремы Дедекинда-Фробениуса, связывающей группу Галуа с разложением на идеальные множители (Делоне предложил эту теорему независимо от теории идеалов) и изложил его осенью 1916 г. на заседании семинара.

Более простое доказательство и обобщение известной теоремы Шура о высшем пределе числа линейно независимых матриц перестановочной группы 2-го порядка дал М. Ф. Кравчук. Эти результаты он получил в дипломной работе «О параметрическом представлении перестановочных матриц» (1914 г.) и несколько позже и опубликовал в статье «О группах перестановочных матриц» (1915 г.).

Ученик Граве и Ермакова В. П. Вельмин еще будучи студентом опубликовал в «Математическом сборнике» первые свои заметки. За статью о кривых третьего порядка он был награжден золотой медалью. Важнейшие его работы, написанные в 1910—1913 гг., относились в основном к алгебре и теории чисел. Особое значение имела его магистерская диссертация «О квадратичном законе взаимности в произвольной квадратичной области» (1913 г.), которая была посвящена одному из важных вопросов современной теории чисел — о так называемом обобщенном законе взаимности. Как известно, формулировку общего закона взаимности дал Гильберт, который утверждал, что его закон применим для всяких числовых полей. Самому же ему удалось дать доказательство только для полей, весьма ограниченных по их свойствам (например, когда поле комплексное с нечетным числом классов). В. П. Вельмин доказал чисто арифметическими методами квадратичный закон взаимности в форме Гильберта для любого квадратичного числового поля. При этом он отошел от метода исследования Гильберта, применив классические приемы Дирихле.

Участник семинара Е. И. Жилинский посвятил свои работы новым в то время вопросам теории чисел, а именно теории p -адических чисел. За первую работу «Новейшие течения в теории идеалов» (1911 г.) он получил серебряную медаль. Основы теории p -адических чисел он изложил в статье «Об области рациональных p -адических чисел» (1914 г.). В дальнейшем Жилинский, исходя из результатов Дедекинда, Кронекера и Гензеля, доказал весьма важную теорему о границе простых общих наибольших делителей индексов всех целых чисел данной степени n . Сообщение ее на заседании Геттингентского математического общества произвело большое впечатление, и Гильберт предложил напечатать ее в «*Mathematische Annalen*» вне очереди.

В семинаре Граве началась также научная деятельность А. Н. Островского, первые работы которого были посвящены новейшим вопросам алгебры, главным образом абстрактной теории полей.

К числу учеников Д. А. Граве принадлежал также П. Д. Белонковский. Заинтересовавшись рядом вопросов из высшей алгебры, он оставил Петербургский технологический институт и перешел в Киевский университет. Здесь он написал большое сочинение по теории Галуа и получил новые результаты в отдельных вопросах алгебры.

Учеником Д. А. Граве был и Ю. Д. Соколов, который занимался вопросами небесной механики и разными вопросами теории дифференциальных уравнений, в разработку которых он внес значительный вклад. Об этих исследованиях будет речь в одном из следующих томов.

На развитие киевской математической школы положительное влияние оказали общие передовые идеи и глубокая математическая культура петербургской математической школы. Но киевская школа имела и свои особенности, основная из них — это новое направление математики. Многие молодые ученые именно в Киеве впервые начали серьезно заниматься исследованиями по новейшим вопросам алгебры: теории групп, теории алгебраических чисел, теории идеалов.

Киевская математическая школа сыграла выдающуюся роль в истории математики нашей страны. Ее воспитанники внесли впоследствии большой вклад как в дальнейшее развитие математики, так и в подготовку научных кадров, а замечательные ее представители — О. Ю. Шмидт, Б. Н. Делоне и Н. Г. Чеботарев — стали основателями новых алгебраических школ в Москве, Ленинграде и Казани, прославивших нашу отечественную науку.

6

Математика в Киевском политехническом институте

Киевский политехнический институт был открыт в 1898 г. в составе четырех факультетов: механического, инженерно-строительного, химического и сельскохозяйственного. Большая часть преподавателей теоретических дисциплин была приглашена из университета. Кафедрой математики сразу же после открытия института стал заведовать В. П. Ермаков. Он читал лекции и частично вел практические занятия на механическом и инженерно-строительном отделениях института до 1922 г. Ближайшим его помощником был Б. Я. Букреев. Ассистентами в институте работали И. И. Белянкин, И. И. Панфилов и Г. В. Пфейффер (до 1909 г.), Н. А. Столяров (до 1915 г.), П. В. Воронец, С. П. Шенберг, А. Н. Коробов.

Большое внимание преподаватели математики уделяли как чтению лекций, так и проведению практических занятий. Формы и методы проведения практических занятий неоднократно обсуждались на заседаниях комиссии по математике. Вскоре после организации института (в 1903 г.) совет института постановил образовать особую комиссию преподавателей математики под председательством В. П. Ермакова

для установления единообразия в проведении занятий по математике и механике и для «коллегиального рассмотрения и решения общих вопросов». Эта комиссия была прототипом современной кафедры.

Весьма важной частью методической работы математиков института было издание учебников, задачников и других пособий. В. П. Ермаков вскоре после начала чтения лекций написал учебники по дифференциальному и интегральному исчислениям. Большой популярностью пользовались также его учебники по аналитической геометрии. Значительное количество учебников и статей методического характера было написано Б. Я. Букреевым. Большое значение имели также задачники И. И. Белянкина по аналитической геометрии, стереометрии, дифференциальному и интегральному исчислениям, интегрированию дифференциальных уравнений, по механике.

С 1901 г. стал издаваться журнал «Известия КПИ». Здесь публиковались статьи и заметки методического и научного характера, в том числе и по математике. Например, в работах А. Н. Динника рассматривались применения теории рядов Фурье и разложения функций в ряды Бесселя, а также отдельные вопросы теории дифференциальных уравнений. Развитию теории уравнений с частными производными первого порядка посвятил свой очерк Н. Н. Салтыков.

Большое значение для Киевского политехнического института и Киевского университета имела научная и педагогическая деятельность В. П. Ермакова. В 1884 г. он был избран членом-корреспондентом Петербургской академии наук. Не ограничиваясь чтением лекций, В. П. Ермаков с 80-х годов проводил много семинарских занятий и был одним из инициаторов введения этой новой формы работы со студентами в Киевском университете. В марте 1899 г. он получил звание заслуженного профессора и был назначен профессором Киевского политехнического института, отработав до этого в университете 30 лет.

Круг научных интересов В. П. Ермакова весьма широк. В конце XIX — начале XX в. он занимается преимущественно исследованиями по теории дифференциальных уравнений. Первые работы в этом направлении он посвятил отысканию интегрирующих множителей заданного вида для дифференциальных уравнений первого порядка. К ним он возвращается и впоследствии. Например, его работа «Дифференциальные уравнения первого порядка, имеющие данный интегрирующий множитель факториальной формы»⁶ была опубликована значительно позже. Ермаков занимался также отысканием рациональных интегралов линейных дифференциальных уравнений, вопросами решений в конечной форме линейных однородных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами и задачей нахождения полных интегралов специального вида уравнений первого порядка. Аналитической теории дифференциальных уравнений он посвятил

⁶ В. П. Ермаков. Дифференциальные уравнения первого порядка, имеющие данный интегрирующий множитель факториальной формы. — Сообщение Харьковского математического общества. 1906, т. 9, сер. 2, № 1—2.

статью «Разыскание критических точек интегралов дифференциальных уравнений»⁷. Здесь он развил исследования С. В. Ковалевской об условиях однозначности общих интегралов использованных ею дифференциальных уравнений движения твердого тела вокруг неподвижной точки, а также получил другие результаты.

Часть работ Ермакова по дифференциальным уравнениям последующих лет имела прикладной характер: в них рассматривались различные вопросы геометрии, механики. Ермаков нашел уравнения движения планеты вокруг Солнца в довольно простом виде, а также решение задачи об интегралах уравнений движения трех тел в более простой форме по сравнению с формой, предложенной финским математиком К. Зюндманом.

Несколько работ Ермаков посвятил некоторым вопросам математического анализа и вариационного исчисления. В статье «Вариационное исчисление по Вейерштрассу»⁸ излагались новые и малоизвестные тогда идеи в оригинальной обработке автора. Работа отличалась свежестью материала, простотой изложения и была положительно встречена в математическом мире. Она была помещена во французском журнале Лиувилля и сокращенно — в немецком журнале Дарбу. В заметках по теории рядов Ермаков нашел простой способ отыскания остаточных членов известных функциональных рядов, рассмотрел ряды с так называемым постоянным избытком. Несколько статей и заметок Ермакова посвящены теории специальных функций. Например, в работах «Теория абелевых функций»⁹ и «Периодические функции»¹⁰ он дал независимое от теории тэта-функций доказательство теоремы о рациональном выражении мероморфной функции n переменных с $2n$ периодами — через абелевы функции.

В работах по алгебре и теории чисел Ермаков ставил себе целью выяснить необходимые и достаточные условия решения в радикалах алгебраических уравнений, составить общую форму радикального выражения, имеющего данное число n значений ($n \leq 9$), а также рассматривал трехчленные неопределенные уравнения вида $u^m + v^n = w^k$.

Ермаков интересовался также различными вопросами элементарной математики и методики ее преподавания. Его деятельность в этом направлении была особенно активной с 1884 г., когда он стал выпускать известный «Журнал элементарной математики». Большое количество статей педагогического характера Ермаков опубликовал в 90-е годы. Многие о методах преподавания математики, высказанное в этих

⁷ В. П. Ермаков. Разыскание критических точек интегралов дифференциальных уравнений. — Университетские известия. К., 1901, № 9.

⁸ В. П. Ермаков. Вариационные исчисления по Вейерштрассу. — Университетские известия, К., 1901, № 9.

⁹ В. П. Ермаков. Теория абелевых функций. — Университетские известия, К., 1907, № 10—11.

¹⁰ В. П. Ермаков. Периодические функции. — Сообщения Харьковского математического общества. Харьков, 1902, сер. 2, т. 8, № 4—5.

статьях, характеризует Ермакова как опытного и преданного своему делу педагога. Выступая против схоластики и созерцательности в обучении математике, он отстаивал принцип сознательного и творческого изучения материала.

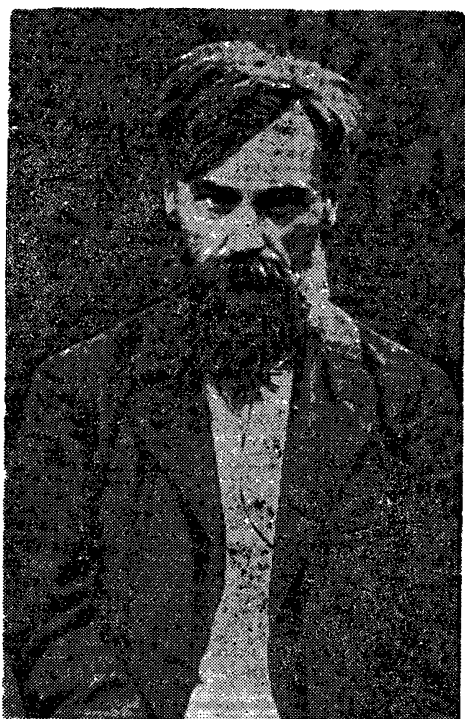
7

Математика в Новороссийском университете

В 90-е годы в Новороссийском университете преподавали профессора С. П. Ярошенко и В. В. Преображенский, который возвратился в Одессу в 1889 г. после отставки Е. Ф. Сабина. В математической жизни университета все большую роль стал играть И. В. Слешинский, занявший ведущее положение среди одесских математиков конца XIX — начала XX в. В это время преподавателями университета стали его воспитанники: К. И. Фотт, И. Ю. Тимченко, В. А. Циммерман, Ц. К. Руссьян, Е. Л. Буницкий, а также В. Ф. Каган и С. О. Шатуновский. Это пополнение значительно оживило научную и учебную работу на математическом отделении университета.

По предложению Слешинского, приват-доцента механики И. М. Занчевского и профессора физической географии А. В. Клоссовского при математическом отделении Новороссийского общества естествоиспытателей с 1888 г. начали проводиться постоянные заседания по вопросам элементарной математики и физики. Руководить ими был приглашен Слешинский. Он привлек к участию в них также многих преподавателей одесских средних учебных заведений. Только за 1888—1895 гг. И. В. Слешинский, В. В. Преображенский, И. М. Занчевский и другие участники заседаний — преподаватели университета и средних учебных заведений — сделали 89 сообщений по элементарной математике. С 1895 г. по предложению В. В. Преображенского, который возглавлял в это время математическое отделение, стали проводить объединенные заседания, на которых рассматривались вопросы, связанные как с элементарной, так и с высшей математикой. На заседаниях наряду с рассмотрением многих методических вопросов все больше внимания уделялось вопросам обоснования основных понятий математики, важнейших ее результатов.

Преподавание математики в университете к концу прошлого века значительно углубилось за счет расширения основных курсов и постановки новых специальных курсов. О распределении математических курсов в это время можно судить из обзора преподавания в 1895/96 учебном году. Основные курсы читали: Ярошенко — аналитическую геометрию, Преображенский — интегральное исчисление, куда входило также и интегрирование дифференциальных уравнений, Слешинский — дифференциальное исчисление, исчисление вероятностей, Тимченко — высшую алгебру, теорию чисел и некоторые другие. Кроме того, Руссьян читал теорию конечных разностей. Циммерман — вариационное исчисление и проективную геометрию.



И. В. Слешинский.

Были введены кроме курсов Слешинского новые специальные курсы: исчисление вычетов и применение его к теории определенных интегралов, основы теории аналитических функций, теория линейных дифференциальных уравнений и высшая геометрия (теория кривых высшего порядка на плоскости) — И. Ю. Тимченко, интегрирование дифференциальных уравнений с приложениями — И. М. Занчевского, применение анализа бесконечно малых к геометрии (теория кривых двойной кривизны и кривых поверхностей) и теория функций составной переменной (общие основы и эллиптические функции) — В. Ф. Кагана. Уход в отставку в 1899 г. Ярошенко, а в 1900 г. — Преображенского, привел к перераспределению математических курсов.

В связи с преподаванием теории вероятностей И. В. Слешинский заинтересовался вопросом обоснования метода наименьших квадратов, которому посвятил свою докторскую диссертацию «К теории способа наименьших квадратов»¹¹ (1892 г.). В предисловии к диссертации он дал исторический обзор развития метода наименьших квадратов и подчеркнул решающее значение основополагающих работ П. Л. Чебышева. Стремление Слешинского упростить доказательство Чебышева привело его к обоснованию метода наименьших квадратов на основе почти незамеченных в свое время мемуаров Коши. Используемый Слешинским метод по своей идее совпадает с методом характеристических функций, который независимо от него был применен позже (1900—1901 гг.) А. М. Ляпуновым для доказательства центральной предельной теоремы теории вероятностей. После опубликования работ Ляпунова этот метод получил широкое распространение и стал одним из основных методов в теории вероятностей.

С. П. Ярошенко в опубликованной в 1893 г. в связи с докторской диссертацией Слешинского работе¹² показал, что к методу наименьших квадратов непосредственно приводит теорема Чебышева — известное неравенство Чебышева из его работы «О средних величинах» (1867 г.). Слешинский в статье «К теореме Чебышева» (1893 г.), распространив неравенство Чебышева на случай непрерывно меняющихся величин,

¹¹ И. В. Слешинский. К теории способа наименьших квадратов. — Записки математического отделения Новороссийского общества естествоиспытателей, 1892, т. 14, стр. 201—264.

¹² С. П. Ярошенко. К теории способа наименьших квадратов. — Записки Новороссийского университета, 1893, т. 58, стр. 193—208.

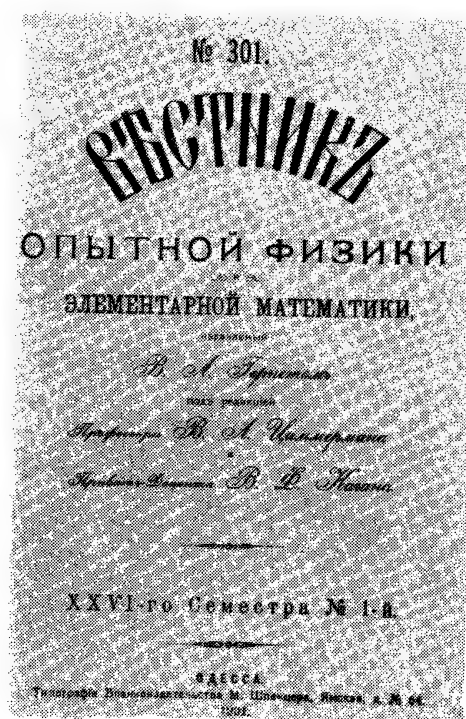
дал соответствующее дополнение к работе Ярошенко. Завершающей в этом направлении была работа А. А. Маркова «Закон больших чисел и метод наименьших квадратов» (1898 г.), в которой он дал «единственно рациональный вывод» указанного метода, основанный на непосредственном рассмотрении дисперсии ошибки.

После защиты докторской диссертации Слешинский в конце 1893 г. был избран экстраординарным, а в мае 1898 г. — ординарным профессором чистой математики университета. Стремление Слешинского давать точные доказательства привело его к систематическим занятиям математической логикой. Он пришел к выводу о необходимости пересмотра математических доказательств с точки зрения их полноты: нахождения полных доказательств, а также замены полных, как правило, очень громоздких доказательств, так называемыми сокращенными. Слешинский стал еще требовательнее к своим работам и часто воздерживался от их опубликования. Например, найденная им общая теорема о перестановке пределов, о которой он докладывал одесским математикам еще в 1897 г., была напечатана лишь в 1912 г. в журнале Краковской академии наук.

Влияние И. В. Слешинского сказывалось на деятельности его учеников. Первая работа В. А. Циммермана (1866—1939), за которую при окончании университета в 1888 г. он был удостоен золотой медали, посвящалась изучению дифференциального уравнения Риккати с помощью непрерывных дробей. В ней конкретизировались результаты для случая, когда коэффициенты уравнения — многочлены. Оставленный в 1890 г. при университете для подготовки к профессорскому званию Циммерман успешно сдал в 1893 г. магистерский экзамен. Он начал интересоваться вопросами вариационного исчисления. Хотя это направление разрабатывалось в Одессе и раньше, но Циммерман стремился дать точное обоснование некоторых важных результатов вариационного исчисления. В магистерской диссертации «Разрывные линии в вариационном исчислении. Опыт изложения начал вариационного исчисления в связи с условием разрыва» (1896 г.) он при точно определенных положениях установил необходимые условия существования разрывных решений основной вариационной задачи для интеграла

$$\int_a^b f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx,$$

которая в более узкой постановке и притом недостаточно точно рассматривалась до него Тодгентером, Эрдманом и другими учеными за границей. Циммерман решил такую же задачу для пространственной кривой, подробно проиллюстрировав теорию примерами. В докторской диссертации «Правило Эйлера в применении к одному классу вопросов об относительных maxima и minima» (1899 г.) он дал при минимальных предположениях точное обоснование классического правила Эйлера решения изопериметрических задач для случая одного условного уравнения. После защиты докторской диссертации в 1899 г. Циммерман был избран экстраординарным, а в 1903 г. — ординарным про-



Титульный лист журнала «Вестник опытной физики и элементарной математики».

фессором чистой математики университета.

И. Ю. Тимченко (1863—1939), который интересовался вначале астрономией, под влиянием Слепинского начал заниматься теорией функций комплексного переменного. Результатом напряженной многолетней работы Тимченко в этой области стала широко известная его магистерская диссертация «Основания теории аналитических функций». Часть I. Исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании аналитических функций¹³. Насыщенная богатым фактическим материалом, она содержала подробные сведения о происхождении и развитии понятий и методов алгебры и математического анализа, которые являются основой общей теории аналитических функций. В ней описывались труды математиков от первых ученых древней Греции до ведущих деятелей математики XVIII в. — Эйлера и Лагранжа. Исследование Тимченко все еще сох-

раняет свое значение и широко используется в наши дни. Его работы последующих лет относились к истории математики.

Из молодых приват-доцентов вне влияния идей Слепинского остался Ц. К. Руссьян. Сначала он занимался вопросами алгебры, затем — дифференциальными уравнениями. Наиболее ценными являются его работы по дифференциальным уравнениям и среди них магистерская диссертация «Теория интегрирования дифференциального уравнения $X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \dots + X_p dx_p = 0$ » (1896 г.), а также докторская — «Система уравнений Пфаффа» (1899 г.). Работы Руссьяна были одними из первых в русской литературе по теории интегрирования уравнений и систем уравнений Пфаффа.

Одесские математики принимали активное участие в издании журнала «Вестник опытной физики и элементарной математики» (ВОФЭМ), который был переведен в 1891 г. из Киева в Одессу физиком Е. К. Шпачинским. Обязанности редактора взял на себя В. А. Циммерман, который в 1896—1901 гг. возглавлял математическое отделение Новороссийского общества естествоиспытателей. В 1901—1917 гг. редактором журнала был В. Ф. Каган. Большую

¹³ И. Ю. Тимченко. Основания теории аналитических функций. Ч. I. Исторические сведения о развитии понятий и методов, лежащих в основании аналитических функций. — Записки математического отделения Новороссийского общества естествоиспытателей, 1892, т. 12, стр. 1—256; 1899, т. 16, стр. 256—472; 1899, т. 19, стр. 473—655.

работу в журнале вел также Е. Л. Буницкий, который бессменно, начиная с 1896 г., редактировал трудный и ответственный отдел задач, широко представленный в журнале.

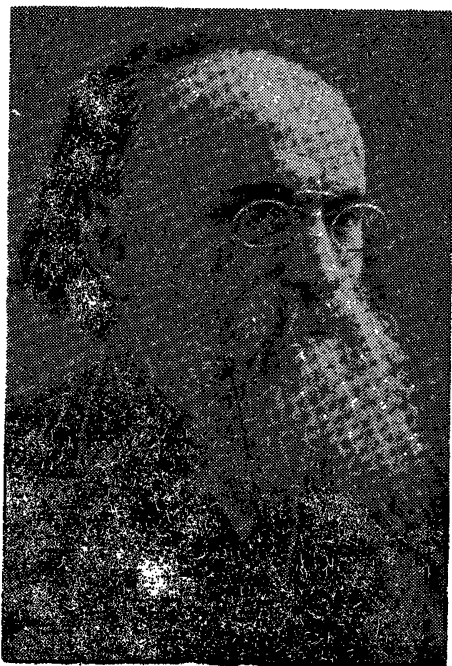
Расширение авторского актива журнала и усиление его работы привели к созданию в Одессе специального книжного издательства, которое начало свою деятельность в 1904 г. под названием «Матезис». Его основателями были В. Ф. Каган, А. Р. Орбинский и С. О. Шатуновский. Значительную часть изданной литературы представляли книги по математике, печатались также переводы лучших иностранных математических изданий: два тома «Энциклопедии элементарной математики» Вебера и Вельштейна, «Элементарная математика» Бореля, «Вопросы элементарной и высшей математики» Клейна, «Алгебра логики» Кутюра, «История элементарной математики» Кэджори и другие.



В. Ф. Каган

Бурные события первой русской революции нашли широкий отклик в университете. Физико-математический факультет, значительная часть профессоров которого всегда отличалась своими передовыми взглядами, занял руководящее место в университетской жизни этого времени. Управление в университете перешло под непосредственным нажимом революционного студенчества в руки прогрессивно настроенных профессоров, которые выдвинули ректором университета И. М. Занчевского. В избранную советом университета одновременно с этим комиссию в помощь ректору входили также Слешинский и Ярошенко, которого как ведущего деятеля организации передовых профессоров царское правительство еще в начале революции выслало в Вологодскую губернию. Количество студентов в это время значительно возросло и в 1908 г. достигло немногим более 3000. Приблизительно четвертая часть студентов училась на математическом и естественном отделениях физико-математического факультета.

После революции царское правительство стало притеснять и преследовать прогрессивных деятелей университета, в частности Занчевский был отдан под суд. В университете создавались тяжелые условия для таких математиков, как Слешинский, Каган, Шатуновский. В связи с этим они стали уделять больше внимания преподаванию на Высших женских курсах, открытых в Одессе в 1906 г., а также участию в журнале ВОФЭМ и издательстве «Матезис». В 1909 г. из университета ушел Слешинский. В 1911 г. он переехал в Краков, где вскоре



С. О. Шатуновский.

стал преподавать в Ягеллонском университете. Тут был издан в двух томах его курс университетских лекций по теории математических доказательств (1925—1929 гг.), в котором нашли отражение некоторые его работы одесского периода по вопросам оснований математики. Слешинский вел постоянную переписку с одесскими математиками, со своими учениками и сотрудниками.

Из них большую известность получил В. Ф. Каган и С. О. Шатуновский.

После успешного окончания Екатеринославской гимназии в 1888 г. Каган (1869—1953) поступил на физико-математический факультет Новороссийского университета. Через год за участие в студенческом движении был исключен из университета и выслан из Одессы. Физико-математический факультет он закончил в 1892 г. экстерном при Киев-

ском университете. Подготовку к магистерскому экзамену проходил в Петербурге, где он и сдал экзамен в 1898 г. Вскоре Каган переехал в Одессу. В ВОФЭМ с 1893 г. по 1898 г. печаталась частями его первая большая работа «Очерк геометрической системы Лобачевского», которая в 1900 г. вышла в Одессе отдельным изданием. В ней впервые в русской литературе делалась попытка систематического и доступного изложения геометрии Лобачевского, популяризацией и дальнейшей обработкой которой Каган занимался на протяжении всей своей жизни, особенно в последние годы. Наиболее известной работой Кагана одесского периода является его магистерская диссертация «Основания геометрии»¹⁴. В первом томе дается точное систематическое, первое в мировой литературе полное изложение евклидовой геометрии. Оно базируется на десяти постулатах, которые вводятся постепенно по ходу доказательств. Такое построение геометрии является, по словам Кагана, «синтетическим воплощением идей Римана, Гельмгольца и Ли». Первое сообщение о своей аксиоматике евклидовой геометрии Каган сделал на XI съезде русских естествоиспытателей и врачей в Петербурге и тогда же опубликовал его¹⁵, несколько позже выхода в свет известной книги Гильберта «Основы геометрии»

¹⁴ В. Ф. Каган. Основания геометрии. — Записки Новороссийского университета, 1904, т. 97, стр. 1—480; 1905, т. 101, стр. 481—804; 1907, т. 106, стр. 1—320; 1907, т. 109, стр. 321—562. Второй том впервые был напечатан в 1904—1905 гг. в ВОФЭМ.

¹⁵ В. Ф. Каган. Система посылок, определяющих евклидову геометрию. — Записки математического отделения Новороссийского общества естествоиспытателей, 1902, т. 20, стр. 67—105.

(1899 г.). Во время работы над диссертацией Каган получил новое, упрощенное доказательство известной теоремы Дена о равновеликих многогранниках. После защиты магистерской диссертации кроме преподавания он занимался главным образом издательской и редакторской работой в журнале ВОФЭМ и издательстве «Матезис», выпустив значительное число работ научно-популярного и методического характера.

С. О. Шатуновский (1859—1929) родился в бедной семье ремесленника. Некоторое время он как вольный слушатель посещал в Петербургском университете лекции П. Л. Чебышева и его учеников. Вскоре Шатуновский выехал учиться за границу, где слушал лекции известного немецкого алгебраиста Г. Вебера. Возвратившись в Россию он занялся частным преподаванием.

Одна из первых математических работ Шатуновского привлекла к себе внимание одесских математиков. В 1898 г. его избрали секретарем математического отделения Новороссийского общества естествоиспытателей и назначили незначительное содержание из средств общества. В 1905 г. Ярошенко, Слешинский, Тимченко и Каган, учитывая научные достижения Шатуновского, выхлопотали ему, не имевшему аттестата зрелости, специальное разрешение министерства на сдачу магистерского экзамена, который был успешно сдан. После этого его избрали приват-доцентом университета. Еще в 1893 г. Шатуновский начал сотрудничать в ВОФЭМ, а с 1895 г. он часто выступал с сообщениями на заседаниях математического отделения Новороссийского общества естествоиспытателей. В них содержались отдельные научные результаты Шатуновского, который в это время интересовался вопросами оснований математики. В сообщениях 1897—1898 гг. Шатуновский изложил данное им, независимо от Гильберта и одновременно с ним, аксиоматическое обоснование теории площадей, а также обоснование понятия объема многогранника, как некоторого инварианта без применения теории пределов¹⁶. В 1902 г. он дал аксиоматику количественного сравнения величин, которая вместе с найденным им широким обобщением понятия предела вошла в его оригинальный курс «Введение в анализ», впервые прочитанного в университете в 1906—1907 учебном году. Еще в 1901 г. Шатуновский указывал на недопустимость формального переноса закона исключенного третьего на бесконечные множества. Этот вопрос независимо от него позже исследовали Л. Брауэр и другие ученые. В 1917 г. Шатуновский опубликовал работу «Алгебра как учение о сравнениях по функциональным модулям»¹⁷, которую защитил в 1919 г. в качестве магистерской диссертации. В ней Шатуновский развил полную теорию Галуа и дал ее обоснование с помощью понятия функционального модуля, предложенного Коши, в то время как обычно оно опирается на дока-

¹⁶ S. Schatunowsky. Ueber den Inhalt der Polyeder. — *Mathematische Annalen*, 1903, Bd. 57, S. 496—508.

¹⁷ С. И. Шатуновский. Алгебра как учение о сравнениях по функциональным модулям. — *Записки Новороссийского университета*. 1917, вып. 11, стр. 1—48; 1—208, а также отдельное издание.



Е. Л. Буницкий.

зательство существования корня алгебраического уравнения, которое выводится с использованием закона исключенного третьего. Шатуновскому принадлежат работы, посвященные вопросам алгебры, теории чисел, теории непрерывных дробей, теории рядов, а также популяризации математики.

Среди последователей Слепинского отметим также его ученика Д. А. Крыжановского (1883—1938), который в 1913 г. стал приват-доцентом университета. Его научная деятельность началась с исследования, посвященного выяснению и обобщению понятия предела. Он активно сотрудничал в издательстве «Матезис». В это время математическое отделение университета окончили Г. М. Фихтенгольц, Я. С. Дубнов — в дальнейшем известные советские математики, Ю. З. Жемайтис, Н. Н. Васильев,

А. С. Турчанинов, Г. Л. Михневич, И. Е. Огиевецкий.

Дальнейшее расширение тематики математических исследований в эти годы в Одессе происходило в основном благодаря Е. Л. Буницкому (1874—1952). Он родился в семье военнослужащего в Симферополе. Учился в Ришельевской гимназии в Одессе. В 1892 г. поступил в университет, который успешно закончил в 1896 г. После окончания преподавал в одесских средних учебных заведениях, а с 1904 г. — в университете. Еще в студенческие годы Буницкий начал сотрудничать в журнале ВОФЭМ. Особого внимания заслуживают написанные им под влиянием Слепинского статьи: «Некоторые приложения математической логики к арифметике» и «Число элементов в логическом многочлене», в которых Буницкий вслед за Слепинским популяризировал малоизвестную в то время математическую логику. В 1906—1907 гг. он был в Геттингене, где под влиянием Гильберта заинтересовался интегральными уравнениями и их применениями к граничным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений. Написанная им в это время работа «О функции Грина для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений»¹⁸ цитируется в известном справочнике Камке по обыкновенным дифференциальным уравнениям как одна из основных. Результаты этой работы вошли в магистерскую диссертацию Буницкого «К теории функции Грина для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений» (1913 г.), в которой получили дальнейшее развитие результаты Д. Гильберта и его ученика В. Вестфала для уравнения n -го порядка в случае как непрерывных, так

¹⁸ E. B o u n i t s k y. Sur la fonction de Green des équations différentielles lineaires ordinaires. — Journ. de math. pur. et appl., 1909, 5, ser. 6. p. 65—126.

и дифференцируемых коэффициентов при линейных однородных граничных условиях. Продолжая исследования в области дифференциальных и интегральных уравнений, Буницкий написал докторскую диссертацию «К вопросу о решении обыкновенных линейных дифференциальных уравнений при данных предельных условиях» (1916 г.), в которой использовал обобщенную функцию Грина. К сожалению, эта работа малоизвестна, хотя изложенные в ней результаты имеют принципиальное значение. Используя в своих исследованиях теорию линейных интегральных уравнений, Буницкий дополнил ее некоторыми результатами. Так, в магистерской диссертации эта теория изложена не только для непрерывного ядра, а и для ядра с диагональным разрывом. Значительный интерес имеют также работы Буницкого по различным вопросам анализа, алгебры, теории чисел и геометрии.

Летом 1917 г. в Одессу приехал А. М. Ляпунов. Здесь он продолжил исследования задачи о фигурах равновесия неоднородной вращающейся жидкости. Он посещал заседания математического отделения Новороссийского общества естествоиспытателей. С осени 1918 г. Ляпунов по приглашению университета начал читать курс о форме небесных тел, в котором излагались результаты его многолетних исследований. Пребывание Ляпунова в Одессе оживило научную деятельность одесских математиков.

8

Математика в Екатеринославском горном институте

Екатеринославское высшее горное училище было открыто в 1899 г. в составе двух отделений: горного и заводского, с четырехлетним сроком обучения. В России это было второе высшее горное учебное заведение. В 1912 г. училище было преобразовано в горный институт. В основном научные работы института были направлены на разработку важных проблем горной промышленности, в решении которых многим ученым института принадлежит приоритет в отечественной и мировой науке. Исследования, проводимые в институте, в значительной степени способствовали проникновению математических методов в горное дело.

Математика в горном институте преподавалась на первом курсе обоих отделений по 6 часов лекций и 4 часа практических, а позже — 7 часов лекций и 3 часа практических. Большую роль в организации учебного процесса по математике сыграл Д. М. Синцов, который преподавал в институте до 1903 г. Он проделал большую работу по составлению программ и учебных планов, читал почти все основные математические курсы и издал по ним литографированные пособия. Он разрабатывал также методические вопросы, составлял математическую библиографию и интересовался историей математики.

Широкое внедрение математических методов в решение проблем теории упругости, связанных с горной промышленностью, а также ис-

следование ряда вопросов математической теории упругости принадлежит А. Н. Диннику (1876—1950).

В Екатеринославском горном институте Динник с 1913 г. возглавлял кафедру теоретической механики.

Кратко охарактеризуем его математические работы. В 1905 г. он опубликовал работу о понижении порядка линейных разностных и дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с помощью частных интегралов. В 1910 г. он получил результаты по применению рядов Фурье к расчету гибких нитей, которые дают возможность рассчитывать гибкие нити без разбивки их на отдельные участки. Большую роль в решении задач теории упругости сыграли работы Динника, посвященные рассмотрению функций Бесселя и их применений. С 1910—1911 гг. Динник, находясь в Мюнхене, где он работал у известных ученых — А. Зоммерфельда, А. Феппля, А. Лоренца, — выполнил работу об устойчивости плоской фигуры изгиба, за которую получил степень доктора-инженера. Интересно, что известный немецкий ученый Л. Прандтль в своей работе «О явлении опрокидывания» (1909 г.) утверждал невозможность решения в общем виде задачи об устойчивости плоских фигур. Динник в течение трех месяцев решил эту задачу в общем виде, применив теорию функций Бесселя. Видя эффективность применения функций Бесселя к решению задач теории упругости, Динник продолжал дальнейшие исследования в этом направлении. В период с 1911 по 1915 г. он создает капитальный труд «Приложение функций Бесселя к задачам теории упругости»¹⁹, состоящий из двух частей: статике и теории вибраций. В конце книги помещены вычисленные Динником таблицы некоторых функций Бесселя.

Большинство исследований Динника относится к проблемам устойчивости. Здесь он проявил высокое мастерство, впервые в литературе применил методы численного интегрирования уравнений, к которым приводят задачи об устойчивости. Его работа об определении коэффициентов устойчивости, за которую Харьковский университет в 1915 г. присудил ему ученую степень магистра прикладной математики, вошла в мировую справочную научно-техническую литературу.

Важное значение имеет также работа Динника «О разложении произвольной функции в ряд Бесселя»²⁰. Исследования многих вопросов теории упругости, в которых потребовалось вычисление функций Бесселя порядка $\pm \frac{1}{3}$ и $\pm \frac{2}{3}$, привели его к созданию таблиц этих функций, отсутствовавших ранее в литературе. Эти таблицы представляют также интерес и для задач математической физики, где широко применяются функции Бесселя. Свой результат Динник опубликовал в статье «Таблицы функций Бесселя $J_{\pm \frac{1}{3}}$ и $J_{\pm \frac{2}{3}}$ » (1911 г.).

¹⁹ А. Н. Динник. Приложение функций Бесселя к задачам теории упругости. — Известия Екатеринославского горного института, 1915, вып. 2.

²⁰ А. Н. Динник. О разложении произвольной функции в ряд Бесселя. — Известия Екатеринославского горного института, 1916, вып. 1.

Профессору Екатеринославского горного института Я. И. Грдине (1871—1931) принадлежат многочисленные работы по динамике живых организмов, в которых широко используются мощные методы аналитической механики — теория дифференциальных уравнений и вариационные принципы. Эти исследования явились предвестником новой современной науки — биокibernетики, открывшей большие возможности использования аналитической динамики живых организмов.

Я. И. Грдине принадлежит приоритет (1912 г.) в установлении понятия сервосвязей или связей второго рода, играющих большую роль в машинной математике, кибернетике, теории автоматического регулирования. Позднее к понятию сервосвязей пришли известные французские ученые А. Беген (1922 г.) и П. Аппель (1924 г.). Изучая движение живых организмов, Грдина учитывал как голономные, так и линейные неголономные связи. Живой организм он рассматривал как систему из n материальных точек, движение которой ограничивают μ связей. Уравнения этих связей он представил в виде

$$\sum_i A_{si}(t, x_k, a_{sl}) + \sum_g H_{sg}(x_k, a_{sl}) da_{sg} + B_s(t, x_k) dt = 0,$$

где x_i — декартовы координаты точек системы живого организма; a_{sl} — волевые параметры волевых связей; коэффициенты A_{sl} , H_{sg} , B_s этих уравнений, в зависимости от характера связей, представляют собой функции тех или других переменных.

Уравнения связей живого организма в обобщенных координатах Грдина представлял в виде соотношений

$$\sum_r P_{sr} \dot{q}_r + \sum_\lambda N_{sl} \dot{a}_\lambda + P_s = 0$$

$$(r = 1, 2, \dots, N; \quad \lambda = 1, 2, \dots, 3n - \mu)$$

с зависящими от времени коэффициентами обобщенных координат и волевых параметров.

Заметим, что проекции скоростей материальных точек живого организма на оси координат $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$ и волевые скорости организма $\dot{a}_s = \frac{da_s}{dt}$ нельзя рассматривать как производные в обычном смысле, а только как отношения соответствующих дифференциалов, поскольку они не связаны между собой определенными зависимостями.

Грдина различал волевые связи первого и второго рода в зависимости от того, зависят или не зависят скорости точек живого организма $\dot{x}_k$ от волевых скоростей $\dot{a}_{sl}$. Он ввел определение порядка волевой связи, понимая под ним наименьший порядок ускорения точек живого организма, которое не зависит от волевых скоростей. В соответствии с этим определением связь первого рода имеет нулевой поряд-

док. Пользуясь известными методами аналитической механики, Грдина выводит динамические уравнения живых организмов в формах Лагранжа первого и второго рода, Аппеля—Гиббса, Гамильтона.

Грдина исследовал также вариационные принципы динамики живых организмов. Он показал, что принцип Даламбера-Лагранжа для динамики живых организмов остается в силе и имеет тот же вид, что и для обычных материальных систем. Интегральные вариационные принципы (например, принципы Гамильтона — Остроградского, Эйлера-Лагранжа и др.), как оказалось, в аналитической механике живых организмов неправомерны.

9

Математика на западноукраинских землях. Львовский и Черновицкий университеты. Математическая деятельность Научного общества им. Т. Г. Шевченко (1870—1918)

Во времена Австро-Венгерской монархии обучение во Львовском университете, как и все школьное образование в восточной Галиции, фактически сделалось польским. Лекции в университете читались сначала на немецком, а затем на польском языках. В начале XX в. по мере обострения национальных противоречий в восточной Галиции усилилась борьба за создание украинского университета во Львове. В 1907—1910 гг. университет сделался ареной массовых студенческих волнений. Под давлением всего украинского населения страны, особенно его прогрессивных деятелей, австрийское правительство-вынуждено было обещать создание украинского университета, однако это обещание так и осталось невыполненным.

Статистические данные о национальном составе студентов свидетельствуют о том, что вступление украинцев в университет фактически было закрыто. Например, в 1875 г. в университете из 200 студентов было только 27 украинцев, в 1905 г. из 673 студентов — 73, а в 1911—1912 гг. из 1232 студентов — около 200 украинцев.

Публикация научных статей во Львове была весьма затруднена, поскольку научные журналы в университете не издавались. Небольшие статьи можно было помещать лишь в журнале Общества учителей высших школ — «Музеум» или в органе Общества естествоиспытателей имени Коперника — «Космос». Журналы печатались на польском языке. Немногочисленные математики-украинцы могли публиковать свои работы лишь в «Записках Научного общества им. Т. Г. Шевченко».

С середины XIX в. тридцать лет на кафедре математики во Львовском университете работал чех Игнац Лемох. Он читал элементарную математику, а впоследствии некоторые математические дисциплины. После Лемоха в 1870 г. кафедру математики занял Лаврентий Жмурко. Первая его печатная работа «Заметки по интегральному исчислению» (1849 г.), посвященная методическим вопросам интегрального исчисления, была защищена в качестве докторской диссертации.

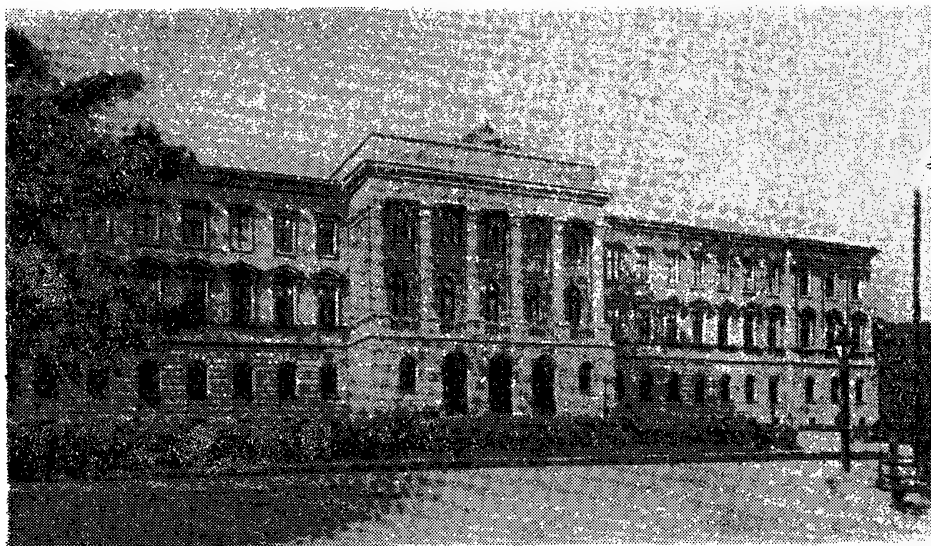


Старое здание Львовского университета (начало XX в.).

После защиты Жмурко в 1850 г. начал читать лекции в Венской технической академии, в следующем году он был приглашен во Львовскую техническую академию, а впоследствии — во Львовский университет, где на протяжении 18 лет он читал лекции по различным математическим дисциплинам. В 1873 г. Жмурко был избран действительным членом Краковской академии наук. Он состоял также действительным или почетным членом других академий и научных обществ. Во львовских библиотеках сохранились два литографированных конспекта его лекций: по аналитической геометрии в пространстве для студентов-техников ²¹ и по дифференциальному и интегральному исчислениям для студентов университета ²². Курс лекций по аналитической геометрии построен весьма оригинально. Жмурко ведет его в общих координатах и пользуется большим количеством различных подстановок, символов и преобразований, чтобы в конце концов прийти к очень простым формулам. Эти преобразования целесообразны, но довольно сложны, поэтому конспекты читаются тяжело. Гораздо легче воспринимаются лекции Жмурко по дифференциальному и интегральному исчислениям (университетский курс). В первой части излагается комбинаторика, символика, логарифмы, ряды, а в двух других частях — дифференциальное и интегральное исчисления. В списке ра-

²¹ Zasady geometryi analitycznej w przestrzeni, na podstawie wykładów prof. W. Żmurki, ułożył August Witkowski we Lwowie, Lwów, 1875.

²² W. Żmurko. Rachunek różniczkowy i całkowy, opracowany przez członków «Kółka matematyków», Lwów, 1879.



Львовский политехнический институт (начало XX в.).

бот Жмурко насчитывается более 20 наименований из самых различных областей математики: по дифференциальным уравнениям, высшей алгебре, вариационному исчислению, теории действий и т. п. Однако они не представляют сколько-нибудь значительного вклада в математику, поэтому на них мы не останавливаемся. Жмурко создал некоторые приборы для черчения кривых: конограф, эллипсограф, эллисопараболограф, циклоидограф, а также интегратор, которые демонстрировались на международных выставках.

В 1876—1899 гг. в университете некоторые математические курсы читал Оскар Фабиан (1846—1899). Он учился в Варшаве и Вене, где в 1870 г. получил степень доктора философии. В 1872 г. был принят приват-доцентом математической физики во Львовский университет, вскоре стал экстраординарным, а в 1884 г. — ординарным профессором. Он опубликовал более 20 незначительных работ по теоретической физике, а также несколько школьных учебников по математике.

После Жмурко ведущим математиком Львовского университета был Юзеф Пузына (1856—1919). Он учился во Львовском университете, в 1882 г. сдал учительский экзамен, а в 1883 г. получил степень доктора философии за диссертацию «О мнимо двузначных двойных интегралах». Затем один год провел в Берлине, где принимал активное участие в семинарах Вейерштрасса и Кронекера. Это определило дальнейшую тематику его исследований: он занимался исключительно теорией функций вейерштрассовского направления. Лекции свои во Львовском университете Пузына начал в летнем полугодии 1886 г. по курсу синтетической геометрии: подобными вопросами еще никто во Львове не занимался. В 1889 г. он был назначен экстраординарным, а в 1891 г. — ординарным профессором. В 1904—1905 гг. стал ректором университета. В 1900 г. его избрали членом-корреспондентом Краковской академии наук. Математику во Львовском университете Пузына

читал на протяжении 33 лет. Кроме основных дисциплин, он прочел около 25 различных специальных курсов. Его лекции были тщательно обработаны, интересны и увлекали слушателей большой любовью профессора к своей дисциплине. Пузына написал 22 научные работы и издал книгу «Теория аналитических функций» в двух томах ²³. Большое значение имел научный семинар по математике, которым он длительное время руководил. В результате энергичных хлопот Пузыны в 1903 г. была создана вторая кафедра математики, на которую пригласили Яна Раевского. Раевский окончил Львовский университет и получил степень доктора философии за работу «Об интегрировании дифференциальных уравнений $(ax^2 + bx + c) y'' + (b_1x + c_1) y' + c_0 y = 0$ по методу Лапласа, усовершенствованному проф. Жмурко». В университете он работал только три года. Кроме основных курсов читал: теорию подстановок, эллиптические функции, теорию чисел, алгебраические и дифференциальные уравнения. Научное наследие Раевского незначительно: он опубликовал всего четыре работы по дифференциальным уравнениям.

Большой вклад в научную и педагогическую деятельность университета внес Вацлав Серпинский (род. 1882 г.).

Он учился в Варшавском университете у Г. Ф. Вороного. В 1904 г. окончил университет со степенью кандидата и золотой медалью за конкурсную работу по теории чисел. Два года работал в варшавских гимназиях, а в 1906 г. получил в Кракове степень доктора философии за работу «О суммировании ряда $\sum \tau(n) f(n)$, где $\tau(n)$ обозначает число разбиений числа n на сумму квадратов двух целых чисел». В 1908 г. Серпинский переехал во Львовский университет, где с 1909 г. начал читать лекции, а в 1910 г. был назначен экстраординарным профессором. Серпинский вел курсы по теории множеств, теории функций действительного переменного, аналитической теории чисел и некоторые другие. Его лекции внесли в тематику университетского курса теоретико-множественное начало и оказывали большое влияние на математическое воспитание молодежи. В 1919 г. Серпинский переехал в Варшаву. Студенты размножали его лекции литографическим способом. Некоторые из них появились в печати. Так, в 1910 г. в Варшаве была напечатана «Теория иррациональных чисел» ²⁴, составленная из лекций Серпинского в университете. Одно из наиболее важных его сочинений львовского периода — первая часть учебника по математическому анализу, появившаяся в 1916 г. в Москве ²⁵. Математические труды Серпинского явились выдающимся вкладом в развитие математических исследований во Львове, а затем в Варшаве. Большое значение для математического образования студентов имел научный семинар, которым руководил в университете Серпинский.

²³ J. K. P u z y n a. Teorya funkcji analitycznych. T. 1, II, Lwów, 1898, 1900.

²⁴ W. S i e r p i ń s k i. Teorya liczb niewymiernych. Warszawa, 1910.

²⁵ W. S i e r p i ń s k i. Analiza. t. 1, Liczby rzeczywiste i zespolone. Moskwa, 1916.

Самыми молодыми преподавателями во Львовском университете в последние годы рассматриваемого периода были Янишевский и Штейнгауз.

Зигмунд Янишевский (1888—1920) получил в 1911 г. докторскую степень в Сорбонне. Научную и педагогическую деятельность во Львовском университете он начал в 1913 г.: читал лекции по теории аналитических функций, математическому анализу и высшей алгебре.

В 1917 г. во Львовский университет прибыл талантливый математик Гуго Штейнгауз (род. в 1887 г.), получивший в Геттингенском университете степень доктора философии. Во Львовском университете он читал лекции по теории функций действительного и комплексного переменного.

Вторым высшим учебным заведением Львова была Львовская техническая академия, переименованная в 1877 г. в политехникум.

Математику в Технической академии преподавал профессор Александр Райзингер, который вел одновременно занятия по минералогии и технологии. На купеческом отделении курс элементарной математики читал известный автор математических учебников Франц Мочник. В академии были две математические кафедры, которые занимали профессора Жмурко и Зайончковский.

Владислав Зайончковский (1837—1898), уроженец Западной Галиции, учился в Кракове, работал в Варшавском университете, затем в Технической академии. Был действительным членом Краковской академии наук, вел научные исследования в области дифференциальных уравнений, написал руководство по дифференциальным уравнениям, изданное в 1875 г. в Париже, а также учебники по аналитической геометрии и алгебре.

После перехода Жмурко на работу в университет его кафедру в политехникуме занял Плацид Дзивинский (1851—1936), окончивший Львовский университет и Техническую академию. Известен своими учебниками по математике. Он написал также своего рода энциклопедию в двух томах, охватившую аналитическую геометрию и математический анализ. В ней кроме обычного курса давались темы для самостоятельных научных занятий.

Кафедра Зайончковского перешла в дальнейшем к Станиславу Каминскому (1867—1908), который учился в Кракове и Геттингене. Будучи профессором Львовского политехникума он вел исследования в области теории функций и дифференциальных уравнений и написал учебник по дифференциальным уравнениям, в котором нашли место многие практические приложения. В политехникуме с 1913 г. математику читал Антон Ломницкий (1881—1941), который впоследствии стал профессором этого института. Ломницкий исследовал вопросы теории вероятностей, математической статистики и картографии. Значительную роль в углублении математических знаний среди студенчества и преподавательского состава сыграл научный математический семинар, организованный во Львовском политехникуме в 1907 г.

Наряду с университетом и политехникумом во Львове некоторую научную деятельность в области математики, главным образом рефера-

тивного характера, вело Научное общество им. Т. Г. Шевченко, его математико-естествоведческо-медицинская секция. В 1873 г. было организовано Общество имени Т. Г. Шевченко, которое в 1893 г. преобразовали в Научное общество имени Т. Г. Шевченко.

В дальнейшем деятельность этого общества отошла от намеченных им первоначальных целей. Общество имело свой печатный орган — «Записки Научного Общества имени Шевченко». Со временем секции и комиссии общества стали издавать кроме этого свои «Записки». В распоряжении общества накопилась большая библиотека, которая образовалась из пожертвований организаций и отдельных лиц, а также путем обмена книжных фондов.

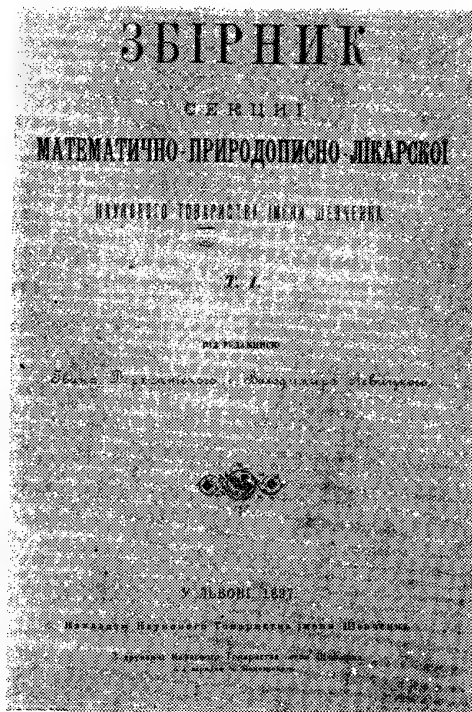
Математико-естествоведческо-медицинская секция с 1893 г. по 1917 г. издала 17 томов своих «Записок», в которых было помещено 30 работ по математике и 15 — по физике. Эти публикации носили в основном реферативный характер и лишь некоторые из них содержали оригинальные результаты. Одной из задач секции было создание украинской научной терминологии в области физико-математических и естествоведческих наук. Терминология, выработанная секцией, сыграла некоторую роль в последующих научно-терминологических работах по математике и физике, а также в учебной литературе.

Действительными членами научного общества им. Т. Г. Шевченко физико-математической специальности были В. А. Левицкий, который длительное время возглавлял математико-естествоведческо-медицинскую секцию, и П. М. Огоновский, избранные в 1898 г., и Н. А. Чайковский, избранный в 1913 г.

В. А. Левицкий (1872—1956), ученик профессора Пузыны, окончил Львовский университет и после защиты в 1901 г. диссертации «О симметрических выражениях значений функции $\mod m$ » получил степень доктора философии. Другие свои математические работы Левицкий посвятил вопросам эллиптических модулярных функций, непрерывных дробей, интерполяционных формул, свойств степенных рядов и др. Он занимался также некоторыми вопросами дифференциальных уравнений, математической физики, геометрии и астрономии. Благодаря ему украинские ученые восточной Галиции впервые познакомились с теорией Софьи Ковалевской относительно колец Сатурна и с принципами геометрии Н. И. Лобачевского.

Особенно большую пользу принесли учебники Левицкого на украинском языке для средней школы (учебники физики для старших классов и учебник алгебры, написанный в соавторстве с Огоновским), а также его работы по созданию математической терминологии, помещенные в VII томе «Записок Научного общества имени Шевченко». Левицкий опубликовал более шестидесяти физико-математических работ. Преподавал он только в гимназии и лишь после воссоединения западных украинских земель с СССР впервые получил возможность читать лекции в высших учебных заведениях Львова.

П. М. Огоновский работал учителем математики и физики в средних школах Львова, так как реакционные власти не допускали его



Титульный лист I тома «Сборника» Научного общества им. Т. Г. Шевченко.

Высшим учебным заведением Буковины был Черновицкий университет. Он был открыт на базе духовной семинарии 4 октября 1875 г. в составе трех факультетов: теологического, философского и юридического с немецким языком преподавания.

Преподавание математики в Черновицком университете на протяжении 1875—1918 гг. происходило таким образом: читались лекции, велись семинары по математической физике и математике и с 1880 г. проводился специальный семинар по математике. Наряду с кафедрой математики при философском факультете существовало физическое отделение с двумя кафедрами: экспериментальной и теоретической физики.

Преподавание высшей математики в Черновицком университете начал Леопольд Гегенбауэр. Он читал дифференциальное и интегральное исчисления, теорию эллиптических функций, руководил математическим семинаром. Гегенбауэр в период работы в Черновицком университете занимался исследованиями бесселевых функций. В 1881 г. он переехал в Инсбрукский университет.

С 1876 г. начал работать семинар по математической физике, которым руководил А. Васмут, поступивший в Черновицкий университет из Венского политехнического института. С 1882 г. по 1890 г. он был в Черновицком университете ординарным профессором математической физики. Его работы в основном связаны с вопросами магнетизма и термодинамики. После Гегенбауэра в университете преподавал Густав

читать лекции в университете. Известен он своими учебниками для средней школы.

Н. А. Чайковский после окончания университета защитил диссертацию на тему «Об уравнениях степени p^2 ». Эта работа, за которую ему присудили ученую степень доктора философии, была напечатана в XIV томе «Записок Научного общества имени Шевченко» под заглавием «Метациклические уравнения и их группы» — изложение теории групп и теории уравнений Галуа с приложением к уравнениям степени p^2 . В другой статье — «К теории конических сечений» (1911 г.) — Чайковский дал вариант изложения теории кривых второго порядка с применением к одному частному случаю. В работе «Исследования по теории конгруэнций» (1912 г.) он после изложения теории конечного поля Галуа, исследовал конгруэнции третьего и четвертого порядков с простым модулем.

Эшерих, который читал высшую алгебру, математический анализ, позднее интегрирование дифференциальных уравнений, вариационное исчисление. Эшерих издал два учебника: «Детерминанты высшего порядка и их применение в создании инвариантов» (1880 г.) и «Введение пространства» (1881 г.). В 1892 г. он уехал работать в Венский университет.

После Эшериха кафедру математики занял Миготти-Адольф, бывший приват-доцент Венской технической высшей школы.

С 1887 г. по 1904 г. в университете лекции по теории функций комплексного и действительного переменного, эллиптическим функциям читал ординарный профессор математики Антоний Пухта.

С 1891 г. семинаром математической физики руководил Оттокар Тумлирц, который в 1894 г. стал ординарным профессором математической физики. В 1905 г. он уехал в Инсбрукский университет.

Впоследствии должность экстраординарного профессора математической физики занял Даублебский, который вел курс теории чисел и курс алгебраических чисел. Проработав всего два года, он уехал в Грац, и с 1908 г. математика в Черновицком университете перешла к Племелю. Он читал специальные проблемы алгебры, а также неевклидову геометрию.

С 1910 г. кроме Племеля различные математические курсы читал Ган Ганс, среди них — дифференциальную геометрию и основы геометрии.

ГЛАВА ДВЕНАДЦАТАЯ

МАТЕМАТИКА В ДРУГИХ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЯХ СТРАНЫ В КОНЦЕ XIX — НАЧАЛЕ XX В. ТВОРЧЕСТВО Г. Ф. ВОРОНОГО. ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

1

Математика в Казанском университете. Казанское физико-математическое общество

Заметное оживление математической жизни в Казани начинается примерно с 80-х годов. Этот подъем связан с деятельностью Казанского физико-математического общества, которое выделилось в 1880 г. сначала в виде секции одного из старейших русских научных обществ — Общества естествоиспытателей при Казанском университете (основано в 1869 г.). Физико-математическую секцию организовал известный астроном М. А. Ковальский, который и был избран председателем. Секретарем был вначале Ф. М. Суворов, с 1882 г. он стал товарищем председателя, а секретарем — П. С. Порецкий.

На заседаниях секции, происходивших ежемесячно, заслушивались сообщения об оригинальных исследованиях и обзорные доклады, а также научная библиографическая информация. Через несколько лет число членов увеличилось до ста. В деятельности общества принимали участие профессор и преподаватели университета, преподаватели гимназий, инженеры, военные и др. Быстро росла библиотека секции. С 1883 г. ежегодно выходил один том журнала «Собрание протоколов заседаний секции физико-математических наук Общества естествоиспытателей при Казанском университете». Издавался журнал всего восемь лет. Был налажен обмен изданиями.

После смерти М. А. Ковальского (1884 г.) в течение 22-х лет председателем избирался А. В. Васильев, который развил особенно энергичную деятельность. При нем секция была преобразована в самостоятельное физико-математическое общество (1890 г.). В работе общества активно участвовали новые члены: Д. А. Гольдгаммер (электромагнетизм), Д. И. Дубяго (астрономия), Д. Н. Зейлигер (механика), А. П. Котельников (геометрия), Д. М. Синцов (дифференциальные уравнения), Н. Н. Парфентьев (математический анализ) и др., а также, иногда, иногородние ученые: А. А. Марков, Н. В. Бугаев, В. В. Бобынин, В. Ф. Каган, С. О. Шатуновский и другие.

Существенно расширилась издательская деятельность. Журнал получил название «Известия Физико-математического общества при Казанском университете» (с 1891 по 1917 г. вышло 22 тома).

В приложениях к журналу печатались переводы работ выдающихся иностранных математиков: Римана, Бельтрами, Клейна, Гельмгольца, Дедекинда, Вейерштрасса, Пуанкаре и др.

Большая работа была проведена обществом по распространению идей Н. И. Лобачевского. Университет издал полное собрание геометрических сочинений Лобачевского в 2-х томах (1883, 1886 гг.)¹. Организованное в 1893 г. обществом и Казанским университетом празднование столетия со дня рождения Лобачевского привлекло внимание ученых всего мира и вылилось в международное признание его выдающихся научных заслуг.

По инициативе А. В. Васильева был создан по международной подписке фонд имени Лобачевского, который использовался для установления в Казани памятника великому творцу геометрии и для организации международных конкурсов на соискание премии Н. И. Лобачевского. Впервые присуждение премии состоялось в 1897 г. Первым лауреатом премии стал Софус Ли. Многие выдающиеся геометры мира, например, В. Киллинг, Ф. Клейн, Д. Гильберт, А. Пуанкаре, Дж. Пеано, Э. Штуди, Ф. Шур, Г. Вейль, Э. Картан, И. Леви-Чивита и другие, участвовали в этих конкурсах в качестве соискателей или в качестве референтов.

Рассмотрим научную и педагогическую деятельность наиболее видных ученых-математиков Казанского университета.

Александр Васильевич Васильев (1853—1929) родился в Казани в семье известного китаеведа проф. В. П. Васильева (впоследствии академика). В 1874 г. он окончил с золотой медалью физико-математический факультет Петербургского университета и в качестве приват-доцента стал преподавать в Казанском университете. В 1879—1882 г. находился в заграничной командировке, слушал лекции Кронекера и Вейерштрасса (Берлин), Эрмита (Париж), знакомился с постановкой преподавания у Ф. Клейна (Лейпциг).

В 1880 г. он защитил магистерскую, а в 1884 г. — докторскую диссертации и был избран экстраординарным профессором по кафедре чистой математики. В 1887 г. он стал ординарным профессором, а в 1899 г. получил звание заслуженного профессора. До 1906 г. его общественно-научная деятельность была связана с Казанью. Он читал в университете разнообразные курсы и публичные лекции, руководил научными семинарами, умело привлекая студентов и молодых преподавателей к научным исследованиям. Число учеников Васильева велико, среди них: Д. М. Синцов, А. П. Котельников, Н. Н. Парфентьев, Е. И. Григорьев, Н. И. Порфирьев и др.

Математические исследования Васильева отличаются широтой кругозора. В своей магистерской диссертации «О функциях рациональных, аналогичных с функциями двояко-периодическими» (1880 г.) он вплотную подошел к открытию автоморфных функций. К сожалению, он ограничился изучением случая, когда рациональная функция остается

¹ Редактором собрания сочинений и автором биографического очерка, помещенного в I томе, был Ф. М. Суворов.

инвариантной при конечной группе дробно-линейных преобразований. Общая теория автоморфных функций была разработана на протяжении ближайших лет в известных трудах Ф. Клейна и А. Пуанкаре. В докторской диссертации «Теория отделения корней систем алгебраических уравнений» (1884 г.) Васильев развивает и применяет метод характеристик Кронекера, причем использует геометрию многомерных пространств, теорию кратного интегрирования и теорию потенциала в этих пространствах. Одновременно он блестяще излагает историю вопроса, причем результаты, полученные ранее в теории отделения корней, освещает с единой точки зрения теории характеристик.

Историко-математические исследования Васильева посвящены истории неевклидовой геометрии, трудам, идеям и биографии Н. И. Лобачевского. Ценным для нас является большой очерк жизни и деятельности П. Л. Чебышева². В обзоре, вышедшем в серии «Русская наука» («Математика», вып. 1, 1924), освещалось развитие математики в России, за период с 1725 по 1863 г. Исследования философско-математического характера посвящены истории развития важнейших математических понятий и идей: статья «Математика» в энциклопедии Граната, исторический очерк развития теории чисел в книге «Целое число» (1919 г.), история развития основных воззрений на пространство и время, завершающаяся теорией относительности в книге «Пространство, время, движение» (1923 г.) и др.

В 1906 г. А. В. Васильев переехал в Петербург, где преподавал в университете, на Высших женских курсах, в Педагогической академии «Лиги образования»³. Он стал редактором известного неперiodического издания «Новые идеи в математике» (1912—1917 гг.) и являлся деятельным участником нескольких международных и русских математических съездов. Так, на I Всероссийском съезде преподавателей математики (1911—1912 гг.) он был председателем и ставил вопросы о повышении научного уровня преподавания, о необходимости разрабатывать историю математики в России.

В 1923 г. Васильев переехал в Москву, где до последних дней (ум. 9 октября 1929 г.) принимал участие в работе редакционной комиссии Госиздата по подготовке «Полного собрания сочинений Н. И. Лобачевского». Ему принадлежит обширная монография «Жизнь и научное дело Н. И. Лобачевского»⁴ (435 стр.), оставшаяся неопубликованной.

В 1893 г. в качестве приват-доцента в Казанском университете работал А. П. Котельников, который читал курсы графической статики и теории упругости.

² A. W a s i l j e f f. P. L. Tchebychef et son oeuvre scientifique. — Bolletine di bibliogr. e di storia delle sc. mat. Torino, 1898, 56 p; Tschebyschef und seine wissenschaftliche Leistungen, Leipzig, 1900, Teubner.

³ Лига образования — созданное в 1908 г. по инициативе либеральной интеллигенции высшее учебное заведение с двухлетним курсом обучения. Содержалось оно на частные пожертвования. Первым президентом был М. М. Ковалевский, затем А. В. Васильев и др. В 1915 г. из-за недостатка средств оно было закрыто.

⁴ Верстка этой монографии хранится в библиотеке им. А. М. Горького при Московском государственном университете.

В 1899 г. после защиты докторской диссертации он уехал в Киев и преподавал в Киевском политехническом институте, но в 1904 г. он был избран на кафедру чистой математики в Казанском университете. Котельников интересовался вопросами механики евклидова пространства, но вскоре под влиянием идей неевклидовой геометрии, знакомством с которыми он, безусловно, обязан своим учителям Ф. М. Суворову и А. В. Васильеву, он пришел к мысли, что изучение механики неевклидовых пространств заслуживает самого серьезного внимания. В дальнейшем в своих основных исследованиях он разрабатывает математический аппарат для построения неевклидовой механики. Хотя в магистерской диссертации «Винтовое счисление» (1895 г.) теорию винтов, развитую им в алгебраической форме некоторого исчисления с помощью кватернионов и дуальных чисел $a + \omega b$, где $\omega^2 = 0$, он строит лишь для евклидова пространства, в опубликованных тезисах диссертации он уже указывает на важность изучения механики неевклидовых пространств и на возможность обобщения винтового исчисления на случай эллиптического пространства ($\omega^2 = 1$) и пространства Лобачевского ($\omega^2 = -1$). Намеченную программу строго обоснованного построения винтового исчисления в неевклидовых пространствах Котельников впоследствии выполнил полностью в своей докторской диссертации.

Магистерская диссертация состоит из двух частей. В первой части вводится понятие винта в евклидовом пространстве и определяются операции над винтами, имеющие определенный смысл с точки зрения законов механики. В механике винты появляются при рассмотрении сил, действующих на твердое тело (статический винт) или при изучении скоростей точек движущегося твердого тела (кинематический винт). В обоих случаях задача сводится к двум векторам a и $\bar{a}$, свободному и скользящему, приложенным в одной точке O .

В случае замены точки O точкой O' свободный вектор не изменяется, а скользящий получает значение $\bar{a}' = \bar{a} - [pa]$, где $p = \vec{OO'}$. Такая пара векторов $(a, \bar{a})$ и называется винтом. С помощью параболических комплексных чисел $a + b\omega$, где $\omega^2 = 0$, винт может быть охарактеризован комплексным вектором

$$A = a + \omega \bar{a}.$$

В теории кватернионов с комплексными компонентами (бикватернионов) винтовые операции получают краткие обозначения и, таким образом, появляется особый вид символического исчисления — винтовое исчисление. Котельников тщательно выясняет и геометрический смысл этих операций.

Во второй части диссертации найден метод перенесения Котельникова — Штуди. У всех винтов, отличающихся лишь комплексным скалярным множителем, ось одна и та же. Поэтому, если винты нормировать, приведя их модули к единице, то точки комплексной единичной сферы (единичные винты) будут поставлены во взаимно однозначное соответствие с ориентированными прямыми (лучами) евк-

лидова пространства. При этом оказывается, что сферическое расстояние двух точек такой комплексной сферы равно комплексному углу $\theta = \varphi + \omega\delta$ между прямыми, где φ — обычный угол, δ — кратчайшее расстояние. Отсюда вытекает, что движения евклидова пространства изображаются вращениями комплексной сферы. Таким образом, устанавливается соответствие между группой движений евклидова пространства и группой бикватернионов единичного модуля.

Котельников исследовал бесконечно малые движения, показал, что они взаимно однозначно изображаются винтами и нашел все подгруппы движений. В заключение он рассмотрел случаи движения системы, подчиненной некоторым связям, когда дифференциальные уравнения движения, записанные в винтовой терминологии, допускают интеграл («винтовой интеграл»), и эти результаты применил к изучению специальных случаев таких движений.

В докторской диссертации «Проективная теория векторов» (1899 г.) Котельников развивает стройную теорию векторов в неевклидовых пространствах. Он распространяет винтовое исчисление на эти пространства и таким образом создает прочную основу для построения неевклидовой механики. Базируясь на проективной интерпретации неевклидовой геометрии, он рассматривает вектор $\overrightarrow{AB}$ как упорядоченную пару точек A и B проективного пространства, причем модуль вектора («тензор» — по терминологии Котельникова) вводится как функция его длины δ в соответствующей неевклидовой метрике

$$|\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{K} \operatorname{tg}(K\delta),$$

где K^2 — кривизна пространства (в случае пространства Римана она положительна, для пространства Лобачевского — отрицательна, а для евклидова пространства равна нулю). Легко определить, что для евклидова пространства

$$|\overrightarrow{AB}| = \delta.$$

Для пространства Лобачевского, если обозначить $K^2 = -k^2$, получим

$$|\overrightarrow{AB}| = \frac{1}{k} \operatorname{th}(k\delta).$$

Такая характеристика модуля вектора соответствует рассмотрению вектора в пространстве, касательном к неевклидову пространству в данной точке (точке приложения вектора), когда длина образа бесконечно малого отрезка определяется как надлежащая функция длины прообраза при данном отображении. До опубликования работы Котельникова векторы как пары точек в неевклидовом пространстве не рассматривались и не ставился вопрос о внутреннем нахождении суммы двух векторов, имеющих общее начало. Котельников сумму двух векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, имеющих общее начало O , определил следующим образом: построил гиперплоскость σ , полярную точке O относительно абсолюта, нашел точки пересечения прямых OA с σ (точка A') и OB с σ (точка B') и отыскал точку пересечения прямых AB' и BA' (точка C).

Вектор $\overrightarrow{OS}$ и является вектором суммы. Можно проверить, что в касательном пространстве такое построение приводит к обычному правилу параллелограмма. Легче всего это сделать, рассматривая интерпретацию неевклидовой геометрии на сфере, вмещенной в евклидово пространство. Вектор касательного пространства получается тогда путем проектирования точек O и A центра сферы на плоскость, касательную в точке O .

Пользуясь операциями перенесения вектора по прямой, сложения и разложения векторов, имеющих общее начало, Котельников показал, что всякая система векторов, лежащих в одной плоскости, эквивалентна одному вектору (определенному с точностью до его переноса по прямой), а система векторов в пространстве эквивалентна двум векторам, причем прямая одного из этих векторов может проходить через произвольную точку, а прямая второго вектора лежит в плоскости, полярной этой точке. Можно добиться такого единственного положения (с точностью до переноса по прямой), что прямые обоих векторов будут полярно сопряжены. Такие прямые называются осями системы векторов. Используя проективную двойственность, Котельников рассмотрел также образ полярно сопряженной вектору, т. е. паре точек A и B , а именно — пару полярных точек плоскостей α и β . Этот образ он называл ротором $\overrightarrow{\alpha\beta}$, а прямую пересечения плоскостей — его осью. Угол φ между плоскостями α и β равен: $\varphi = K\delta$, где δ — расстояние между A и B . Модуль ротора $\overrightarrow{\alpha\beta}$ вводится равенством

$$|\overrightarrow{\alpha\beta}| = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} K\delta.$$

Соответствующие друг другу (т. е. полярные) вектор и ротор считаются эквивалентными. Таким образом, произвольную систему векторов и роторов можно привести к вектору и ротору, ось которого совпадает с прямой вектора («мотор» или винт). При предельном переходе к евклидову пространству получаются винты евклидова пространства.

Далее вводятся комплексные числа $a + \omega b$ эллиптические или гиперболические, в зависимости от кривизны пространства $\omega^2 = K^2$.

Вектор a и ротор $\tilde{a}$, определяющие винт, порождают комплексный вектор

$$A = a + \omega \tilde{a},$$

характеризующий винт в неевклидовом пространстве. С помощью комплексных векторов и действий с ними вводятся основные операции над винтами и выясняется их геометрический смысл. Устанавливается связь развитого винтового исчисления с бикватернионами и рассматриваются приложения этого исчисления в геометрии и механике. Важнейшими результатами являются: обобщение принципа перенесения на неевклидово пространство, установление связи между движениями неевклидова пространства и вращениями комплексной сферы, а также теоремы о винтовых интегралах.

Таким образом, научная деятельность Котельникова в Казани привела к строго развитой им системе построения основ неевклидовой механики. Используя в различных пространствах комплексные числа вида $a + \omega b$, где $\omega^2 = 0$ (пространство Евклида), $\omega^2 = -1$ (пространство Лобачевского), $\omega^2 = +1$ (пространство Римана — эллиптическое), и применяя кватернионы, он создает общее винтовое исчисление и показывает, что теория векторов в сущности может быть развита на чисто проективной основе. Следовательно, основные исходные положения статики и кинематики твердого тела получили общее обоснование независимо от типа неевклидова пространства. Кроме того, им даны важные геометрические применения этой теории. Впоследствии Котельников исследовал связи геометрии Лобачевского с теорией относительности и установил, что пространство скоростей релятивистской теории является пространством Лобачевского (1926 г.).

Работы А. П. Котельникова оказали существенное воздействие на направление исследований геометров Казанского университета — Д. Н. Зейлигера, П. А. Широкова и А. П. Нордена — и содействовали, таким образом, развитию геометрических исследований в Казанском университете в послереволюционный период.

Геометрическими исследованиями в Казанском университете занимался Дмитрий Николаевич Зейлигер (1864—1936). Он окончил Одесский (Новороссийский) университет в 1887 г. Основная область его исследований — механика. Его магистерская ⁵ и докторская ⁶ диссертации посвящены теории движения подобно изменяемого тела. В 1892 г. он начал работать приват-доцентом на кафедре механики Казанского университета, а в сентябре 1895 г., после защиты докторской диссертации, был назначен профессором. Д. Н. Зейлигер знакомится с работами А. П. Котельникова, и затем выступает в качестве официального оппонента по его обеим диссертациям. Под влиянием его идей Зейлигер начинает также вести исследования в области линейчатой геометрии, применяя комплексные параболические числа (дуальные числа) и впоследствии издает обзорную монографию «Комплексная линейчатая геометрия» (1934 г.). Д. Н. Зейлигер возглавлял КФМО с 1907 г., но в 1914 г. был уволен из университета реакционным министром Кассо. В Казанский университет он смог вернуться лишь после февральской революции, где был избран на кафедру математики, так как кафедра механики была тогда занята проф. Е. А. Болотовым. Лишь после переезда Е. А. Болотова в Московское высшее техническое училище (1921 г.) Д. Н. Зейлигер перешел на кафедру механики.

В Казанском университете начинал свою деятельность и Дмитрий Матвеевич Синцов.

В магистерской диссертации «Теория коннексов в пространстве в связи с теорией дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка» (1895 г.) Синцов впервые рассмотрел обобщенные

⁵ Д. Н. Зейлигер. Теория движения подобно изменяемого тела. — Ученые записки Казанского университета, 1892.

⁶ Д. Н. Зейлигер. К теории движения подобно изменяемого тела. — Там же, 1893.

коннексы Клебша, т. е. геометрические образы, определенные уравнением $f(x_i, u_i) = 0$, где x_i и u_i — однородные координаты точки и плоскости в пространстве. Его исследование устанавливало связь теории коннексов с теорией интегрирования уравнений в частных производных первого порядка.

В докторской диссертации «Рациональные интегралы линейных уравнений» (1898 г.) он сравнивает методы Лиувилля и Имшенецкого нахождения рациональных интегралов обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и дает обобщение метода Лиувилля, позволяющее применять его к системе уравнений высшего порядка. В те годы велась дискуссия о преимуществах того или иного из упомянутых методов отыскания рациональных интегралов. В ней принимали участие многие видные русские и иностранные математики. В диссертации Синцов показал эквивалентность обоих методов и распространил метод параллелограмма Ньютона разложения алгебраических функций в степенный ряд на случай системы двух уравнений.

Интересное направление получили научные исследования Платона Сергеевича Порецкого (1846—1907), который, хотя и был астрономом, но научную славу приобрел благодаря работам по математической логике, сыгравшим значительную роль в развитии этой науки. После окончания Харьковского университета (1870 г.) его оставили профессорским стипендиатом при кафедре астрономии. В Казанском университете он работал с 1876 по 1889 г. сначала астрономом-наблюдателем, а после защиты докторской диссертации (1886 г.), за которую ему сразу была присвоена ученая степень доктора по двум разрядам наук — математике и астрономии, — приват-доцентом. С этого времени он читает курсы сферической тригонометрии и математической логики. С первых лет организации секции физико-математических наук Общества естествоиспытателей он проявил себя как один из деятельнейших ее членов, и вскоре был избран секретарем и казначеем (1882 г.). От А. В. Васильева он узнал о новой, в то время только начавшей свое развитие науке — математической логике. Порецкий изучил работы Буля и Шредера и первый в России вел творческие научные исследования в этой области, выступая с докладами и публикуя серию работ (начиная с 1880 г.) в журнале секции, а затем в «Известиях» Казанского математического общества и других изданиях. Он занимался также приложениями математической логики к теории вероятностей и законом распределения простых чисел. Выйдя в отставку в связи с плохим состоянием здоровья (1889 г.), Порецкий уехал в Черниговскую губернию, где продолжал заниматься вопросами математической логики. Он впервые построил вполне законченную теорию качественных умозаключений (логика классов), получившую высокую оценку специалистов. Например, французский математик Кутюра в своей известной книге «Алгебра логики» (1905 г.) уделил много внимания изложению метода и результатов Порецкого, подчеркивая их важное значение. Работы Порецкого сохраняют свою значимость и в настоящее время. Они существенно дополняют и обобщают результаты Буля, Девенсона и Шредера. Им разработаны оригинальные и простые алгоритмы для

отыскания всех логических следствий определенного вида из заданных предпосылок и всех гипотез о предпосылках для заданных следствий.

Петр Сергеевич Назимов (1851—1901) по окончании Московского университета (1873 г.) 13 лет преподавал математику в гимназии сначала в Ярославле, а затем в Москве, одновременно успешно занимаясь научными исследованиями. Его работа по интегрированию уравнений с частными производными была удостоена в 1880 г. премии имени Н. Д. Брашмана Московского университета. В дальнейшем он изучал приложения теории эллиптических функций в теории чисел. Выражая эллиптические функции через тригонометрические ряды, он доказал теоретико-числовые формулы и теоремы, приведенные ранее Лиувилем без обоснования. За эту работу он также получил премию имени Н. Д. Брашмана в 1884 г. и несколько позже представил ее в Московский университет в качестве магистерской диссертации, за которую ему присвоили ученую степень доктора чистой математики (1885 г.)⁷. С 1886 по 1889 г. Назимов был доцентом в Варшавском университете, где изучал некоторые вопросы теории вероятностей, а с 1889 г. — профессором в Казанском университете, в котором занимался проективной и неевклидовой геометрией.

Большое влияние на развитие математики и механики в Казанском университете оказал Николай Николаевич Парфентьев (1877—1943). По окончании Казанского университета (1899 г.) он получил золотую медаль за сочинение «Обзор теорий по алгебраическим и трансцендентным числам». В 1903 г. Парфентьев сдал магистерский экзамен и после двух пробных лекций начал преподавать в Казанском университете (1904 г.) в качестве приват-доцента. В течение 1908—1910 гг. он находился в заграничной научной командировке и работал над своей диссертацией в Геттингене, Мюнхене и Бордо. Вместе с тем он посещал лекции Гильберта, Клейна, Кобе, участвовал в семинарах, знакомился с постановкой практических занятий по приближенным графическим и численным методам. Вернувшись в Казань, он оформил и опубликовал магистерскую диссертацию «Исследования по теории роста функций» (1910 г.). После ее защиты в 1911 г. ему было присвоено звание профессора по кафедре чистой математики. В 1911—1918 гг. помимо обязательных лекций, он вел ряд факультативных курсов и семинаров (аналитическая теория дифференциальных уравнений, теория рядов, теория групп преобразований; семинары по теории множества, по обобщению понятия интеграла, по математической логике и др.). Из математических исследований Парфентьева наибольшее значение имеет его магистерская диссертация. В ней изучается преимущественно асимптотическим методом характер роста целых аналитических функций, заданных степенным рядом или бесконечным произведением Вейерштрасса; рассматриваются также и функции, заданные неявно; исследуются связи между ростом модулей функции, коэффициентов и нулей функции; найдено большое число новых результатов. Часть получен-

⁷ П. С. Назимов. О приложениях теории эллиптических функций к теории чисел. Докторская диссертация. М., 1885, 424 стр; см. также — Ученые записки Московского университета, 1885, вып. 5.

ных результатов была уже известна, но они выведены другим путем или углублены. Попутно найдено немало теорем, имеющих самостоятельный интерес. Существенно дополнена теорема Адамара о минимуме модуля функции порядка меньшего $\frac{1}{2}$ на окружности с центром в начале координат. Получено обобщение метода Бореля суммирования расходящихся рядов. Найден ряд обобщений теоремы Пикара и др.

Научная и педагогическая деятельность Ф. М. Суворова, А. В. Васильева, П. С. Порецкого, А. П. Котельникова, Д. М. Синцова, Д. Н. Зейлигера, Н. Н. Парфентьева и др. содействовала подготовке нового поколения молодых исследователей, воздействовала на выбор направления их работ.

2

Математика в Дерптском (Юрьевском) университете

В 1889 г. на Дерптский университет был распространен реакционный университетский устав 1884 г. Положение резко изменилось: устранили выборность профессоров и должностных лиц, усилилась реакционная деятельность.

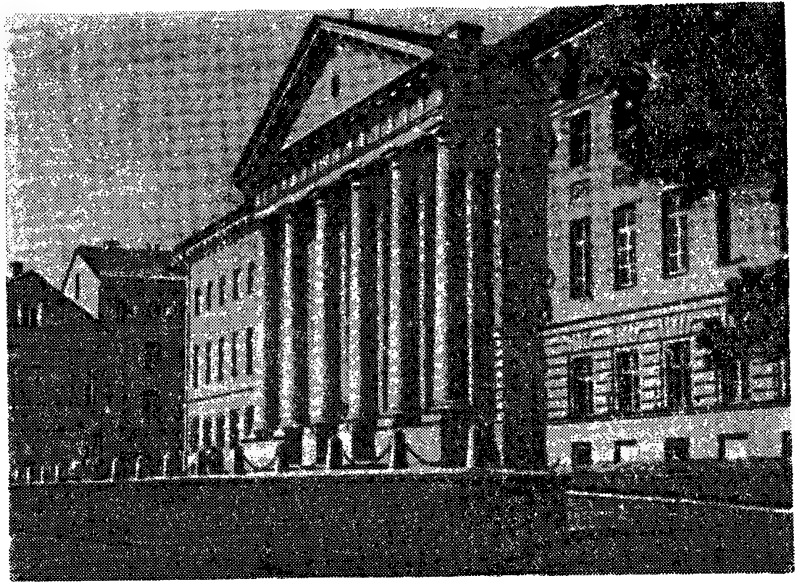
В соответствии с проводимой царским правительством политикой руссификации город был переименован в Юрьев и университет стал называться Юрьевским. Значительно изменился преподавательский состав за счет пополнения его русскими учеными.

В эти годы в Дерпте профессором по чистой математике был Ф. Шур и по прикладной — А. Кнезер, оба известные в то время ученые. Доцентом по чистой математике работал Ф. Молин. Уже в 1892 г. Ф. Шур, получив приглашение в Аахен, покинул Дерпт. Министерство народного просвещения без всяких мотивов отклонило кандидатуру Ф. Молина на эту должность и вместо Шура назначило приват-доцента Московского университета Л. К. Лахтина (1863—1927). Он родился в Тульской губернии, в 1881 г. окончил гимназию в Москве. После окончания Московского университета в 1885 г. Лахтина оставили на кафедре чистой математики, где через четыре года он сдал магистерский экзамен, но к моменту назначения в Дерптский университет не успел еще приобрести магистерской степени. В 1893 г., после защиты в Москве магистерской диссертации «Алгебраические уравнения, разрешимые в гипергеометрических функциях» (1892 г.), Лахтин был утвержден в должности экстраординарного профессора Юрьевского университета. В 1896 г. он добился возвращения в Московский университет. В Юрьеве Лахтин читал основные курсы: дифференциальное и интегральное исчисления и аналитическую геометрию. За это время он опубликовал две работы, посвященные научной деятельности Н. И. Лобачевского (1893 г.) и интерпретации Пуанкаре геометрии Лобачевского (1894 г.). В Юрьеве в основном он закончил также свою докторскую диссертацию «Дифференциальные резольвенты алгебраических уравнений высших родов» (1896 г.), которую защитил весной 1897 г., будучи уже профессором Московского университета. В диссертации

исследовались возможности решения алгебраических уравнений в некоторых специальных функциях, зависящих от интегралов дифференциальных уравнений резольвент.

Еще в 1895 г. в Юрьевском университете была утверждена третья профессура по математике. Новым профессором чистой математики был назначен В. Г. Алексеев. Виссарион Григорьевич Алексеев (1866—1943) родился в Новочеркасске. После окончания Московского университета в 1888 г. он по рекомендации В. Я. Цингера был оставлен при университете, где в 1893 г. получил степень магистра за работу «Теория числовых характеристик систем кривых линий». В Юрьевском университете ему поручили чтение геометрических курсов. Приобретенные за границей знания он использовал для составления первого на русском языке курса «Теория рациональных инвариантов бинарных форм в направлении Софуса Ли, Кэли и Аронгольда» (1899 г.), за который Московский университет присудил ему степень доктора. Алексеев неоднократно читал курс математики для химиков. В связи с этим он заметил некоторую аналогию между методами формальной химии и символической теории инвариантов. В Эрлангене он обсудил этот вопрос с известным немецким алгебраистом П. Гордоном и в результате появилась их совместная работа «Соответствие между формулами химии и теории инвариантов» (1900 г.). К замеченной им аналогии Алексеев вернулся еще в нескольких своих публикациях. В Юрьевском университете Алексеев работал до 1918 г. и был ректором в 1909—1914 и 1917—1918 гг.

После ухода Лахтина профессором по чистой математике в 1896 г. был назначен выпускник Московского университета Н. В. Берви, защитивший в 1896 г. в Москве магистерскую диссертацию «Решение некоторых общих вопросов теории числовых интегралов». Однако в связи с болезнью он в 1898 г. прекратил научную и педагогическую деятельность. На освободившееся место был назначен Платон Платонович Граве (1867—1919), который окончил в 1890 г. Казанский университет, сдал через три года магистерские экзамены и получил в Казани место приват-доцента. После защиты магистерской диссертации «О геометрическом представлении эллиптических интегралов и функций» в 1894 г. Граве работал три года учителем гимназии в Казани. В 1898 г. ему присвоили степень доктора за работу «О построении кривых третьей степени». После этого он был назначен экстраординарным профессором Юрьевского университета, где работал до 1918 г. (с 1901 г. ординарным профессором). На кафедре прикладной математики до 1900 г. работал А. Кнезер, который был последним немецким профессором математики в Юрьеве. Адольф Кнезер (1862—1930) математическое образование получил в Ростове, Гейдельберге и Берлине. В 1884 г. в Берлине ему была присуждена степень доктора за работу о неприводимости и о группах монодромии алгебраических уравнений. До приглашения в Дерпт в 1889 г. он работал в университетах Марбурга и Бреславля (Вроцлав). В Юрьевском университете А. Кнезер читал аналитическую механику, теорию дифференциальных уравнений, теорию поверхностей, новую геометрию, алгебру и др. Здесь он продолжил свои исследова-

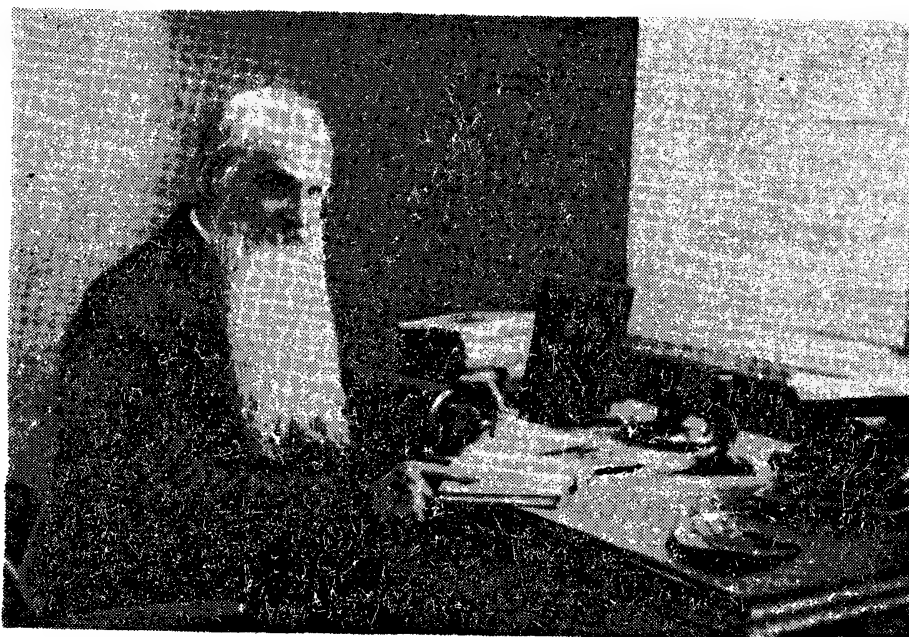


Главное здание Тартуского (б. Дерптского — Юрьевского) университета

ния по теории алгебраических уравнений и теории кривых и начал изучать новую для него область — теорию движения механической системы в окрестности положения неустойчивого равновесия. В Юрьеве Кнезер начал также свои исследования по вариационному исчислению, которое изложил в известной монографии «Учебник вариационного исчисления» (1900 г.). Из Юрьева Кнезер уехал в 1900 г., получив место профессора в Берлинской горной академии.

На кафедре прикладной математики в должности доцента работал Густав Грофе (1848—1895), получивший математическое образование в Москве и Дерпте — у Ф. Миндинга. В 1888 г. Грофе защитил в Дерпте магистерскую диссертацию о движении маятника на земной поверхности и был назначен приват-доцентом, а в 1894 г. — доцентом по прикладной математике. Он читал применения эллиптических функций к аналитической механике, теорию вероятностей и др. Из его немногочисленных научных работ привлекает внимание вычисление потенциала однородного эллипсоида по методу Дирихле.

С уходом А. Кнезера кафедра прикладной математики оставалась вакантной в течение трех лет. Только в 1903 г. эту кафедру занял Г. В. Колосов (1867—1936). Колосов в 1889 г. окончил Петербургский университет с дипломом I-й степени. По предложению Д. К. Бобылева он был оставлен при университете. В 1894 г. Колосов сдал магистерский экзамен и был назначен хранителем механического кабинета. Кроме того, он вел практические занятия по теоретической механике в разных институтах Петербурга. В мае 1903 г. в Петербургском университете Колосов защитил магистерскую диссертацию «О некоторых видоизменениях начала Гамильтона в применении к решению вопросов механики твердого тела», а в августе этого же года был назначен на должность экстраординарного профессора Юрьевского университета.



Ф. Э. Молин.

В Юрьеве он работал десять лет, читал кроме курса механики разные математические курсы: вариационное исчисление, теорию определенных интегралов, теорию конечных разностей, теорию функций комплексного переменного, теорию чисел. Он продолжил здесь свои исследования о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки, писал о законе Бэра размывания берегов рек, о применении формулы Пирсона в ботанических исследованиях, о движении тела в несжимаемой жидкости и т. п. В Юрьеве Колосов написал также докторскую диссертацию «Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости» (1909 г.). Своей диссертацией, защита которой состоялась в 1910 г. в Петербурге, он положил начало новому направлению теории упругости, с большим успехом разработанному затем его учеником Н. И. Мусхелишвили. В 1911 г. Колосов был назначен ординарным профессором Юрьевского университета. Однако через два года он оставил Юрьев, получив место профессора в Электротехническом институте в Петербурге.

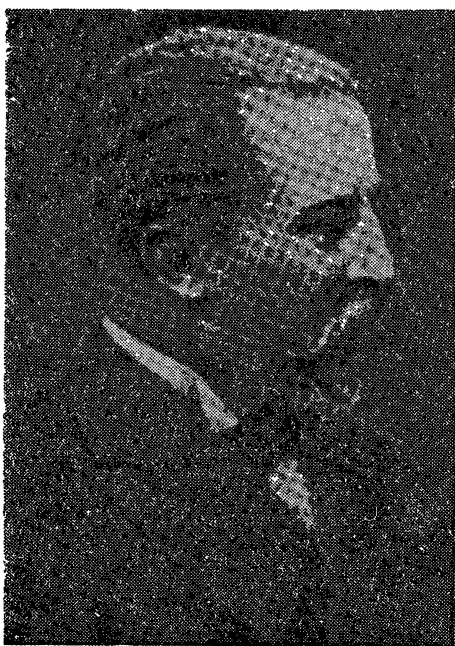
В 1915 г. на кафедру прикладной математики был избран Л. С. Лейбензон (1879—1951). Родился он в Харькове в семье врача. Гимназию окончил в Туле в 1897 г. и поступил в Московский университет, где занимался у Л. К. Лахтина и Н. Е. Жуковского. После окончания университета в 1901 г. Лейбензон приобрел еще и техническое образование. В 1908 г. он сдал при Московском университете магистерский экзамен, работал там до 1911 г. приват-доцентом, затем в этой же должности в Тбилиси на Высших женских курсах. До назначения в Юрьев он защитил в 1915 г. в Московском университете магистерскую диссертацию, в которой впервые разработал теорию безбалочных покры-

тий. Эти исследования продолжал затем в Тарту (Дерпте) его ученик В. В. Купфер. В 1918 г. Лейбензон, будучи уже профессором, эвакуировался вместе с Юрьевским университетом в Воронеж. Позже он стал известным ученым в области механики, нефтяного дела, геофизики. В 1943 г. он был избран академиком АН СССР.

Наиболее значительные научные исследования по математике в эти годы были сделаны молодыми воспитанниками университета Ф. Э. Молиным и П. Г. Бодем.

Федор Эдуардович Молин (1861—1941) родился в Риге. В 1883 г. окончил Дерптский университет со степенью кандидата астрономии и был оставлен в нем для подготовки к научной деятельности. В течение двух лет он был в Лейпциге, где принимал участие в научном семинаре Ф. Клейна. Результаты выполненных там исследований по теории линейных преобразований эллиптических функций на основе теории Вейерштрасса составили содержание двух опубликованных статей и магистерской диссертации, защищенной в Дерпте в октябре 1885 г. В этих работах наибольший интерес представляют линейные преобразования функции Якоби, в связи с чем Молин рассматривал некоторые корни из единицы. После защиты магистерской диссертации Молин проводит исследования по теории ассоциативных алгебр и теории представлений групп. Основные результаты этих исследований содержатся в его докторской диссертации «О системах высших комплексных чисел», опубликованной в 1893 г. в «*Mathematische Annalen*». Здесь установлена некоторая нормальная форма основных единиц для систем гиперкомплексных чисел и их связь с группами и матрицами, доказаны важные теоремы о строении ассоциативных алгебр, выделены простые числовые системы, которые определены так: для них при линейных преобразованиях переменных из уравнений, при помощи которых они определяются в данной числовой системе, нельзя выделить части для числовой системы с меньшим количеством основных чисел. В диссертации показано, что любая простая ассоциативная алгебра не меньше второго ранга над полем комплексных чисел изоморфна алгебре всех квадратных матриц подходящего порядка над этим же полем. Доказано также, что для любой числовой системы существует нормальная форма, позволяющая разделить все такие системы на классы; при этом все системы одного класса определены через исходную систему класса. Введенное Молиным понятие, эквивалентное понятию двухстороннего идеала, позволило ему изучить структуру произвольной числовой системы над полем комплексных чисел. В нескольких последующих статьях Молин развил и применил теорию гиперкомплексных чисел к некоторым вопросам алгебры. Он рассматривал теоремы для однородных групп подстановок, изучал представления дискретных групп подстановок.

Наиболее существенные результаты в Юрьеве за рассматриваемый период (и, возможно, за все время существования Тартуского университета) получил Пирс Георгиевич Боль (1865—1921). Родился он в г. Валка в купеческой семье. После окончания гимназии в Феллине (ныне Вильянди в ЭстССР) в 1884 г. он поступил в Дерптский



П. Г. Боль.

университет, который окончил через три года со степенью кандидата. Затем несколько лет работал учителем в Эстонии и Латвии, занимаясь самостоятельно научной работой. В 1889 г. Боль опубликовал первые результаты своих исследований, в том числе «Об одном обобщении третьего закона Кеплера». Работая несколько лет в родном городе, Боль закончил свою магистерскую диссертацию «О представлении функций одной переменной тригонометрическими рядами с несколькими аргументами, пропорциональными одной независимой переменной». Защита состоялась в 1893 г. в Дерптском университете. Своей диссертацией Боль положил начало новому направлению математического анализа — теории почтипериодических функций. Он нашел внутреннюю характеристику тех функций

$f(t)$, которые можно на всей оси t аппроксимировать равномерно с любой степенью точности конечными суммами вида

$$\sum_{i=1}^m \sum_k a_{ik} \cos kr_i t + b_{ik} \sin kr_i t,$$

где k — целое число; $r_1, \dots, r_n$ — заданная система вещественных чисел. Отправляясь от работ Боля и французского астронома Эсклангона датский математик Г. Бор разработал в 1923 г. теорию несколько более общих почтипериодических функций.

При сдаче магистерского экзамена и защите диссертации Боль познакомился с А. Кнезером, который, несомненно, заметил выдающиеся способности молодого магистра. Однако создавшееся к тому времени положение в Дерптском университете не дало возможности Кнезеру пригласить Боля на академическую должность. Боль возвратился в Валку и только через два года (в 1895 г.) по настоятельной рекомендации Кнезера получил освободившуюся кафедру математики в Рижском политехническом училище. Работая в Риге, Боль не терял связи с Кнезером. Как раз тогда Кнезер начал публиковать серию работ, посвященных проблеме движения тел вблизи положения равновесия. Эта проблема интересовала и Боля. Через некоторое время он получил результаты, значительно развивающие труды Кнезера, и изложил их в своей докторской диссертации «О некоторых дифференциальных уравнениях общего характера, применимых в механике», которую защитил в Юрьевском университете в 1900 г. В этом же году работа вышла в Юрьеве отдельной книжкой, а через десять лет (с не-

которыми сокращениями) переведена на французский язык и напечатана в «Бюллетене Французского математического общества». В диссертации Боль одним из первых систематически применил в теории дифференциальных уравнений качественные методы математического анализа, в частности, при доказательстве существования ограниченных решений системы дифференциальных уравнений 1-го порядка. С этой целью он в нескольких параграфах (к сожалению, опущенных во французском переводе) дает первоначальный вариант «принципа неподвижной точки». Боль совершенно отчетливо высказал теорему о невозможности непрерывного отображения n -мерного шара на свою поверхность, но доказал ее только для $n=2$.

Доказательство общего случая Боль дал в статье «О движении механической системы вблизи положения равновесия», помещенной в журнале Крелля за 1904 г. В ней приводится следующее предложение: если в n -мерном вещественном евклидовом пространстве E_n дано непрерывное отображение a куба $K \subset E_n$ с центром O в начале координат, причем $a(x) \neq O$ ($x \in K$), то существует точка $\bar{x}$ на поверхности Π куба K , для которой векторы $O\bar{x}$ и $Oa(\bar{x})$ параллельны и противоположно направлены. Из этого предложения вытекает известная теорема о наличии неподвижной точки при непрерывном отображении f куба в себя: достаточно рассмотреть отображение (в векторной записи) $a(x) = x - f(x)$. Часто эту теорему связывают с именем А. Брауэра, который начал публиковать соответствующий цикл работ лишь в 1909 г. (в двумерном случае она вытекает из некоторых работ Л. Кронекера и А. Пуанкаре). Важным достижением Боля является то, что он уже в 1904 г. опубликовал доказательство несколько более сильной теоремы и систематически применил ее для вывода нетривиальных качественных теорем теории дифференциальных уравнений. В свое время его результаты не обратили на себя должного внимания. Это объясняется, по-видимому, тем, что сами топологические теоремы играют у него лишь подсобную роль, а их доказательства довольно громоздки. В дальнейших исследованиях, выполненных в Риге, Боль получил еще ряд важных результатов, развивающих тематику диссертационных работ. В статье «Об одном дифференциальном уравнении из теории возмущений» (1906 г.) он значительно продвинул теорию квазипериодических функций, доказав для них несколько существенных теорем. Изучая математические задачи, связанные с проблемой о среднем движении в теории вековых возмущений небесной механики, Боль после безуспешных попыток многих астрономов полностью исследовал случай трех планет. В статье «Об одной проблеме, встречающейся в теории вековых возмущений» (1909 г.) он показал, что классическими методами Лапласа — Лагранжа эту проблему решить нельзя. В своих исследованиях Боль использовал открытую им замечательную теорему о равномерном распределении дробных остатков, доказанную несколько позднее (в 1910 г.) независимо от Боля и друг от друга также Г. Вейлем и В. Серпинским. Эта теорема, обобщенная затем Г. Вейлем в 1916 г. на чрезвычайно общие случаи, является одной из первых теорем так

называемого эргодического типа, которые в настоящее время играют весьма существенную роль в математике и теоретической физике. Б. Иенсен в 1938 г. существенно использовал этот метод Боля и Вейля для получения полного решения проблемы о среднем движении.

В своих последних статьях «О дифференциальных неравенствах» (1913 г.) и «О дифференциальном уравнении первого порядка, периодическом относительно независимой и зависимой переменных» (1916 г.), изданных на немецком языке, Боль исследовал многообразия решений дифференциальных уравнений. Первая относится к проблеме устойчивости и тесно связана с исследованиями Ляпунова. Ее использовали А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин для установления важного понятия «грубых систем». Во второй статье Боль развивает одну из идей Пуанкаре в изучении многообразия кривых на поверхности тора. В ней дается теорема, известная в настоящее время как теорема Боля в теории дифференциальных уравнений на торе в эргодическом случае.

Когда началась первая мировая война, Рижский политехнический институт был эвакуирован в Москву, а оттуда в Иваново. В Москву уехал и Боль. В 1919 г. после провозглашения Советской власти в Латвии Боль вернулся в Ригу и приступил к работе в организованном тогда Латвийском университете. Но его здоровье ухудшилось и 25 декабря 1921 г. Пирс Боль скончался. Труды Боля, вошедшие в золотой фонд мировой науки, по своей прикладной направленности и стилю близки к работам представителей петербургской математической школы. Заложенные в них глубокие идеи позволяют отнести Боля к числу выдающихся математиков начала XX в.

3

Математика в Томском технологическом институте

Начало деятельности ученых математиков в Сибири и начало высшего математического образования связано здесь с открытием Томского технологического института в 1900 г. При учреждении сибирского университета в Томске предполагалось создание в нем физико-математического факультета. Однако в 1888 г. Томский университет был открыт в составе одного медицинского факультета. В 1898 г. появился второй факультет — юридический, а открытие физико-математического факультета, несмотря на ходатайства совета университета и сибирской общественности, под различными предлогами царским правительством не было разрешено.

Преподавателями Томского технологического института стали видные ученые различных специальностей — геолог В. А. Обручев, химики Д. П. Турбаба и Н. М. Кижнер, инженер-механик И. И. Бобраков, математик, воспитанник Казанского университета — В. Л. Некрасов, утвержденный в 1901 г. и. о. экстраординарного профессора.

Для руководства кафедрой математики из Дерптского университета в начале 1901 г. был приглашен Ф. Э. Молин, назначенный ординарным профессором.

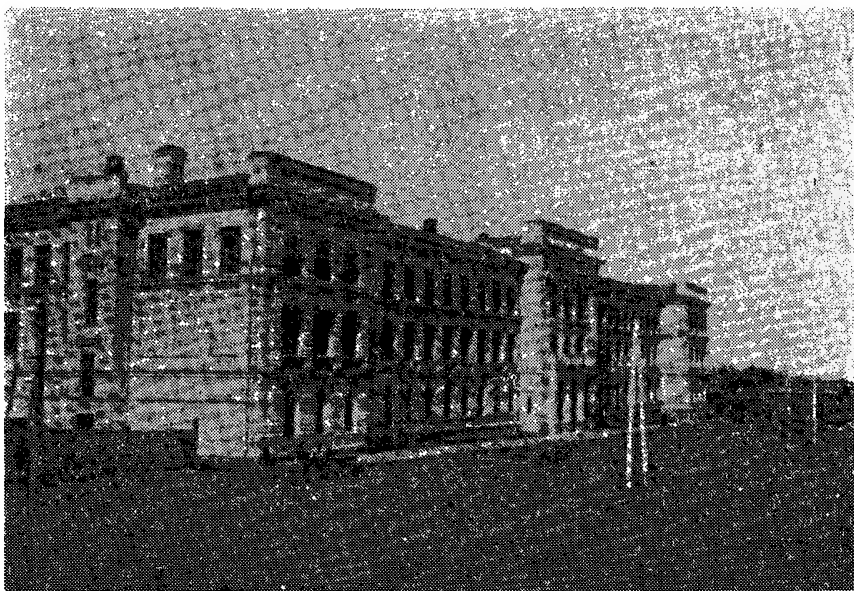
По прибытии в Томск Молин занялся прежде всего организацией преподавания математики в институте. Он был сторонником фундаментальной математической подготовки инженеров. Этим он руководствовался при разработке программ, курсов лекций, сборников задач для студентов различных факультетов. Высокая квалификация выпускников Томского технологического института в значительной степени определялась их серьезной математической подготовкой. Увлеченный разносторонней педагогической деятельностью, Молин в этот период научной работой не занимался. Ежегодно выходили его литографированные курсы лекций и сборники задач, требовавшие от автора постоянной работы по их совершенствованию. В 1910 г. было отмечено 25-летие работы Молина в высшей школе, а в 1911 г. его, известного своей оппозиционностью к царскому правительству и солидарностью с революционно настроенными студентами, под предлогом выслуги лет уволили в отставку.

Оказавшись вне института, Молин организовал частным образом первый в Сибири научный семинар по математике, участниками которого были преподаватели и научные работники. Молин принимал участие в работе 2-го Всероссийского съезда преподавателей математики. Весной 1914 г. он читал курс лекций по арифметике и алгебре на курсах учителей в Уфе. В конце 1914 г. Молин стал профессором Сибирских высших женских курсов в Томске, где в течение нескольких лет читал дифференциальное и интегральное исчисления.

После февральской революции в 1917 г. Ф. Э. Молин возвращается в Томский технологический институт. В это время (1 июля 1917 г.) в Томском университете был открыт физико-математический факультет, о создании которого Молин давно мечтал и заботился. Создавая математическую библиотеку в Томском технологическом институте и проводя научный семинар по математике, он имел в виду потребности будущего физико-математического факультета университета. В 1918 г. Молин стал профессором Томского университета, где проработал до последних дней своей жизни.

Владимир Леонидович Некрасов (1864—1922) окончил в 1887 г. Казанский университет со степенью кандидата и до приезда в Томск имел несколько печатных работ по математике, в том числе заметку «О второй вариации» и сообщение «К теории функций действительной переменной», сделанное им на X съезде естествоиспытателей и врачей в 1898 г. Во время заграничной командировки, в которую он выехал вскоре после приезда в Томск, Некрасов познакомился с новейшими работами по теории множеств и теории функций действительного переменного. В 1907 г. он опубликовал монографию «Строение и мера линейных точечных областей», которая была первой на русском языке книгой по теории множеств.

Монография состоит из четырех глав. В первой главе дан достаточно полный исторический очерк развития теории множеств до 1904 г.



Томский технологический институт.

Во второй главе, содержащей в основном результаты собственных исследований автора, изучены типы размещения линейных точечных множеств. В третьей главе дан обзор работ по строению множеств и теории меры, появившихся в 1904—1907 гг. Этот дополнительный обзор потребовался из-за задержки печатания книги. Четвертая глава содержит систематическое изложение теории меры линейных множеств по Лебегу и Юнгу. В конце книги помещена обширная библиография. Монография была представлена Некрасовым в качестве магистерской диссертации, защита которой состоялась 4 октября 1908 г. в Московском университете.

В статье «Адхеренции и кохеренции линейной точечной области», опубликованной в «Известиях Томского технологического института» в 1908 г., Некрасов применяет понятие о типах размещения и изучению производных множеств.

Некрасов читал курс аналитической геометрии, который неоднократно издавался и в течение двух десятилетий служил основным пособием для томских студентов. В связи с совершенствованием этого курса появились работы Некрасова по теории определителей и теории кривых второго порядка. В Томске были изданы еще две книги Некрасова по сферической геометрии и тригонометрии: «Построение треугольников на сфере» (1911 г.), в которой рассматриваются задачи на построения на сфере при помощи только сферического циркуля, и «Основания сферической тригонометрии» (1912 г.).

С 1905 г. по 1916 г. профессором на кафедре механики в Томском технологическом институте работал Владимир Петрович Алексеевский, который с 1907 г. по 1911 г. был директором института. Алексеевский приехал в Томск из Харькова, где он окончил университет, защитил магистерскую диссертацию, работал приват-доцентом, а в 1904 г. был

утвержден и. о. экстраординарного профессора математики. Его научные работы связаны с вопросами интегрирования дифференциальных уравнений. В Томске Алексеевский вел лишь педагогическую работу.

Преподавателями математики в Томском технологическом институте начинали свою деятельность В. И. Шумилов (1877—1955), окончивший Петербургский университет, и В. П. Зылев (1883—1952), выпускник Казанского университета. Оба они впоследствии были профессорами московских высших учебных заведений. В Томске В. П. Зылев опубликовал научные заметки, в которых изучались свойства матриц и определителей. Занятия по математике и механике в институте вел также М. Н. Иванов, написавший работу по теории малых колебаний механических систем.

В 1910 г. в Томске были открыты Сибирские высшие женские курсы с математическим отделением, где курсы по математике читали преподаватели Томского технологического института.

Профессора и преподаватели института — Ф. Э. Молин, В. Л. Некрасов, В. П. Зылев, В. И. Шумилов, М. Н. Иванов и другие — работали также на математических кафедрах университета. Некоторое время ординарным профессором на кафедре чистой математики был М. Ф. Субботин, впоследствии известный советский астроном. Наряду с организацией преподавания математики в университете начали работать научные семинары и проводиться исследования по вопросам алгебры, геометрии и математического анализа.

4

Математика в Ростовском университете, Варшавском, Донском и Рижском политехнических институтах

Во время первой мировой войны в Ростов был переведен Варшавский университет. Естественно, что деятельность части профессоров и доцентов Ростовского университета до его организации была длительное время связана с деятельностью Варшавского университета.

В конце XIX — начале XX в. математика в Варшавском университете с приходом Г. Ф. Вороного, В. А. Анисимова, Н. Н. Зинина и других математиков начинает бурно развиваться. К существовавшим ранее направлениям математики — теории определенных интегралов и методов интегрирования дифференциальных уравнений — прибавляются новые направления, в частности, теория чисел и теория квадратичных форм, развитых здесь главным образом в трудах Г. Ф. Вороного.

Варшавский политехнический институт был открыт в 1898 г. в составе трех отделений: механического, инженерно-строительного и химического. В 1904 г. было открыто горное отделение. Преподавание математики велось на высоком научном уровне благодаря лекциям профессоров В. А. Анисимова, Г. Ф. Вороного и практическим занятиям Д. Д. Мордухай-Болтовского и Э. В. Эренфейхта.

С самого начала курс высшей математики был составлен по двум программам: для механического и инженерно-строительного факультетов и более сокращенно для химического. На первом курсе механического и инженерно-строительного отделений читались: аналитическая геометрия, алгебраический анализ, дифференциальное и интегральное исчисления по 6 часов лекций и 2 часа практических занятий в неделю.

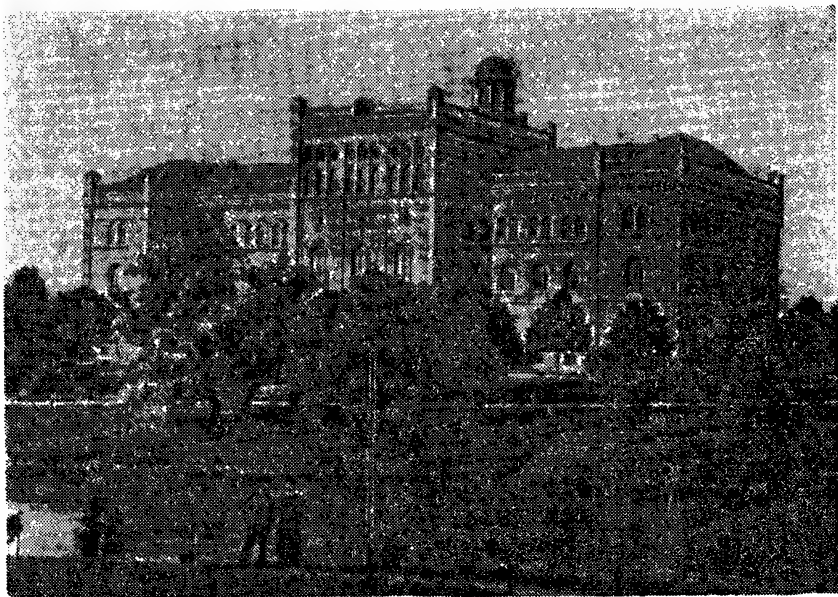
На втором курсе на лекции по тем же дисциплинам отводилось 4 часа и на практические — 1 час в неделю. На химическом и горном факультетах на математику давалось несколько меньше часов. Кроме общего курса читались и дополнительные, а именно — проективная геометрия (И. Р. Брайцев), теория вероятностей (Э. В. Эренфейхт). Эти же предметы читал и Д. Д. Мордухай-Болтовской.

Большое внимание преподаватели математики уделяли методической работе. Так уже в первые годы работы института Г. Ф. Вороной и В. А. Анисимов выпустили литографированные курсы по читаемым ими предметам. Мордухай-Болтовский составил задачки по дифференциальному и интегральному исчислениям и по общему курсу математики. Вопросы методики и общие вопросы технического образования обсуждались на совете института.

Донской политехнический институт был открыт в Новочеркасске в 1907 г. в составе механического, инженерно-мелиоративного, горного и химического отделений.

Математика здесь преподавалась примерно в таком же объеме и по таким же программам, как и в Варшавском политехническом институте. Из необязательных предметов читались проективная геометрия и теория вероятностей. В первый год работы института математику преподавали Г. Ф. Вороной и Д. Д. Мордухай-Болтовской, несколько позже — воспитанник Киевского университета И. И. Панфилов, магистр М. Ф. Зимин, со временем ставший доцентом, М. Н. Жокос, Г. А. Ряго, М. Ф. Субботин.

Рижский политехнический институт в 1881 г. был передан из ведения Министерства финансов в ведение Министерства народного просвещения. В 1895—1896 гг. лекции в институте стали читаться на русском языке, обновился преподавательский состав и была создана кафедра математики и начертательной геометрии. На инженерном и механическом отделениях на первом курсе (с 1902 г.) на математику отводилось 6 часов в неделю (из них 2 часа аналитической геометрии), на втором — 4 часа; на химическом и строительном отделениях математика проходила только на первом курсе и при меньшем количестве часов. При этом было выработано и два варианта программ: в большем объеме — для инженерного и механического факультетов и в меньшем — для химического и строительного. В программу инженерного отделения входило изучение аналитической геометрии на плоскости и в пространстве, элементы дифференциальной геометрии, дифференциальное и интегральное исчисления, теория рядов — весьма сокращенно, определители и их применение для решения уравнений, теория обыкновенных дифференциальных уравнений и начала вариационного



Рижский политехнический институт.

исчисления. Не было в программе векторной алгебры, рядов Фурье, а также применения интегрального исчисления к механике и физике. Этот пробел частично восполнялся в курсах специальных дисциплин. Курсы по математике в Рижском политехническом институте читали: выдающийся математик П. Г. Боль, который способствовал улучшению преподавания математики, Р. Г. Генник, Г. Э. фон Вестерман, Ф. Ф. Рудский, А. Р. Медер, ассистент К. М. Цумпфт и др.

Рассмотрим научную и педагогическую деятельность наиболее видных ученых университета и институтов.

Василий Афанасьевич Анисимов (1860—1907) родился в Смоленской губернии в семье крепостного. После окончания гимназии Анисимов поступил на физико-математическое отделение Московского университета, где в 1889 г. успешно защитил магистерскую диссертацию «Основания теории линейных дифференциальных уравнений». После защиты был направлен в Варшавский университет, где и проработал до конца своей жизни (17 лет). С 1896 г. он также преподавал (по совместительству) в Варшавском политехническом институте; долгое время был деканом факультета и членом правления института. В 1892 г. Анисимов защитил докторскую диссертацию «Предельный круг Фукса» и получил звание ординарного профессора.

Работая в Варшавском университете, Анисимов опубликовал около 30 научных работ, издал ряд учебных пособий по алгебре действительных многочленов, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, вариационному исчислению и др., которые сыграли определенную роль в воспитании молодых математиков. Свои работы он печатал в «Варшавских университетских известиях», «Математическом сборнике» и некоторых зарубежных изданиях. Основным предметом изу-

чения Анисимов избрал аналитическое продолжение. Для решения этой задачи в математической практике более 20 лет применялся единственно известный метод Фукса — метод нахождения аналитического продолжения функции с помощью так называемого предельного круга. В 1873 г. Фукс рассмотрел предельный круг для рациональной функции $F(z) = \frac{f(z)}{zg(z)}$, где $f(z)$ и $g(z)$ — целые функции, не обращающиеся в нуль при $z = 0$. Он предполагал, что радиус R предельного круга для этой функции равен наименьшему из модулей корней уравнения $F'(z) = 0$. Анисимов показал ошибочность метода Фукса. В 1891 г. он опубликовал статью «Замечания о предельном круге Фукса», а через год — защитил докторскую диссертацию на эту тему, а также получил интересные результаты в большой работе «Уравнение Рикати общего вида».

Анисимов уделял серьезное внимание вопросу интегрирования дифференциальных уравнений. Он рассматривал уравнения 1-го и 2-го порядков и системы дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. В частности, Анисимов рассмотрел уравнение

$$y' = f(x, y) = f(x + 1, y)$$

и нашел, что общий интеграл имеет форму

$$y = F[Ax + \alpha, P(x)],$$

где $P(x + 1) = P(x)$ — периодическая функция; A — определенная константа, которая может быть равна нулю.

Николай Николаевич Зинин (1854—1910) родился в семье известного русского химика. После окончания физико-математического факультета он был оставлен для подготовки к профессорскому званию при Петербургском университете. В 1880 г. по рекомендации П. Л. Чебышева и А. Н. Коркина его направили в Варшавский университет на должность и. о. доцента, где он стал активным помощником Н. Я. Сонина в учебной работе. Он читал почти все основные курсы: начертательную геометрию, теорию чисел, высшую алгебру, эллиптические функции, вариационное исчисление.

В 1885 г. Зинин защитил в Петербурге магистерскую диссертацию «Функция-гамма и функция-омега» и был назначен экстраординарным профессором. После защиты в 1893 г. докторской диссертации — «Различные приемы приведения кратких интегралов и главнейшие приложения этих приемов», опубликованной в «Варшавских университетских известиях» за 1891—1892 гг., он стал ординарным профессором. Зинин обладал большими организаторскими способностями: ему было поручено вместе с другими передовыми профессорами (Г. Ф. Вороным, Д. Д. Мордухай-Болтовским и др.) организовать Донской политехнический институт в Новочеркасске. В 1907 г. он был назначен первым директором этого института.

Среди математических научных исследований Ростовского университета видное место занимают исследования Д. Д. Мордухай-Болтовского, В. И. Романовского и В. П. Вельмина.

Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовской (1876—1952) в 1898 г. окончил физико-математический факультет Петербургского университета и был оставлен при университете для подготовки к профессорскому званию. В этом же году его направили в Варшавский политехнический институт в распоряжение Г. Ф. Вороного на должность ассистента. В 1899—1900 г. он опубликовал «Задачник по дифференциальному и интегральному исчислению», который в переработанном виде был включен в сборник «Элементарные упражнения по дифференциальному и интегральному исчислению», изданный в Варшаве в 1904 г. на русском и на польском языках. Вскоре вышли еще несколько научных статей Мордухай-Болтовского: «Об одном обобщении теоремы Абеля» (1902 г.), «Об инвариантных преобразованиях ультраэллиптических интегралов» (1903 г.), «О некоторых биномиальных интегралах, приводимых к эллиптическим и ультраэллиптическим», «О приведении абелевых интегралов к ультраэллиптическим первого класса» (1903 г.).



Д. Д. Мордухай-Болтовской.

В 1906 г. Мордухай-Болтовской защитил в Петербургском университете магистерскую диссертацию «О приведении абелевых интегралов к низшим трансцендентным»⁸, где дал обобщенный результат Пуанкаре — Пикара, решил проблему Шварца о преобразовании интегралов Абеля, а также вывел условия существования алгебраического решения обобщенного уравнения Эйлера.

В 1907 г. он уехал в Новочеркасск, где принимал участие в создании нового политехнического института. В 1909 г. он возвратился в Варшавский университет и был избран экстраординарным профессором. К этому времени он опубликовал уже 15 научных работ, в том числе «Общие исследования, относящиеся к интегрированию в конечном виде дифференциальных уравнений первого порядка» (1907 г.) и «Об интегрировании в конечном виде линейных дифференциальных уравнений» (1909—1911 гг.). В работе «О гипертрансцендентности функции $\xi(s, x)$ » Мордухай-Болтовскому удалось, по сути дела, решить 22-ю проблему Гильберта, а в исследовании «К теории трансцендентных чисел» он близко подошел к решению 7-й проблемы Гильберта, которая окончательно была решена советским математиком А. О. Гельфондом. Мордухай-Болтовской известен и как историк математики, и как опытный педагог. В Варшавском университете он читал почти все

⁸ Д. Д. Мордухай-Болтовской. О приведении абелевых интегралов к низшим трансцендентным. — Известия Варшавского политехнического института, 1905, вып. 1.

математические курсы. Начиная с 1911 г. он возобновил работу научного семинара.

Всеволод Иванович Романовский (1879—1954), ученик А. П. Коркина и А. А. Маркова, в течение семи лет читал в Варшавском университете интегрирование дифференциальных уравнений, исчисление конечных разностей, теорию вероятностей и др. Первыми его научными работами являются «Обобщение интеграла Фурье», «Заметки о симметрических функциях», «О парадоксе Бертрана». Под влиянием Коркина Романовский написал работу «К теории интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными второго и третьего порядков с двумя независимыми переменными»⁹, которую в 1912 г. защитил как магистерскую диссертацию. Его статья «Интегрирование инволюционных систем первого класса»¹⁰ была первой работой на русском языке, в которой разрабатывались методы интегрирования систем уравнений с частными производными, имеющими общий интеграл, зависящий от произвольной функции одного аргумента и конечного числа произвольных постоянных.

Владимир Петрович Вельмин (род. 1885 г.) после окончания в 1907 г. физико-математического факультета Киевского университета и успешной сдачи магистерских экзаменов в 1909 г. по рекомендации Д. А. Граве был направлен в Варшавский университет на должность доцента. С 1913 г. Вельмин — экстраординарный, а с 1919 г. — ординарный профессор. В университете он читал курс высшей алгебры, теорию чисел, спецкурсы по теории алгебраических полей, проблеме Ферма и др. Основное направление его научных исследований — алгебра и теория чисел. В период деятельности в Варшавском университете он опубликовал около десяти работ, в том числе «К теории вычетов 8 степени в алгебраических областях» (1912 г.), магистерскую диссертацию «О квадратичном законе взаимности в произвольной квадратичной области» (1913 г.), «Некоторые системы диафантовых уравнений» (1916 г.). Он издал также несколько литографированных учебных пособий: «Лекции по высшей алгебре» (1910 г.), «Введение в теорию алгебраических чисел» (1913 г.), которое было по сути первым руководством по теории чисел на русском языке. Вельмин принимал активное участие в работе Варшавского общества естествоиспытателей и врачей. В 1922—1924 г. был ректором Ростовского университета. В 1950 г. переехал в Киев.

Научные исследования И. И. Панфилова относятся к дифференциальной геометрии (теория линейчатых поверхностей и др.) и номографии. М. Ф. Зимин дал обобщение теорем Чебы и Менелая, разложив комплексные числа в произведении вида $\prod_v \left(1 + \frac{1}{c_v}\right)$, рассматривал некоторые вопросы дифференциальной геометрии. Он издал литографи-

⁹ В. И. Романовский. К теории интегрирования дифференциальных уравнений с частными производными второго и третьего порядков с двумя независимыми переменными. — Варшавские университетские известия, 1911, № 9.

¹⁰ В. И. Романовский. Интегрирование инволюционных систем первого класса. — Варшавские университетские известия, 1916, № 3.

рованные курсы по аналитической геометрии, сферической тригонометрии, дифференциальному и интегральному исчислению. М. Ф. Зимин изучал вопрос об определении особых точек эллиптических функций и другие.

5

Творчество Г. Ф. Вороного

Среди отечественных математиков конца XIX — начала XX в. видное место занимает один из крупнейших представителей петербургской математической школы Г. Ф. Вороной. Георгий Феодосьевич Вороной родился 16 (28) апреля 1868 г. в с. Журавке б. Полтавской губернии.

Среднее образование он получил в Бердянской (до 5-го класса) и Прилукской гимназиях. В начале августа 1885 г. Вороной приехал в Петербург и вскоре поступил в Петербургский университет.

В университете он усердно посещал лекции, ознакомился с дополнительной литературой. Уже на четвертом курсе он заинтересовался числами Бернулли и предложил свое доказательство одного из известных их свойств. Несомненно, этот интерес у него возник под влиянием А. А. Маркова. Вороной показал, что если число Бернулли B_k , где k простое число, то числитель его делится на k . Это утверждение, доказательство которого Вороной изложил в своем дневнике, было высказано без доказательства Адамсом. Адамс указал и другую теорему: «Если p — такой простой делитель n , который не входит множителем в знаменатель n -го числа Бернулли, то числитель этого числа делится на p », — доказательство которой он найти, по его словам, не смог. И вот в записи дневника Вороного от 26 декабря 1888 г. читаем: «Вчера я закончил предпринятое мною доказательство теоремы Адамса, который о последней теореме сказал, что он не может ее доказать, но что он не сомневается в ее истинности. Я доказал ее вполне строго, так что раньше намеченное является частным случаем, но мне пришлось прибавить одну лемму...» Дальше Вороной излагает свое доказательство и в ходе его попутно получает и доказательство теоремы Штаудта, но его уже не удовлетворяет полученный результат. В дневнике под этой же датой появляется запись: «Ночью обдумал еще раз написанное выше и убедился, что ... вообще можно высказать такую теорему

$$(-1)^{k-1} p P_k = Q_k S_{2k}(p) \pmod{p^2},$$

P_k и Q_k — числители и знаменатели чисел Бернулли, $S_{2k}(p) = 1^{2k} + 2^{2k} + \dots + p^{2k}$ ¹¹.

К окончанию университета Вороной был во многом уже сформировавшимся ученым: он выработал в себе упорство и систематичность

¹¹ Эта теорема доказана в работе Вороного «О числах Бернулли». — В кн.: Г. Ф. Вороной. Собр. соч. в трех томах. Т. 1. Изд-во АН УССР, К., 1951, стр. 16—17.

в исследовательской работе, приобрел уверенность в своих силах в сочетании с высокой требовательностью к себе; выработал методику исследований, которой в значительной мере оставался верен и впоследствии; наконец, определил ту область математики, где сосредоточились его научные интересы.

В студенческие годы сложились и его взгляды на явления общественной жизни. Он оставался верен общему демократическому умонастроению своей молодости, что проявлялось в его дальнейшей деятельности. Блестяще сдав выпускные экзамены осенью 1889 г., он представил в качестве кандидатской работы свое исследование о числах Бернулли.

После окончания университета Вороной начал работать штатным преподавателем петергофской прогимназии.

Примерно с 1891—1892 гг. вплоть до окончания докторской диссертации (1895—1896 гг.) Вороной интересуется теорией алгебраических чисел, а именно — теорией иррациональностей третьей степени. Теория алгебраических чисел восходит к Эйлеру и Гауссу. Следующей вехой явились работы Куммера и Дирихле. Куммер создал на основе введенного им понятия идеальных чисел теорию делимости для полей деления круга. Дирихле для алгебраических полей $K(\zeta)$ (где ζ — корень неприводимого уравнения с целыми рациональными коэффициентами степени $n > 1$, установил существование бесчисленного множества единиц поля, отличных от $\sqrt[n]{1}$, и конечного числа таких «основных» единиц, произведением степеней которых выражаются остальные единицы (с точностью до множителя, являющегося произведением «тривиальных» или «особенных» единиц — корней n -ой степени из 1). Затем Е. И. Золотарев и Дедекинды создали общую теорию делимости для произвольного поля $K(\zeta)$. Именно замечательные работы Золотарева способствовали тому, что алгебраической теорией чисел заинтересовались представители Петербургской математической школы, в том числе и Вороной.

Рассмотрим основные исследования Вороного по теории кубического поля, изложенные в его магистерской и докторской диссертациях¹². Основной целью его исследований по теории иррациональностей третьей степени с самого начала было отыскание такого обобщения непрерывных дробей, которое позволило бы алгоритмически решать все основные проблемы теории. Он предварительно подверг тщательному анализу вопрос о базисе (в современной терминологии) кубического поля и выработал удобные вычислительные способы для определения разложения как простых рациональных чисел, так и целых чисел кубического поля на простые идеальные множители, и всех целых чисел кубического поля, делящихся на данное идеальное число. Эти результаты составили достаточно обширную магистерскую диссертацию Вороного, напеча-

¹² Г. Ф. Вороной. О целых алгебраических числах, зависящих от корня, уравнения 3-й степени. — В кн.: Собр. соч. в трех томах. Т. I, Изд-во АН УССР, К., 1951, стр. 25—195; Об одном обобщении алгоритма непрерывных дробей. — Там же, стр. 197—391.

танную и успешно защищенную им в 1894 г. Оппонентами были А. А. Марков и Ю. В. Сохоцкий.

Летом 1894 г. Вороной переехал из Петергофа в Варшаву, где с осени начинает свою профессорскую деятельность в университете. Новые обязанности, подготовка к курсам, которые он читал впервые, вероятно, оставляли ему на первых порах немного времени для собственных изысканий. Между тем предисловие Вороного к докторской диссертации помечено 24 мая 1896 г.

Так или иначе, эти исследования к 1896 г., несомненно, были закончены. Летом 1896 г. монография «Об одном обобщении алгорифма непрерывных дробей», объемом в 200 страниц, по решению Варшавского университета была напечатана. По сложности разрешенной проблемы и глубине примененных методов она явилась одним из самых блестящих достижений отечественной математики: увенчала успехом изыскания примерно столетней продолжительности. Советскими математиками исследования Вороного по алгебраическим числам, можно сказать, переведены на свойственный вопросу геометрический язык¹³.

Вороной представил эту монографию в Петербургский университет в качестве докторской диссертации. Официальными оппонентами снова были А. А. Марков и Ю. В. Сохоцкий, которые дали весьма интересный подробный отзыв о работе. Отзыв написан рукой А. А. Маркова, затем следует приписка: «С вышеизложенным отзывом профессора А. А. Маркова вполне согласен. Ю. Сохоцкий». Приведем отрывки из этого отзыва¹⁴.

«Диссертация г. Вороного посвящена, как показывает ее заглавие, вопросу об обобщении непрерывных дробей.

...Руководящей идеей для г. Вороного служит установленное им понятие об относительных *minima* ковариантных форм¹⁵. Намек на это понятие можно найти, как указывает г. Вороной, в магистерской диссертации Золотарева. Но в диссертации Золотарева понятие об относительных *minima* затухает введением квадратичных форм с изменяющимися параметрами; между тем как г. Вороной в своих исследованиях выдвинул это понятие на первое место и осветил надлежащим образом».

Перечислив рассмотренные Вороным три рода систем ковариантных форм: 1) две вещественные формы с двумя переменными — квадратичное поле; 2) две формы с тремя переменными, одна из них с мнимыми коэффициентами — кубическое поле с отрицательным дискриминантом; 3) три вещественные формы с тремя переменными — кубиче-

¹³ Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеев. Теория иррациональностей 3-ей степени. — Труды Института им. В. М. Стеклова, 1940, т. 11, стр. 1—340; Б. Н. Делоне. Петербургская школа теории чисел. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1947, стр. 141—193.

¹⁴ Ленинградский областной исторический архив, фонд 14, дело 1080 («Дело о допущении магистра Вороного к защите диссертации на степень доктора чистой математики»), л. 9—13.

¹⁵ Относительные минимумы ковариантных форм в переводе на геометрический язык — это относительные минимумы решетки, соответствующей рассматриваемой системе форм.

ское поле с положительным дискриминантом, — Марков продолжает: «Установив для каждого из трех случаев понятие об относительных *minima*, г. Вороной рассматривает совокупность этих *minima* и вводит понятие о ее смежных системах, которое позволяет в первом и втором случае расположить все относительные *minima* в один ряд последовательных *minima*. В третьем же случае все относительные *minima* нельзя уже расположить в один ряд последовательных *minima* и приходится рассматривать несколько таких рядов.

Кроме последовательностей относительных *minima*, важную роль в суждениях г. Вороного играют еще следующие понятия: эквивалентность ковариантных форм, приведенные системы и системы нормального вида.

Понятие об эквивалентности ковариантных форм можно считать давно установившимся в науке. Что же касается приведенных систем и систем нормального вида, то введение их принадлежит г. Вороному, который вместе с тем выяснил таким образом, что всякую систему ковариантных форм, принадлежащую одному из указанных трех видов, можно преобразовать в нормальную приведенную систему. Возможность такого преобразования представляет один из важных результатов, находящихся в разбираемой нами диссертации. Из этого преобразования вытекают алгоритмы автора, служащие обобщением непрерывных дробей».

В заключение А. А. Марков указывает:

«Свои алгоритмы г. Вороной применяет к целым алгебраическим числам, зависящим от корня обыкновенного уравнения 3-й степени с отрицательным дискриминантом во второй главе и с положительным — в третьей. Для таких чисел замечательные предложения г. Вороного о точном низшем пределе значений определителя, составленного из коэффициентов нормальной приведенной системы ковариантных форм, дают ему возможность обнаружить периодичность своих алгоритмов. Отсюда вытекает теоретическая возможность пользоваться алгоритмами г. Вороного для разыскания основных комплексных единиц и для решения других вопросов, относящихся к целым алгебраическим числам, зависящим от корня кубического уравнения.

Приведенные же автором примеры выясняют, каким образом эта возможность осуществляется на практике.

Наибольшие трудности и соответственно этому наибольший интерес представляют исследования третьей главы, где приходится иметь дело с двумя основными единицами. Автор преодолел все эти трудности и дал способ, несомненно ведущий к определению двух основных единиц».

Защита докторской диссертации Вороного состоялась 6 апреля 1897 г. и прошла блестяще. Еще ранее, 29 декабря 1896 г., Академия наук присудила Вороному за исследования, изложенные в обеих диссертациях, премию имени акад. В. Я. Буныковского. Имя Вороного становится широко известным в научных кругах.

Во всем дальнейшем научном творчестве Вороного начиная с 1896 г.



Г. Ф. Вороной (90-е годы).

можно указать только три работы, связанные с теорией алгебраических чисел. В сообщении, сделанном на X съезде русских естествоиспытателей и врачей в 1898 г. в Киеве — «О числе корней сравнения 3-й степени при простом модуле» кроме доказанных им положений Вороной без доказательства высказал глубокую теорему, которая (в равносильной формулировке) утверждает, что все простые числа, представимые одной и той же двойничной целочисленной квадратичной формой определителя D , одинаково разлагаются на простые идеалы в кубическом поле дискриминанта D . Эту теорему доказал лишь в 1930 г. Гассе, используя новые результаты теории алгебраических чисел. Основным результатом второй из упомянутых работ — доклада на Международном съезде математиков в 1904 г. в Гейдельберге «Об одном свойстве дискриминанта целых функций» — явилась такая теорема: для целой рациональной функции степени n с целыми коэффициентами и дискриминантом D , отличным от нуля, число v неприводимых по простому модулю p множителей удовлетворяет уравнению $\left(\frac{D}{p}\right) = (-1)^{n-v}$, где $\left(\frac{D}{p}\right)$ — символ Лежандра. Вороной показывает ряд применений этой

теоремы, но, как выяснилось позже, в основном результате он имел предшественника. Наконец, рукопись Вороного «Заметки по поводу последней теоремы Ферма...» является предсмертной работой ее автора. Значение оригинальной идеи, положенной в основу этих незаконченных и небезошибочных, но глубоких исследований, разъяснено в комментариях И. Р. Шафаревича, помещенных в третьем томе «Собрания сочинений Г. Ф. Вороного» (1953 г.)

В варшавский период научной деятельности (1894—1908 гг.) Вороной дал глубокие исследования в двух областях: в арифметической теории квадратичных форм и аналитической теории чисел. Остановимся последовательно на каждом из этих двух направлений творчества Вороного, используя сведения, полученные при изучении его рукописного фонда.

Арифметическая теория квадратичных форм рассматривает формы в предположении, что независимые переменные принимают только целые значения. Ее первой оформившейся главой стала теория двойных квадратичных форм, определенных и неопределенных (Гаусс). Затем в XIX в. успешно разрабатывалась теория тройных, отчасти и четвертных форм, но в обобщении полученных результатов на квадратичные формы с произвольным числом переменных встретились огромные трудности. Именно этой общей арифметической теории квадратичных форм посвящены исследования Вороного. Он получил фундаментальные результаты и создал новые и глубокие геометрические методы исследования. Это сделало его, вместе с Минковским, создателем геометрии чисел.

По-видимому, в общей теории квадратичных форм раньше всего внимание Вороного привлекла проблема приведения положительных форм. Как известно, формы, преобразуемые одна в другую с помощью линейного преобразования с целочисленными коэффициентами определителя, равного единице, рассматриваются как эквивалентные. Так, множество форм разбивается на классы эквивалентных форм. По аналогии с приведением двойных и тройных квадратичных форм проблема приведения положительных форм состоит в выделении из классов эквивалентных форм представителей классов — форм, коэффициенты которых удовлетворяют некоторым линейным неравенствам. В уже обычной теперь геометрической интерпретации это означает определение в многомерном пространстве (пространстве коэффициентов), точками которого изображаются формы, некоторой связной области.

Из анализа рукописей Вороного видно, что выводы, касающиеся проблемы приведения, были для него не дополнительным результатом, а занимали центральное место в его исследованиях. Он явно выделяет ее во введениях к обоим своим опубликованным при жизни исследованиям по квадратичным формам.

Готовить к печати свои исследования по положительным квадратичным формам Вороной начал в 1901 г. Рукопись под заглавием, которое отличается от общего заглавия его опубликованных мемуаров только словом «положительных», — «Новые приложения непрерывных

параметров к общей теории положительных квадратичных форм»¹⁶, несомненно, является той работой, о которой идет речь в письме к В. А. Стеклову от 8 февраля 1902 г. Вороной сообщает Стеклову содержание почти законченных первых трех глав, дающих геометрический аппарат исследования, и заключительной четвертой главы, которая должна посвящаться в основном проблеме приведения. Следующая рукопись фонда (Арх. № Б 14/63), дающая более полную редакцию задуманной работы и помеченная декабрем 1903 г., и в заглавии отражает основную цель исследования: «Новый метод приведения положительных квадратичных форм». Так же или почти так же озаглавлены и некоторые другие, более ранние, рукописи — № Б 7/38, Б 11/32, Б 12/65. Это достаточно характеризует целевую установку работ.

Результаты, полученные в решении проблемы приведения, не удовлетворили Вороного. Уже закончив и отослав в печать свой второй мемуар о формах («Исследования о примитивных параллелоэдрах»), он 19 августа 1907 г. пишет в небольшой рукописи (Арх. № Б 30/28), озаглавленной «Заметки к сочинению «Общая теория приведения положительных квадратичных форм»:

«Я давно мечтаю о том, чтобы найти решение следующей задачи в теории положительных квадратичных форм:

Разделить совокупность положительных квадратичных форм с n переменным на эквивалентные области, определенные линейными неравенствами так, чтобы формы, находящиеся внутри какой-нибудь области, не были эквивалентны и чтобы совокупность областей заполняла бы равномерно совокупность всех положительных форм.

Мне известно одно решение этой задачи, но я не могу охватить общего решения».

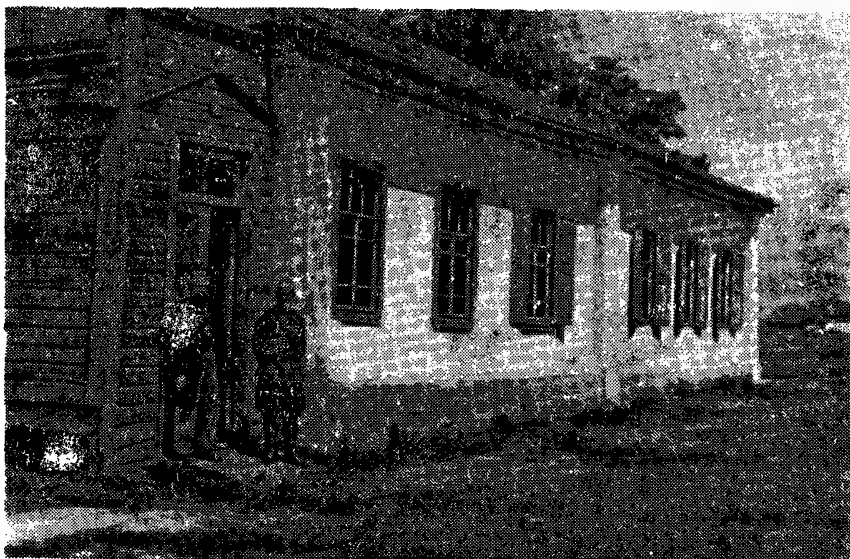
Однако те геометрические средства, которые Вороной создавал и использовал в связи с проблемой приведения, оказались, пожалуй, более важными для науки, чем достижение поставленной цели, и позволили ему получить новые результаты, исключительные по своему значению.

Вороной начинает создавать геометрию положительных квадратичных форм в первой рукописи, посвященной их общей теории. Это рукопись «Заметки о положительных квадратичных формах»¹⁷, датированная 12 марта 1895 г. В ней Вороной сопоставляет каждой положительной квадратичной форме некоторую связную область (позже он уточняет терминологию и говорит о многограннике, соответствующем форме), исследует границы этой области различных порядков, устанавливает, что она имеет конечное число границ всех возможных порядков и т. д.

Дальнейший этап в разработке этих представлений отражен в рукописи, начатой 2 апреля 1900 г. — «Свойства многогранника, соответ-

¹⁶ Арх. № Б 13/60 — здесь и далее ссылки на «Рукописный фонд Г. Ф. Вороного», хранящийся в Государственной публичной библиотеке АН УССР в Киеве. В кн.: Г. Ф. Вороной, Собр. соч. Т. 3. Изд-во АН УССР, К., 1953, стр. 254.

¹⁷ Арх. № Б 6/40.



Дом, где родился Г. Ф. Вороной.

ствующего положительной квадратичной форме»¹⁸. В ходе исследований Вороной выяснил, что построенные им области в пространстве n измерений, к которым он пришел, обобщая представления, возникшие в связи с проблемой приведения двойничных форм («шестиугольник Дирихле»), могут однозначно заполнять все пространство. Его увлекает теперь чисто геометрическая сторона — определение выпуклых многогранников, обладающих группой переносов, с помощью которых они однозначно заполняют многомерное пространство — так называемых параллелоэдров.

В этой области Вороной оказался продолжателем исследований замечательного кристаллографа, одного из крупнейших русских ученых, Е. С. Федорова. Его исследования имеют прямую связь с вопросами кристаллографии.

В своих многолетних работах о параллелоэдрах Вороной проявил огромный геометрический талант. Он писал в своем научном дневнике, что некоторые его идеи возникли при изучении модели параллелоэдра в трехмерном пространстве. Но нужна была, конечно, поразительная геометрическая проницательность, чтобы по моделям или вообще исходя из наглядных представлений отделить то, что специфично для двух или трех измерений, от того, что поддается обобщению на случай произвольного числа переменных. Вместе с тем надо было суметь удачно ограничить вопрос — так, чтобы получить законченный ответ и не обеднить при этом задачу. Вороному удалось этого достичь переходом от параллелоэдров общего вида к примитивным параллелоэдрам. Определяя примитивные параллелоэдры как сходящиеся по $n + 1$ в каждой вершине при заполнении пространства n измерений, Вороной сумел найти алгоритм, позволяющий для каждого n найти все типы примитив-

¹⁸ Арх. № Б 8/37.

ных параллелоэдров, т. е. решил проблему, которая до сих пор не поддается разрешению, если отбросить требование примитивности. Вместе с тем результат Вороного является основным и для общей проблемы, так как, по его предположению, которое остается весьма вероятным, и в свете позднейших исследований, непримитивные параллелоэдры можно рассматривать как предел примитивных. Неумолимая взыскательность к себе Вороного позволила ему систематически изложить свои исследования по теории параллелоэдров только в последнем из опубликованных им мемуаров.

Как указывает Б. Н. Делоне, в исследованиях теории параллелоэдров Вороной сводит теорию примитивных параллелоэдров к теории областей действия (областей ближайших точек) точек решетки (т. е. параллелепипедальной системы точек).

Мы рассмотрели в первую очередь второй из мемуаров по теории положительных квадратичных форм — «Исследования о примитивных параллелоэдрах», так как в нем изложены методы и результаты, над которыми Вороной работал с 1895 г. Первый же его мемуар — «О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм» — был опубликован несколько раньше, но, как показывают сохранившиеся рукописи, в нем изложены исследования Вороного, выполненные в 1905—1906 гг.

В первом мемуаре Вороному удалось получить глубокий и законченный результат в традиционной для петербургской математической школы проблеме. Известно, что А. Н. Коркин и Е. И. Золотарев выделили среди форм заданного дискриминанта D те, для которых минимум максимален, т. е. так называемые предельные формы. Однако своими методами они смогли исследовать предельные формы (от n переменных) только для $n \leq 5$.

Вороной же с помощью своих геометрических методов и благодаря расширенной постановке вопроса вместо предельных форм Коркина и Золотарева вводит совершенные формы. Совершенными формами он называет формы, определяемые значением своего минимума и всеми его представлениями. Итак, всякая предельная форма есть совершенная, но обратное не верно: для множества совершенных форм предельные образуют правильное подмножество. С помощью замечательной геометрической конструкции Вороной получает алгоритм для определения при заданном числе переменных n конечным числом действий всех совершенных форм. Он выводит также правила для выяснения, является ли данная совершенная форма предельной. Это дает возможность найти для данного n все предельные формы и их минимумы, следовательно, и форму с наибольшим минимумом, что решает вопрос, поставленный еще Эрмитом и имеющий значение для многих задач теории чисел. Добавим, что замечательная конструкция, использованная Вороным в работе о совершенных формах и изложенная в книге Б. Н. Делоне, была применена Б. А. Венковым в общей проблеме приведения положительных квадратичных форм.

В рассмотренных двух работах Вороной, по-видимому, успел изложить если не все, то основное, что было получено им по теории поло-

жительных квадратичных форм. Во всяком случае, в других рукописях по этим вопросам, представляющих большой интерес для изучения развития его идей и характера его творчества, нет существенных дополнений к опубликованным исследованиям. Результаты Вороного по теории неопределенных форм долгое время оставались совершенно неизвестными. Частично они сохранились в пяти рукописях, опубликованных в III томе «Собрания сочинений Г. Ф. Вороного»: «Заметки о неопределенных квадратичных формах», «Заметки к сочинению», «Общая теория приведения квадратичных форм с вещественными коэффициентами», «Заметки о неопределенных квадратичных формах», «О неопределенных квадратичных формах». Рукописи относятся к 1905—1908 гг. Они подробно прокомментированы Б. А. Венковым. Глубину исследовательской мысли Вороного достаточно характеризует то, что эти работы после почти полувекового хранения в архиве сохранили свое научное значение. Но вряд ли в них содержится все, полученное Вороным по теории неопределенных квадратичных форм. Надо иметь в виду, что Вороной начинал записывать свои мысли и результаты много позже, чем это обычно делают исследователи — на том этапе изложения, который можно рассматривать уже как первую редакцию для печати.

Из опубликованных при жизни Вороного работ аналитической теории чисел посвящено два больших мемуара: «Об одной задаче из теории асимптотических функций» (1903 г.) и «Об одной трансцендентной функции и ее приложениях к суммированию некоторых рядов» (1904 г.), а также доклад на Международном математическом съезде в Гейдельберге «О разложении посредством цилиндрических функций двойных сумм

$$\sum_{*} f(pm^2 + 2qmn + rn^2), \text{ где } pm^2 + 2qmn + rn^2 —$$

положительная форма с целыми коэффициентами» (1904 г.). Но и здесь, как при рассмотрении работ по теории форм, только рукописный фонд позволяет полностью оценить объем и значение исследований Вороного по теории чисел.

Наиболее ранними рукописями фонда являются «Заметки о суммировании рядов, зависящих от некоторых прерывных функций» и тетрадь «Различные формулы». Они начаты в апреле 1898 г. задолго до опубликования упомянутых работ Вороного, и записи в первой из них охватывают период 1898—1900 гг.

Исходя из того, что Вороной излагал свои мысли на бумаге далеко не на первом этапе творческого процесса, следует считать, что исследования по суммированию рядов, члены которых представляют собою значения арифметических функций, он проводил еще задолго до 1898 г. Зарождение интереса к этой области можно усмотреть уже в последних записях его дневника, относящихся к 1890 г. По-видимому, после окончания основных исследований по теории алгебраических чисел, т. е. с 1895 г., работы Вороного по теории форм и по аналитической теории чисел систематически перемежаются. Так, например, 2 декабря

1901 г. он отмечает в «Математическом дневнике»¹⁹: «После продолжительных исследований квадратичных форм я снова вернулся к суммированию». В письме к В. А. Стеклову от 8 февраля 1902 г. он пишет, что окончанию статьи по теории форм помешали новые мысли по вопросу об асимптотическом поведении функции

$$\sum_{0 < n \leq x} \frac{(x-n)^k}{k!} \tau(n),$$

где $\tau(n)$ означает число делителей n . Подобные же замечания находим и в записях позднейших лет.

В рукописях по аналитической теории чисел выявляется разносторонность интересов Вороного. Например, наиболее ранняя из них²⁰ содержит интересные тождества для функций $\varepsilon(x_1)$, $\varepsilon(x_1 x_2)$, ..., $\varepsilon(x) = 1$, если $x \geq 1$, и $\varepsilon(x) = 0$, если $x < 1$, и применение их к выводу формулы Дирихле для $\Sigma \tau(n)$, затем следуют записи, посвященные числовой функции $\tau_s(n)$, представляющей сумму s -ых степеней всех делителей числа n . После этого доказывается теорема о функции $\omega(x)$, задаваемой равенством

$$\omega(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{k+1} \varphi_{k+1}}{(m+1-k)!} x^m$$

(A_k — коэффициенты в формуле Эйлера — Маклорена; $\varphi_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'(n)}{n^k}$;

$f(x)$ — произвольная функция), а именно $\omega(x) = \frac{F(n)}{\pm 2n\pi i}$ при $x = 2n\pi i$ (здесь $F(n) = \sum_{i=1}^s f(\delta_i)$, а $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_s$ — все делители n), вводится формула для суммы $\Sigma f(x)$, в которой x принимает все целые значения из промежутка $[a, b]$; остальные записи в рукописи также относятся к формуле Дирихле.

Несмотря на такую внешнюю пестроту как будто отрывочных результатов, нетрудно усмотреть основное направление исследований Вороного. Опираясь на высказывания в отдельных местах рукописей, можно примерно описать развитие рассматриваемых его работ.

В течение ряда лет Вороной изучает функцию

$$\varphi(x) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n > 0}} \tau(n),$$

или, иначе,

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{n \leq x} E \frac{x}{n}.$$

¹⁹ Арх. № Г 3/6, стр. 31.

²⁰ Запись 21 апреля 1898 г.

Асимптотическая формула Дирихле для этой функции

$$\varphi(x) \approx x(\ln x + 2C - 1)$$

давала оценку с точностью до слагаемого порядка $\sqrt{x}$. В частном письме Дирихле утверждал, что ему удалось улучшить эту оценку, но ни результата, ни наметки вывода не сохранилось. Около полувека никто не смог продвинуться в этом вопросе дальше Дирихле. Не приходилось сомневаться в том, что нужно применить какие-то новые средства, чтобы улучшить результат Дирихле, и что это имеет значение для общей задачи асимптотического изучения арифметических функций.

Вороной с помощью таблиц значений функций $\varphi(x)$ убеждается, что разность $\varphi(x) - x(\ln x + 2C - 1)$ более низкого порядка, чем это следует из формулы Дирихле. Более того, несмотря на крайнюю иррегулярность распределения целых чисел $\tau(n)$ в интервале $0 < n \leq \sqrt{x}$, ему удается выявить наличие таких подходящим образом выбранных интервалов, в которых функция $\tau(n)$ представляется достаточно простыми аналитическими выражениями. Вороной исследует общие методы разложения арифметических функций в бесконечные ряды. Он использует формулу суммирования Н. Я. Сони́на — обобщение формулы Эйлера—Маклорена. На этом этапе исследований Вороной приходит к тому понятию интеграла, которое связывается с именем Стильтьеса и к которому он пришел, видимо, совершенно самостоятельно, хотя и позднее Стильтьеса. Так постепенно Вороной вырабатывает достаточно общий метод изучения арифметических функций, родственных функции $\tau(n)$ — числу делителей n , хотя ему все не удается улучшить результат Дирихле.

В начале 1901 г. Вороной приступает к изложению накопившегося материала для печати в работе, первоначально озаглавленной «О разложении некоторых числовых функций в бесконечные ряды, подобные тригонометрическим». Рукопись эта, датированная 14 января 1901 г., сохранилась²¹. Однако, работая над изложением своего общего метода, Вороной убедился, что для исследования построенных им разложений арифметических функций необходимо иметь достаточно точные асимптотические оценки этих функций.

Так Вороной возвращается к исходному пункту своих исследований. Применяя новое средство — так называемые ряды Фарея, он на этот раз добивается успеха. 26 апреля 1901 г. он отмечает в дневнике: «Мне удалось, наконец, разрешить столько лет мучивший меня вопрос о нахождении порядка дополнительного члена в формуле Дирихле

$$\sum_{0 < x < N} \tau(x) = N(\ln N + 2C - 1) + o(N).$$

²¹ Арх. № Г 4/2. О ней см. статью Н. Г. Чудакова в III томе «Собрания сочинений Г. Ф. Вороного». Изд-во АН УССР, 1953.

Я могу доказать, что существует число A , не зависящее от N , удовлетворяющее условию $\vartheta(N) < A \ln N \sqrt[3]{N}$ »²².

Однако Вороной не торопится публиковать этот результат. Прежде всего он возвращается к общим разложениям числовых функций. Ему удается, как он пишет в письме к В. А. Стеклову от 8 февраля 1902 г., получить прекрасные результаты в вопросе о розыскании асимптотического выражения функции

$$\sum_{0 < n < x} \frac{(x-n)^k}{k!} \tau(n),$$

причем он устанавливает порядок дополнительного члена в полученном им асимптотическом выражении. Таким образом, он обладал уже достаточно полными результатами и в применении общего метода.

В январе — марте 1902 г. Вороной подготовил первые редакции обоих мемуаров по аналитической теории чисел, но еще колебался в распределении материала между ними и продолжал улучшать оформление этих работ.

Мы уже говорили о главном результате, полученном Вороным, в исследовании «Об одной задаче из теории аналитических функций». Это исследование сыграло также важную роль в аналитической теории чисел благодаря введению в нее обобщенных рядов Фарея и формулы суммирования Н. Я. Сони́на. Замечательная работа И. М. Виноградова «Новый способ для получения асимптотических выражений арифметических функций»²³, в которой впервые после Вороного были получены существенные результаты, в идейном отношении примыкает к исследованию Вороного.

По богатству мыслей и результатов вторая работа Вороного «Об одной трансцендентной функции и ее приложениях к суммированию некоторых рядов» едва ли не превосходит первую. Вороной формулирует здесь общее утверждение относительно суммы

$$\frac{1}{2} \sum_{n > a}^{n < b} \tau(n) f(n) + \frac{1}{2} \sum_{n > a}^{n < b} \tau(n) f(n),$$

где $f(x)$ — аналитическая²⁴, $\tau(n)$ — арифметическая функция, а именно, что такую сумму можно представить в виде

$$\int_a^b f(x) \vartheta(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \int_a^b f(x) \alpha(nx) dx,$$

где $\vartheta(x)$ и $\alpha(x)$ — две аналитические функции, зависящие только от $\tau(n)$; при этом $f(x)$ должна быть непрерывна в промежутке $a < x < b$

²² Арх. № Г 3/6, стр. 19.

²³ И. М. Виноградов. Новый способ для получения асимптотических выражений арифметических функций. — В кн.: И. М. Виноградов. Избр. труды. Изд-во АН СССР, М., 1952.

²⁴ Слово «аналитическая», Вороной применяет здесь в смысле «определенная для непрерывно изменяющегося аргумента».

и иметь в нем только конечное число максимумов и минимумов. Это утверждение доказывается для случая, когда $\tau(n)$ есть число делителей n , функции $\vartheta(x)$ и $\alpha(x)$ находятся в явном виде, причем $\alpha(x)$ выражается через функции Бесселя. Тем самым было впервые показано применение функций Бесселя в аналитической теории чисел, что дало ей новое мощное средство.

Справедливо оценив значение этого факта, Вороной писал в редакцию журнала, что выведенные им формулы «устанавливают замечательную связь между числовой функцией $\tau(n)$ и цилиндрическими функциями второго рода ... Во всей доступной мне математической литературе я не нахожу никакого указания на этот замечательный факт...»²⁵. Только более чем десятью годами позже Вигерт в работе, помещенной в «Acta Mathematica» за 1914 г., не ссылаясь на Вороного, но во многом примыкая к нему, использовал в теории чисел асимптотику бесселевых функций. Поэтому совершенно не прав Харди, который, видимо, не зная исследований Вороного, писал, что Вигерт был «первым, кто усмотрел важность для аналитической теории чисел рядов, составленных из функций Бесселя...»²⁶. Неудовлетворительно освещает историю вопроса и Ватсон в своем труде по теории бесселевых функций.

Вороной вводит также новое семейство функций — ультраэкспоненциальные функции — и обобщает формулу суммирования Пуассона. Определение порядка остаточного числа в выведенном им асимптотическом выражении для функции

$$\varphi_k(x) = \sum_{n>0}^{n \leq x} \tau(n) \frac{(x-n)^k}{k!},$$

по словам Вороного, было «... исключительно трудное по сложности и объему вычислений исследование...».

Методы и результаты описанных двух работ Вороной применял для решения самых различных вопросов. В математическом дневнике № 4 и незаконченной работе «К теории ультрапоказательной функции» он предвосхитил некоторые методы, развитые в аналитической теории чисел много позже²⁷. В рукописи «Заметки к сочинению об ультраэкспоненциальной функции и ее приложениях к теории целых алгебраических чисел», относящейся к концу 1907 г., он намечает связь между введенной им функцией и теорией целых алгебраических чисел в квадратичном и кубическом полях²⁸.

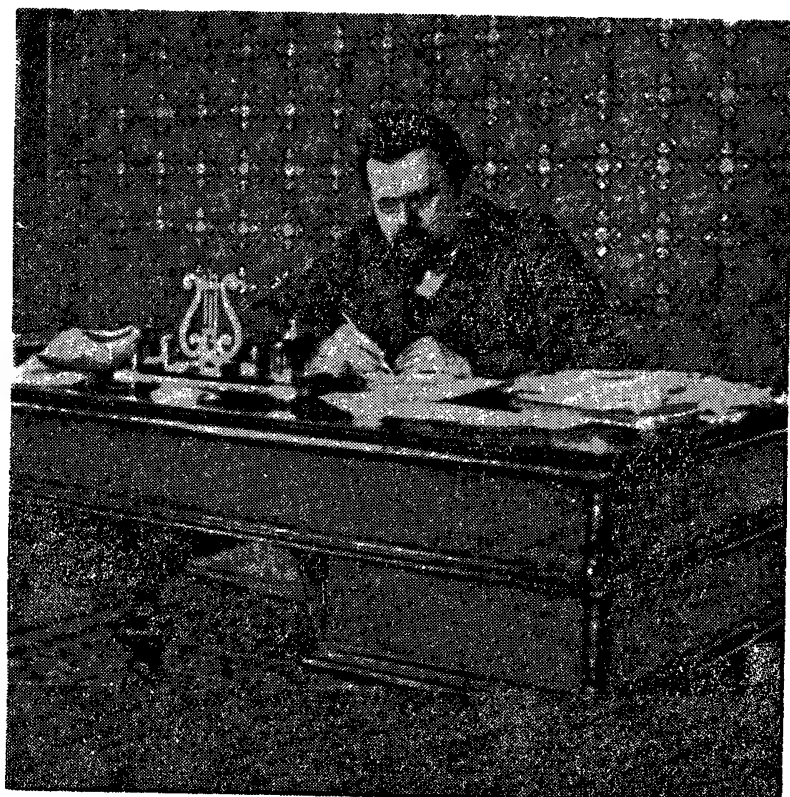
Методы работы «Об одной трансцендентной функции...» Вороной применил в задаче об определении числа целых точек в круге. Эту

²⁵ Цитируем по французскому черновику (Арх. № Г 10).

²⁶ H a r d y. On the expressions of a number as the sum of two squares. — Quarterly Journal of pure and applied mathematics, 1914, T. 46, N 3, p. 264.

²⁷ Н. Г. Ч у д а к о в. О некоторых рукописях Г. Ф. Вороного, относящихся к аналитической теории чисел. — В кн.: Г. Ф. В о р о н о й. Собр. соч. в трех томах. Т. I. Изд-во АН УССР, К., 1953, стр. 211—224.

²⁸ Т а м ж е, стр. 222—224.



Г. Ф. Вороной.

тому он предложил для конкурсных студенческих сочинений и привлек к работе над ней своего слушателя В. Серпинского, впоследствии одного из виднейших польских математиков.

В отзыве Вороного о представленном Серпинским сочинении на тему «О суммировании ряда $\sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} \tau(n) f(n)$ при условии, что $\tau(n)$ представляет число разложений n на сумму квадратов двух целых чисел» содержится ряд высказываний общего характера, которые мы здесь приведем:

«Сумматорная формула Эйлера — Маклорена, обобщенная Н. Я. Со-
ниным, представляет удобное средство для приближенного вычисле-
ния суммы ряда $\sum_{\substack{n \leq b \\ n > a}} f(n)$ в области $a < n < b$ при всевозможных дей-
ствительных значениях параметров a и b .

...Формула Эйлера — Маклорена применяется только к функци-
ям, непрерывным и имеющим производные в области суммирования.

... При вычислении различных кратных сумм является возмож-
ным суммирование свести к последовательному вычислению нескольких
обыкновенных сумм, но эти суммы в множестве случаев бывают состав-
лены из функций прерывных, что лишает возможности применить для
их вычисления сумматорную формулу Эйлера — Маклорена.

Затруднения, отсюда вытекающие, не могут быть устранены с помощью общих приемов, и в каждом данном случае приходится для приближенного вычисления кратной суммы изыскивать специальные приемы»²⁹.

Далее Вороной указывает, что рассматриваемая в сочинении Серпинского задача сводится к исследованию выражения

$$S = \sum \sum_{\substack{h < b \\ h > a}} f(m^2 + n^2) = \sum_{h > a} \tau(k) f(k), \quad (1)$$

где $f(x)$ — непрерывная функция $a < m^2 + n^2 < b$, $\tau(k)$ дает число разложений k на сумму двух квадратов. Он продолжает:

«К полученной сумме формула Эйлера—Маклорена неприменима, так как произведение $\tau(k) f(k)$ имеет определенное значение только при целых положительных значениях переменного k .

... Для приближенного вычисления суммы (S) можно пользоваться двумя приемами:

1) исследовать двойную сумму (S) с помощью последовательного вычисления двух обыкновенных сумм;

2) исследовать свойства числовой функции $\tau(k)$ и воспользоваться ими для преобразования суммы (1).

Автор разбираемого сочинения произвел исследование суммы (S) как с помощью первого, так и второго способа. Для этой цели автор воспользовался общей сумматорной формулой, сообщаемой мною на лекциях ...» Вороной высоко оценил работу Серпинского и представил ее к золотой медали. Она была опубликована в 1907 г. и явилась частным случаем нахождения двойных сумм вида

$$\sum f(pm^2 + 2qmn + rn^2),$$

где $f(m, n)$ — положительно определенная квадратичная форма с целыми коэффициентами.

Общие результаты, полученные Вороным в этом вопросе, были изложены им в докладе на Гейдельбергском конгрессе.

Кроме основного направления исследований Вороного в аналитической теории чисел, его рукописи знакомят нас с несколько иным кругом вопросов, к которым он возвращался в течение ряда лет. В основном эти вопросы связаны с теорией функции ζ Римана. В письме к Стеклову от 26 марта 1902 г. Вороной обсуждает известную гипотезу Римана о нулях функции $\zeta(s)$. В математическом дневнике № 5 за 27 марта 1903 г. Вороной начинает свою запись так: «Я разочаровался в предыдущих исследованиях. В то же время у меня явилась мысль, нельзя ли применить мой метод к исследованию модуля функции $\zeta(s)$ ». Днем позже он пишет: «Пробую исследовать произведение $\zeta(s) \zeta(s-1)$ ». Следующие записи той же рукописи показывают неистощимую аналитическую изобретательность их автора. Из его результатов особенно

²⁹ Цит. по кн.: Г. Ф. Вороной. Собр. соч. в трех томах. Т. 3. Изд-во АН УССР. К., 1953, стр. 296—297.

следует выделить замечательную формулу для функции $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) \ln n \cdot e^{-nx}$, которая появляется в литературе только с 1918 г. в работах Гарди и Литтлвуда и должна по праву носить не их имя, а имя Вороного. Выкладки, относящиеся к функции $\zeta(s)$, переплетаются в рукописях Вороного с исследованиями о простых числах, в которых он пробует применять самые различные методы.

Рукописи «О свойствах функции Римана» и «О суммировании рядов, зависящих от простых чисел» (начаты в конце 1904 г.), видимо, представляли первую попытку оформить накопившийся материал³⁰, для издания. В последние годы своей жизни Вороной уделял внимание преимущественно теории квадратичных форм. Ранняя смерть не позволила ему завершить его замечательные исследования. Доказательством постоянного и живого интереса Вороного к аналитической теории чисел являются его рукописи последнего года жизни: «Заметки о модулярной функции...»³¹ и «Заметки по теории бинарных квадратичных форм»³². В последней содержится важная для теории характеров Дирихле формула, полученная Г. Полия в 1918 г. Конечно, и эта формула отныне должна быть связана с именем Вороного. Истинный объем огромной работы Вороного в области аналитической теории чисел выяснился лишь благодаря его рукописному фонду. Разнообразие и важность новых идей и методов, внесенных Вороным в эту область, позволяют поставить его достижения в ней наряду с обобщением непрерывных дробей на кубическую область и с монументальными исследованиями геометрического характера по теории форм и параллелоэдров. Можно утверждать, что аналитическая сторона в творчестве Вороного не уступала геометрической.

Остановимся еще на педагогической деятельности Вороного, которая началась в Варшавском университете в 1894 г. и продолжалась, с некоторыми перерывами, до последних дней его жизни. Первоначально он был назначен «исправляющим должность доцента» (май 1894 г.), но к чтению лекций в сентябре 1894 г. он приступил уже в качестве экстраординарного профессора. Учебные планы физико-математического факультета Варшавского университета в основном совпадали с учебными планами Петербургского университета, по которым учился Вороной. Однако выполнение этих планов в Варшавском университете обеспечивалось весьма небольшим числом преподавателей, и на плечи Вороного сразу легла большая педагогическая нагрузка.

Ко времени приезда Вороного в университете преподавали только два профессора математики — В. А. Анисимов и Н. Н. Зинин. Г. Ф. Вороной вынужден был взять на себя чтение нескольких курсов: аналитической геометрии, начертательной геометрии, теории чисел и теории вероятностей. В 1900 г. Вороной издал литографированный учебник

³⁰ Подробно обе работы рассмотрены в статье Н. Г. Чудакова в III томе «Собрания сочинений Г. Ф. Вороного», Изд-во АН УССР, 1953.

³¹ Арх. № Г 19/23.

³² Арх. № Г 21/27.

по аналитической геометрии³³. Для учебника Вороного характерны строгость и четкость изложения и определений. Каждое новое понятие иллюстрируется, каждый новый метод поясняется на примерах.

Осенью 1898 г. Вороной начал работать по совместительству профессором Варшавского политехнического института. Здесь он в течение нескольких лет был деканом механического факультета. В 1905—1907 гг. Варшавский университет и Политехнический институт были царским правительством закрыты. Вместе с группой профессоров Вороной приехал в Новочеркасск в связи с организацией там Донского политехнического института. В Новочеркасске он находился около года. Осенью 1908 г. занятия в Варшавском университете возобновились, и Вороной вернулся в Варшаву к началу учебного года. В дальнейшем Вороной читал новый курс — математический анализ. Подготовка этого курса была последней на педагогическом поприще. Умер Вороной 7 (20) ноября 1908 г. на 41-м году жизни.

Георгий Феодосьевич Вороной — одна из самых ярких индивидуальностей в истории отечественной математики. Воспитанник петербургской математической школы, он был носителем лучших ее традиций. Его имя навсегда вошло в нашу отечественную математику, как имя выдающегося творца и создателя новых направлений в теории чисел.

6

Преподавание математики в средней школе и учебная литература

90-е годы прошлого века характеризуются заметным развитием всех отраслей хозяйства России. В это время происходит рост прогрессивного общественного движения, активизируется деятельность в области просвещения. Классическая форма образования приходит в противоречие с экономическими тенденциями страны. Созревает необходимость в коренном улучшении среднего образования, в его реформе. Четкое выражение получает новая концепция школьного курса математики, которая со временем частично была реализована.

В конце XIX — начале XX в. педагогические проблемы обсуждаются на съездах русских естествоиспытателей и врачей. Новые идеи школьной математики рассматриваются в научных обществах (при Казанском, Новороссийском, Киевском и других университетах). Вопросы школьной математики находятся в центре внимания педагогической печати. Появляется сравнительно большое число оригинальных статей и книг по вопросам преподавания математики. Составляются

³³ Один экземпляр этого учебника хранится в библиотеке Института математики АН УССР. В книге 838 страниц. На заглавном листе: «Аналитическая геометрия. Лекции, читанные в Императорском Варшавском университете профессором Г. Вороным. 1899/1900 учебный год».

и обсуждаются новые программы и учебники, активно ведутся поиски новых методов ее преподавания в школе. Много внимания уделяется этим вопросам также на страницах специальных периодических изданий: «Вестник опытной физики и элементарной математики» (Киев, Одесса, 1886—1917), «Физико-математические науки в их прошедшем и настоящем» (Москва, 1885—1898), «Математическое образование» (Москва, 1912).

При Министерстве народного образования и Академии наук работали комиссии по вопросам улучшения математического образования в средних учебных заведениях. По ряду учебных округов проводились дискуссии по проблеме реформы школы. В России был создан Национальный комитет Международной комиссии по реформе математического образования, в состав которого входили вначале Н. Я. Сонин, Б. М. Коялович и директор реального училища Н. Н. Фохт. Позднее в его состав вошли К. А. Поссе, Д. М. Синцов. Просуществовал он до 1914 г., и хотя от практических дел он был еще далек, тем не менее, в теоретическом отношении результаты его работы заметны. Прежде всего были четко сформулированы идеи реформы математического образования, составлены обзоры о состоянии преподавания математики в русских школах различного типа, и, наконец, изданы программы зарубежных средних учебных заведений.

В направлении улучшения образования в России большую роль сыграли съезды преподавателей математики. Они предопределили содержание школьной математики в соответствии с идеями реформы и разработали программу методических исследований. Итогом всей этой работы явилась попытка реформировать школьный курс математики, построив его на новых методологических началах, сообразованных с уровнем науки и потребностями практики. Эта реформа коснулась прежде всего тех реальных училищ, которые в 1906 г. перешли на новые учебные планы и программы.

Рассмотрим, в чем состояли изменения в программах и какие в связи с этим были созданы новые учебники и учебные пособия за те почти тридцать лет, которые предшествовали Великой Октябрьской социалистической революции. В качестве исходной возьмем программу 1890 г., которая длительное время использовалась в гимназиях.

Программа по арифметике содержала вопросы о десятичной системе счисления, арифметических операциях в области положительных рациональных чисел и их применении к изучению величин, о метрической системе мер и русских счетах. Курс завершался большим традиционным разделом «задачи на правила». В последнем классе гимназии преподавали элементы теоретической арифметики (различные системы счисления, законы арифметических действий, теоремы о делимости, теорема о каноническом разложении, признаки делимости, периодические дроби). Программа последнего класса реальных училищ предписывала еще изучение приближенных вычислений.

В последующие десятилетия программа не претерпела существенных изменений, если не считать исключения некоторых второстепен-

ных вопросов и значительного упрощения и сокращения раздела, содержавшего решение задач на различные правила. Этот раздел издавна справедливо критиковался.

Среди учебников по арифметике конца прошлого столетия видное место занимал «Систематический курс арифметики» А. П. Киселева, который многократно переиздавался (1-е издание — 1884 г., 28-е — 1916 г.). Это был полный курс арифметики, отвечавший программе первых трех классов гимназий и реальных училищ, а также программе повторительного курса ³⁴.

Наряду с учебниками Киселева пользовались учебником А. Ф. Малинина и К. П. Буренина «Руководство к арифметике» (1866 г.). Основной задачник по арифметике — «Собрание арифметических задач» (1866 г.) этих же авторов переиздавался ежегодно. Наряду с ним нашел применение «Сборник арифметических задач» Верещагина. Несколько раз переиздавался «Сборник арифметических задач» В. А. Евтушевского.

По арифметике для последних классов гимназий и реальных училищ существовали специальные учебники, одним из которых можно назвать «Курс теоретической арифметики и сборник теоретических упражнений» А. Н. Глаголева, где содержался обширный и интересный материал по теории чисел, а также некоторые новейшие по тому времени результаты исследований вопросов оснований арифметики.

В начале XX в. появились пособия по приближенным вычислениям: «Вычисление по приближению» (1908 г.) П. А. Долгушина, «Теория и практика элементарных приближенных вычислений» (1909 г.) В. М. Филиппова, а также статья «Приближенное вычисление» В. П. Ермакова в журнале «Вестник опытной физики и элементарной математики» (Одесса, 1905, № 388). Раздел приближенных вычислений входил и в рассмотренный выше курс теоретической арифметики А. Н. Глаголева. В виде приложения он был также включен в курс арифметики А. П. Киселева.

Рассмотрим программы и учебники по алгебре — предмету, который претерпел наибольшие изменения.

Программа 1890 г. содержала следующие вопросы: многочлены, дроби, уравнения 1-й степени, теория пропорций, уравнения и трехчлен 2-й степени, радикалы, извлечение квадратных и кубических корней из чисел, квадратных — из многочленов, прогрессии, логарифмы, исследование уравнений и систем, неравенства 1-й степени, неопределенные уравнения 1-й степени, непрерывные дроби, теория соединений и биномиальная теорема. В последнем классе — делимость многочлена на двучлен, эквивалентность уравнений и приложение алгебры к геометрии. В курсе алгебры, читаемом в последних классах гимназии, излагалась теория пределов, доказывалось существование логарифмов.

³⁴ А. П. Киселев (1852—1940) окончил Петербургский университет по математическому отделению, длительное время работал учителем в средних учебных заведениях. Его учебниками пользовались около 70 лет.

рифмов. Вопросы неопределенного анализа и непрерывных дробей были затем исключены из программы. Но следует сказать, что эта программа была составлена в духе предшествующих программ и не была цельной в идейном отношении.

Однако с этого времени идея расширения понятия о числе начинает уже заметно вырисовываться. Исследуется квадратная функция, что, впрочем, не является новым. В качестве основной идеи алгебре приписывается «дух обобщений». От программы гимназий программа реальных училищ отличалась лишь по последнему классу, где изучались комплексные числа, решение двучленных уравнений с приложением к построению правильных вписанных многоугольников, исследование на экстремум трехчлена второй степени и дробно-рациональной функции второй степени; способ неопределенных коэффициентов. Но программа реальных училищ 1895 г. не касалась вопросов о представлении комплексных чисел в тригонометрической форме и исследований дробно-рациональной функции.

Из учебников алгебры наибольшее распространение получила «Элементарная алгебра» А. П. Киселева, впервые изданная в 1888 г. и вышедшая до 1917 г. 30-ю изданиями. В 23-е издание были внесены изменения, отвечавшие духу реформы (понятие функции и другие вопросы). Значительное влияние имел также учебник алгебры Н. А. Шапошникова. Наряду с новыми учебниками школа продолжала пользоваться «Начальной алгеброй» А. Ю. Давидова (первое изд. 1866 г.), «Руководством алгебры» А. Ф. Малинина и К. П. Буренина (1870 г.).

В 90-х годах в нашей отечественной методике математики был сформулирован тезис о построении курса алгебры на основе понятия функции. Как уже отмечалось, учебник алгебры Киселева, начиная с 23-го издания, в известной степени отражал новую концепцию школьного курса алгебры. Киселев активно работает в этом направлении и публикует такие новые пособия, как «Начала дифференциального и интегрального исчисления» (1908 г.), «Графическое изображение некоторых функций, рассматриваемых в элементарной алгебре» (1911 г.) и др. Под влиянием идей реформы создаются новые учебники, например: «Курс алгебры» К. Ф. Лебединцева, изданный в 1909 г. — ч. I, в 1910 г. — ч. II (Киев), «Элементарная алгебра» А. Н. Глаголева (1911 г.), «Курс элементарной алгебры» Д. М. Левитуса (ч. 1 и ч. 2, 1911—1912 гг.) и др.

Нельзя не упомянуть здесь еще об одном направлении в построении курса алгебры. Господствующей в нем идеей является понятие числа и операции. К этому направлению можно отнести «Руководство алгебры» Г. Бархова, написанное на основе опыта автора и изданное в 1915 г., курсы алгебры Матковского (1890 г., Киев) и Б. Чиханова (4-е изд. 1909 г., Минск).

Из новых задачников в основном пользовались в школе «Методическим сборником алгебраических задач» Н. А. Шапошникова и Н. К. Вальцова, вышедшим впервые в 1887 г. и переиздававшимся до 1917 г. 24 раза. Применялись также старые задачники: К. Д. Краевича (1865 г.) и О. Бычкова (1868 г.).

Школьный курс геометрии был давно сложившимся курсом и рассматривался как «логически стройная система истин, на которой уясняются методы их доказательств», как область простейших приложений формальной логики.

Программа по геометрии 1890 г. включала следующие вопросы. Планиметрия: учение об углах, параллельных прямых, треугольниках, многоугольниках, окружности, несоизмеримости отрезков, подобии, вписанных и описанных многоугольниках, метрических свойствах треугольников; вычисление площадей; понятие предела и вычисление на его основе длины окружности и площади круга; задачи на построение. Стереометрия: взаимное положение прямых и плоскостей; призма, параллелепипед, пирамида; понятие о правильных многогранниках; равенство и подобие призм и пирамид; цилиндр, конус, шар и его части.

К концу столетия методы изложения очень изменились: они стали более строгими, научными. Научный уровень учебника по геометрии за рассматриваемый период значительно возрос, прежде всего за счет проникновения в него идеи геометрического преобразования (симметрия, параллельный перенос, вращение, гомотетия, инверсия) и строгого изложения, например таких вопросов, как теории параллельных, теории пределов и теорем существования.

Большое влияние на школьный курс геометрии оказал И. И. Александров, определивший для школ объем и содержание геометрических задач на построение. В начале XX в. явно обозначилась тенденция расширить школьный курс геометрии за счет элементов неевклидовой геометрии. Этот вопрос частично получил и методическую разработку.

За период с 1890 г. по 1917 г. были составлены учебники по геометрии, например «Элементарная геометрия» А. П. Киселева, впервые изданная в 1893 г., и «Элементарная геометрия» А. Н. Глаголева (1895 г.). Учебник Киселева до 1917 г. выдержал 30 изданий. В школе пользовались также и другими новыми учебниками: «Геометрией на плоскости». Н. Извольского, «Элементарной геометрией» К. Н. Раппельсона, «Элементарной геометрией» С. Шубина, «Курсом элементарной геометрии» Д. Ройтмана. В связи с этим следует назвать сочинение А. Годнева «Из курса геометрии по новому плану» (1907 г.), идеи которого развивал Ройтман.

Основным содержанием тригонометрии по-прежнему оставалось решение треугольников. Тригонометрические функции играли служебную роль. А. В. Ланков справедливо указывал, что учебник И. Рыбкина «Прямолинейная тригонометрия» (1886 г.), который получил в то время наибольшее распространение, был «типичным формалистическим учебником». Преподавание по нему имело существенные недостатки: отсутствовала пропедевтика, функции определялись через «тригонометрические линии», слабо были представлены приложения, вопрос о решении треугольников преобладал над учением о функциях³⁵.

³⁵ А. В. Ланков. К истории развития передовых идей в русской методике математики. Учпедгиз, М., 1951.

Однако некоторые учебники по тригонометрии того времени, например «Прямолинейная тригонометрия» (1890 г.) А. Веребрюсова, «Прямолинейная тригонометрия» А. Воинова, «Курс тригонометрии» (1909 г.) Н. И. Билибина, «Прямолинейная геометрия» (1910 г., изд. 2-е) В. Шиффа, «Энциклопедия тригонометрии» (1907 г.) П. Шмудевича, имели пропедевтическую часть, включали многочисленные приложения к геодезии, вполне развитый раздел о тригонометрических функциях, определения функций на основе понятий вектора, проекции, обратные тригонометрические функции и тригонометрические уравнения.

В начале нашего столетия многие страны становились на путь реформы математического образования. Как уже отмечалось, для ее проведения была создана Международная комиссия по математическому образованию во главе с известным немецким математиком Ф. Клейном. К этому движению присоединилась и Россия, в которой к тому времени была уже забыта деятельность Остроградского и его последователей в этом направлении. Первая мировая война помешала провести до конца реформу. Основные ее идеи в отношении математического образования в средних учебных заведениях заключались в следующем: введение в школьный курс математики элементов анализа и аналитической геометрии, в геометрии систематически использовать методы преобразования фигур, которые упрощают изучение и дают основание для классификации, развитие приложений, которые выдвигает практика.

В 1906 г. в учебный план реальных училищ были включены начала аналитической геометрии на плоскости и математического анализа. Программа по аналитической геометрии содержала все основные вопросы этого курса, за исключением исследования кривых второго порядка.

По анализу рассматривались следующие вопросы: пределы, функция и аргумент; понятие производной и дифференциала; техника дифференцирования; производные элементарных функций; теоремы о непрерывных функциях; исследование функций на экстремум; уравнения касательной и нормали; понятие об определенном и неопределенном интеграле.

В связи с введением элементов анализа и аналитической геометрии в реальных училищах (позднее в кадетских корпусах, а также в некоторых частных гимназиях) понадобились новые учебники. Были опубликованы (отечественные и переводные): «Основания анализа бесконечно малых» (1907 г.) А. Воинова, «Основания аналитической геометрии на плоскости» (1909 г., 2-е изд.) и «Основания анализа бесконечно малых» (1909 г.) Д. Горячева, «Начала анализа» (1913 г.) М. Г. Попруженко, «Введение в исчисление бесконечно малых» Г. Ковалевского (пер. с немецкого, под редакцией С. О. Шатуновского, Одесса).

В 1911—1914 гг. состоялись два съезда преподавателей математики, сыгравших большую роль в выработке программы теоретических исследований в области методики математики и осуществлении рефор-

мы. Главные решения этих съездов — сблизить преподавание математики с требованием современной науки и жизни; ознакомить учащихся средних учебных заведений с доступными идеями анализа и аналитической геометрии; провести через весь школьный курс математики и ярко осветить идею функциональной зависимости. Ряд других решений относился к таким вопросам, как введение в школьную программу некоторых новых тем, построение учебников, подготовка учителей, психологические исследования преподавания математики и т. д. Эти решения положительным образом сказались на деятельности преподавателей и методистов-математиков по созданию нового типа учебников, монографий по методике математики.

В постановке преподавания математики дореволюционная средняя школа накопила немало ценных идей, большой практический опыт. Многие из этого наследия в соответствии с указанием В. И. Ленина «взять то хорошее, что было в старой школе»³⁶ было использовано в практике советской средней школы, в методико-математических исследованиях советских ученых и педагогов.

³⁶ В. И. Ленин. Полн. собр. соч. Т. 41, стр. 305.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Классики марксизма-ленинизма

- Маркс К. К критике политической экономии. — Маркс К. и Энгельс Ф. Соч. Изд. 2-е. Т. 13.
- Маркс К. Капитал. Кн. 1. — Маркс К. и Энгельс Ф. Соч. Изд. 2-е. Т. 23.
- Маркс К. Математические рукописи. — Под знаменем марксизма, 1933, № 1.
- Маркс К. и Энгельс Ф. Манифест Коммунистической партии. — Маркс К. и Энгельс Ф. Соч. Изд. 2-е. Т. 4.
- Энгельс Ф. Анти-Дюринг. — Маркс К. и Энгельс Ф. Соч. Изд. 2-е. Т. 20.
- Энгельс Ф. Диалектика природы. — Маркс К. и Энгельс Ф. Соч. Изд. 2-е. Т. 20.
- Энгельс Ф. Происхождение семьи, частной собственности и государства. — Маркс К. и Энгельс Ф. Соч. Изд. 2-е. Т. 21.
- Ленин В. И. «Крестьянская реформа» и пролетарски-крестьянская революция. — Полн. собр. соч. Т. 20.
- Ленин В. И. Левонародничество и марксизм. — Полн. собр. соч. Т. 25.
- Ленин В. И. Материализм и эмпириокритицизм. — Полн. собр. соч. Т. 18.
- Ленин В. И. Пятидесятилетие падения крепостного права. — Полн. собр. соч. Т. 20.
- Ленин В. И. Развитие капитализма в России. — Полн. собр. соч. Т. 3.
- Ленин В. И. Философские тетради. — Полн. собр. соч. Т. 29.
- Ленин В. И. Что такое «друзья народа» и как они воюют против социал-демократов? — Полн. собр. соч. Т. 1.

2. Общенсторическая литература

- Бардин И. П. Технические науки в Академии наук СССР за 200 лет. — Изв. АН СССР. Отд. техн. наук, 1945, № 4—5, стр. 277—317.
- Белькинд Л. Д., Конфедератов И. Я. и Шнейберг Я. А. История техники. Госэнергоиздат, М.—Л., 1956, 491 с. с илл.
- Бернал Д. Наука в истории общества. Пер. с англ. ИЛ, М., 1956, 735 с.
- Данилевский В. В. Русская техника. Изд. 2-е. Лениздат, Л., 1948, 547 с.
- Девятнадцатый век. Обзор науки, техники и политических событий. СПб, 1900, 425, XIX с.
- Зворыкин А. А., Осьмова Н. И., Чернышев В. И., Шухардин С. В. История техники. Соцэкгиз, М., 1962, 772 с.
- Зубов В. П. Историография естественных наук в России (XVIII — первая пол. XIX в.). Изд-во АН СССР, М., 1956, 576 с.
- История Академии наук СССР. В трех томах. Т. 2. (1803—1917). Изд-во АН СССР, М.—Л., 1964, 772 с. с илл.
- История естествознания в России. Т. 1, 2. Изд-во АН СССР, М., 1957—1960.
- История Украинской ССР. Изд-во АН УССР, К., 1953, 838 с. с илл.
- История философии. В шести томах. Изд-во АН СССР, М., 1957—1961.

- Ключевский В. О. Курс русской истории. — В кн.: Ключевский В. О. Соч. Т. 1—4. Соцэкгиз, М., 1956—1959.
- Князев Г. А. и Кольцов А. В. Краткий очерк истории Академии наук СССР. Изд. 3-е. «Наука», М.—Л., 1964, 226 с.
- Краткая история СССР. В двух частях. Ч. 1. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1963, 536 с.
- Кудрявцев П. С. и Конфедератов И. Я. История физики и техники. Учпедгиз, М., 1960, 507 с.
- Кузнецов Б. Г. Очерки по истории русской науки. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1940, 170 с. с илл.
- Лазарев П. П. Очерки по истории русской науки. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1950, 248 с.
- Максимов А. А. Очерки по истории борьбы за материализм в русском естествознании. Госполитиздат, М., 1947, 492 с.
- Пекарский П. П. История Императорской Академии наук. Т. 1, 2. СПб, 1862.
- Сборник сведений о премиях и наградах, раздаваемых Имп. Академиею наук. СПб, 1888, 1891.
- Сухомлинов М. История Российской академии наук. Вып. 2, 3. СПб, 1875—1876.
- Таннери П. Исторический очерк развития естествознания в Европе. Гостехиздат, М.—Л., 1934, 310 с.
- Черменский Е. Д. История СССР. Период империализма (90-е годы XIX в. — март 1917 г.). «Просвещение», М., 1965, 567 с.
- Turkowski T. Materiały do dziejów literatury i oświaty na Litwie i Rusi. Z archiwum drukarni i księgarni Józefa Zawadzkiego w Wilnie. Z lat 1805—1865. T-wo przyjaciół nauk, Wilno, 1935.

3. Литература по истории физико-математических наук

Работы общего характера

- Александров П. С. Русская математика XIX и XX вв. и ее влияние на мировую науку. — В кн.: Уч. зап. МГУ. Т. 91. Роль русской науки в развитии мировой науки и культуры. Т. 1. Кн. 1, 1947, стр. 3—34.
- Васильев А. В. Математика. Вып. 1 (1725—1826—1863). Изд-во АН СССР, Пгтр., 1921, 72 с.
- Васильев А. В. Математика за последние пятьдесят лет. — Матем. образ., 1928, № 1, 2.
- Васильев А. В. Целое число. Исторический очерк. Научн. кн. изд-во. Пгтр., 1922, 272 с.
- Вивальнюк Л. Н. Київська алгебраїчна школа. — У кн.: Наук. зап. Чернігівськ. пед. ін-ту. Т. 4. Вип. 1, 1958, стор. 3—18.
- Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. Пер. с нем. Физматгиз, М., 1960, 467 с.
- Выгодский М. Я. Проблемы истории математики с точки зрения методологии марксизма. — В кн.: На борьбу за материалистическую диалектику в математике. Гостехиздат. М.—Л., 1931, стр. 143—160.
- Гайдук Ю. М. Карл Густав Якоби в его связях с русскими математиками. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 12. Физматгиз, М., 1959, стр. 245—268.
- Геронимус Я. Л. Очерки о работах корифеев русской механики. Гостехиздат, М., 1952, 520 с.
- Гнеденко Б. В. З історії математики в Росії. «Рад. школа», К., 1952, 40 с.
- Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. Гостехиздат, М.—Л., 1946, 247 с.
- Гнеденко Б. В. и Погребысский И. Б. О некоторых задачах истории математики. — Укр. мат. журн., 1957, № 9, стр. 359—368.

- Гнеденко Б. В. и Погребысский И. Б. О развитии математики на Украине. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 9. Физматгиз, М., 1956, стр. 403—426.
- Голубев В. В. Русские работы по механике и влияние их на развитие мировой науки. — В кн.: Уч. зап. МГУ. Т. 91. Роль русской науки в развитии мировой науки и культуры. Т. 1. Кн. 1, 1947, стр. 97—104.
- Григорьян А. Т. Очерки по истории механики в России. Изд-во АН СССР, М., 1961, 290 с.
- История естествознания в России. Т. 1. Ч. 2, 380 с. Т. 2, 703 с. Изд-во АН СССР, М., 1957—1960.
- Киро С. Н. и Миракьян Г. М. Содружество ученых русского и украинского народов в развитии математики. — В кн.: Труды Одесск. ун-та. Юбил. сб., посв. 300-летию воссоед. Украины с Россией, 1954, стр. 187—201.
- Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. Ч. 1. ОНТИ, М.—Л., 1937, 432 с.
- Космодемьянский А. А. Очерки по истории механики в России. Изд. 2-е. Доп. «Просвещение», М., 1964, 456 с.
- Кудрявцев П. С. История физики. Изд. 2-е, Т. 1, 2. Учпедгиз, М., 1956.
- Лебедев В. И. Очерки по истории точных наук. Вып. 1—4. М., 1919—1920.
- Моисеев Н. Д. Очерки развития механики. Изд-во Моск. ун-та, М., 1961, 478 с.
- Мордухай-Болтовской Д. Д. Исследования о происхождении некоторых основных идей современной математики. Вып. 6. Философские элементы и эволюция методических идей в математике I пол. XIX в.— Изв. Сев.-Кавказск. ун-та, 1928, Т. 2 (15), стр. 118—129.
- О традициях Ф. П. Курс истории математики. Лекции 16—22. Изд-во ЛГУ, Л., 1951.
- Очерки истории математики и механики. Сб. ст. Изд-во АН СССР, М., 1963, 272 с.
- Прудников В. Е. Русские педагоги-математики XVIII—XIX веков. Учпедгиз, М., 1956, 640 с. с илл.
- Путята Т. В. і Фрадрлін Б. Н. Діяльність видатних механіків на Україні. Держтехвидав УРСР, 1952, 268 с.
- Радовский М. И. Гаусс и его связи с Россией. — Природа, 1964, № 8, стр. 108—109.
- Рыбкин Г. Ф. и Микулинский С. Р. Борьба материализма против идеализма в естествознании в России (I пол. XIX в.). — В кн.: Очерки по истории философской и общественно-политической мысли народов СССР. Т. 1. Изд-во АН СССР, М., 1955, стр. 362—373.
- Рыбников К. А. История математики. Т. 2. Изд-во Моск. ун-та, М., 1963, 334 с.
- Смирнов В. И. Русская математика XIX и XX вв. — Природа, 1945, № 3, стр. 17—23.
- Стройк Д. Коротка історія математики. Пер. з англ., доп. С. М. Кіро. За ред. Б. В. Гнеденка. «Рад. школа», К., 1960, 306 с. з іл.
- Стройк Дирк Ян. Краткий очерк истории математики. Пер. с нем. и доп. И. Б. Погребысского. «Наука», М., 1964, 233 с.
- Тюлина И. А. и Ракчеев Е. Н. История механики. Изд-во Моск. ун-та, М., 1962, 228 с.
- Шереметьевский В. П. Очерки по истории математики. ГУПИ, М., 1940, 176 с.
- Archibald R. C. Outline of the history of mathematics. 6 ed. Oberlin, Ohio, 1949.
- Ball W. W. A short account of the history of mathematics. London, 1893.
- Bell E. T. Men of mathematics. New York, 1937.
- Bell E. T. The development of mathematics. 2 ed. New York — London, 1945.
- Boutroux P. L'idéal scientifique des mathématiciens. Paris, 1920.
- Cajory F. A history of mathematics. 2 ed. New York, 1929.
- Cajory F. A history of mathematical notations. In 2 vol. New York, 1928—1929.
- Diański J. i Wachulka A. Z dziejów polskiej myśli matematycznej. Warszawa, 1957.

- Hoffman J. E. Geschichte der Mathematik. T. 3. Berlin, 1957.
 Hoppe E. Geschichte der Physik. Braunschweig, 1926.
 Loria G. Storia delle matematiche. Roma, 1952.
 Loria G. Storia delle matematiche dall'alba della civiltà al secolo XIX. 2 ed. Milano, 1950.
 Marczewski E. Rozwój matematyki w Polsce. Kraków, 1948.
 Newman James P. The world of mathematics. Vol. 1—4. New York, 1956.
 Sarton G. Introduction to the history of science. Vol. 1—3. Baltimore, 1927—1948.
 Sarton G. The study of the history of mathematics. Cambridge, 1936.
 Scott J. F. A history of mathematics. 1958.
 Struik D. J. A concise history of mathematics. In 2 vol. New York, 1948.

История отдельных отраслей и проблем

- Александрова Н. В. Некоторые вопросы истории вариационного исчисления в XVIII—XIX вв. — В кн.: Труды Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР. Т. 22, 1959, стр. 251—271.
 Белозеров С. Е. Основные этапы развития общей теории аналитических функций. Изд-во Ростовск. и/Дону ун-та, Ростов-на-Дону, 1962, 312 с. с черт.
 Беспамятных Н. Д. Арифметические исследования в России в XIX в. — В кн.: Уч. зап. Гродненск. пед. ин-та. Т. 2, 1957, стр. 3—42.
 Беспамятных Н. Д. К истории счетных инструментов в России в XIX в. — В кн.: Уч. зап. Гродненск. пед. ин-та. Т. 2, 1957, стр. 43—54.
 Бернштейн С. Н. Петербургская школа теории вероятностей. — Природа, 1939, № 8, стр. 17—22.
 Бернштейн С. Н. Петербургская школа теории вероятностей. — В кн.: Уч. зап. ЛГУ. № 55. Вып. 10, 1940, стр. 3—11.
 Волков Д. П. Некоторые материалы к вопросу о развитии начертательной геометрии в России. Досоветский период. — В кн.: Труды Груз. политехн. ин-та. Т. 1. Тбилиси, 1957, стр. 53—71.
 Гнеденко Б. В. и Гихман И. И. Развитие теории вероятностей на Украине. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 9. Физматгиз, М., 1956, стр. 477—536.
 Гнеденко Б. В. Развитие теории вероятностей в России. — В кн.: Труды Ин-та ист. естествозн. АН СССР. Т. 2, 1948, стр. 390—425.
 Гнеденко Б. В. Русская школа теории вероятностей. — В кн.: Труды Совещ. по ист. естествозн. 24—26 дек. 1946 г. Изд-во АН СССР, М. — Л., 1948, стр. 192—193.
 Гуссов В. В. Работы русских ученых по теории гамма-функций. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 5. Физматгиз, М., 1952, стр. 421—472.
 Гуссов В. В. Развитие теории цилиндрических функций в России и СССР. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 6. Физматгиз, М., 1953, стр. 355—475.
 Делоне Б. Н. Петербургская школа теории чисел. Изд-во АН СССР, М. — Л., 1947, 422 с. с илл.
 Делоне Б. Н. Развитие теории чисел в России. — В кн.: Уч. зап. МГУ. Т. 91. Роль русской науки в развитии мировой науки и культуры. Т. 1. Кн. 1, 1947, стр. 77—104.
 Депман И. Я. Русские ученые во Французской академии наук. — Вестн. высш. шк., 1948, № 11, стр. 53—55.
 Добровольський В. О. Алгебраїчна тематика в працях київських математиків. — У кн.: Іст.-мат. зб. Вип. 2. Вид-во АН УРСР, К., 1961, стор. 57—67.
 Зотина Р. С. Вопросы обоснования математического анализа в XVIII и начале XIX в. в России. — В кн.: Уч. зап. Московск. гор. пед. ин-та им. В. П. Потемкина. Т. 71. Вып. 1, 1958, стр. 203—289.
 Колмогоров А. Н. Роль русской науки в развитии теории вероятностей. — В кн.: Уч. зап. МГУ. Т. 91. Роль русской науки в развитии мировой науки и культуры. Т. 1. Кн. 1, 1947, стр. 53—64.
 Лихин В. В. Теория функций и чисел Бернулли и ее развитие в трудах оте-

- чественных математиков. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 12. Физматгиз, М., 1959, стр. 59—134.
- Маркушевич А. И. Очерки по истории теории аналитических функций. Гостехиздат, М.—Л., 1951, 127 с.
- Мордухай-Болтовской Д. Д. Эволюция понятия функции в прошлом и настоящем. — В кн.: Уч. зап. НИИ мат. и физ. Ростовск. н/Дону ун-та. Т. 1, 1937, стр. 51—52.
- Мрочек В. Р. Возникновение и развитие теории вероятностей. — В кн.: Труды Ин-та ист. науки и техн. Т. 2. Вып. 1, 1934, стр. 45—60.
- Пикар Э. О развитии за последние сто лет некоторых основных теорий математического анализа. Перев. с нем. Бернштейна. Харьков, 1912, 99 с.
- Покровский П. М. Исторический очерк теории ультраэллиптических и абелевых функций., М., 1886, 20 с.
- Рынин Н. А. Материалы к истории начертательной геометрии (библиография, биографии, эпизоды, факты, хронология). ЛИИГВФ, Л., 1938, 113 с. с илл.
- Садовский Л. Е. Из истории развития машинной математики в России. — Усп. мат. наук, 1950, т. 5, вып. 2 (36), стр. 57—71.
- Степанов В. В. Московская школа теории функций. — В кн.: Уч. зап. МГУ. Т. 91. Роль русской науки в развитии мировой науки и культуры. Т. 1, Кн. 1, 1947, стр. 47—52.
- Стяжкин Н. И. и Силаков В. Д. Краткий очерк истории общей и математической логики в России. «Высшая школа», М., 1962, 85 с.
- Сушкевич А. К. Материалы к истории алгебры в России в 19 в. и начале 20 в. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 4. Физматгиз, М., 1951, стр. 237—451.
- Фрадлин Б. Н. Проблема обертання твердого тіла навколо нерухомої точки та роль вітчизняних учених в її розвитку. — У кн.: Іст.-мат. зб. Вип. 3. Вид-во АН УРСР, К., 1962, стор. 106—115.
- Франкль Ф. И. О работах русских математиков XIX в. по теории характеристик уравнений в частных производных. — Усп. мат. наук, 1951, т. 6, вып. 2 (42), стр. 154—156.
- Хинчин А. Я. Теория вероятностей в дореволюционной России и Советском Союзе. — Фронт науки и техники, 1934, № 7, стр. 36—46.

Математика в Академии наук, университетах и других учебных заведениях

- Аверкиев Д. В. Университетские отцы и дети (о профессорах Петербургского ун-та 50-х гг. 19 в.). — Эпоха, 1864, № 1—2, стр. 325—349.
- Академические списки Императорского Университета св. Владимира (1834—1884). К., 1884, 200 с.
- Александров П. С. Математика в Московском университете в первой половине XX века. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 8. Физматгиз, М., 1955, стр. 9—54.
- Александров Л. С., Гнеденко Б. В. и Степанов В. В. — Математика в Московском университете в XX в. (до 1940 г.). — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 1. Физматгиз, М., 1948, стр. 9—42.
- Андреев П. И. Очерк состояния Института инженеров путей сообщения в царствование императора Александра I. СПб, 1877.
- Апхутин А. Очерк истории Константиновского межевого института. 1779—1879. СПб, 1879.
- Багаей Д. И. Опыт истории Харьковского университета. Т. 1. 1802—1815. Т. 2. 1815—1835. Харьков, 1893—1898.
- Барабашев Н. И. К истории мореходного образования в России. Изд-во АН СССР, М., 1959, 216 с.
- Бахмутская Э. Я. О преподавании математики в Харьковском технологическом институте в XIX и начале XX столетия. — В кн.: Труды Харьковск. политехн. ин-та. Т. 5. Сер. инж.-физ. Вып. 1, 1955, стр. 185—191.

- Бек В. В. Очерк изменений по учебной части в Горном институте за последние 25 лет. СПб, 1881.
- Белозеров С. Е. Математика в Ростовском университете. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 6. Физматгиз, М., 1953, стр. 247—352.
- Белозеров С. Е. Очерки истории Ростовского университета. Изд-во Ростовск. ун-та, Ростов-на-Дону, 1959, 362 с.
- Беспамятных Н. Д. Математика в Вильнюсском университете (1803—1832 гг.). — В кн.: Уч. зап. Карельск. пед. ин-та. Т. 14. Петрозаводск, 1963, стр. 49—69.
- Биографический словарь профессоров и преподавателей Императорского Казанского университета. За 100 лет (1804—1904). В двух частях. Ч. 1. Казань, 1904, XVI, 553 с.
- Биографический словарь профессоров и преподавателей Московского университета за истекшее столетие со дня учреждения 12 янв. 1755 г. по 13 янв. 1855 г. Ч. 1, 2. М., 1855.
- Биографический словарь профессоров и преподавателей Императорского С.-Петербургского университета за истекшую третью четверть века его существования. 1869—1894. Т. 1, 2. СПб, 1896—1898.
- Бобынин В. В. Деятельность физико-математического отделения Петербургской академии наук в 1884 и 1885 гг. — Физ.-мат. науки в их наст. и прош. Отд. научн. нов., крит. и библиогр., 1886, т. 2, стр. 117—125, 172—179, 229—235.
- Бобынин В. В. Деятельность физико-математического отделения Петербургской академии наук в 1886 г. — Физ.-мат. науки в их наст. и прош. Отд. научн. нов., крит. и библиогр., 1887, т. 3, стр. 65—69, 114—121, 135—140, 159—168, 183—188.
- Булич Н. Из первых лет Казанского университета (1805—1819). Казань, 1887. Изд. 2-е. СПб, 1904.
- Веселаго Ф. Очерки истории Морского кадетского корпуса. СПб, 1852.
- Висковатов П. А. Из воспоминаний дерптского студента. — Библиотека для чтения, 1859, № 9, стр. 1—28.
- Воспоминания бывших питомцев Горного института. СПб, 1873.
- Выгодский М. Я. Математика и ее деятели в Московском университете во второй половине XIX в. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 1. Физматгиз, М., 1948, стр. 141—183.
- Выдающиеся ученые Горного института. Сб. статей, посвященный 175-летию Горного института. 1773—1948. Вып. 1, 2. Metallurgizdat — Ленингр. горн. ин-т. М—Л., 1948—1951.
- Гагаев Б. М. Развитие математического анализа в Казанском университете. — В кн.: Уч. зап. Казанск. ун-та. Т. 120. № 7, 1960, стр. 67—86.
- Галченкова Р. И. Математика в Ленинградском (Петербургском) университете в XIX в. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 14. Физматгиз, М., 1961, стр. 355—392.
- Гербель. Гимназия высших наук и лицей князя Безбородко. Изд. 2-е. СПб, 1881.
- Глиноецкий Н. П. Исторический очерк Николаевской Академии Генерального штаба. СПб, 1882, VIII, 386 с.
- Голубев В. В. Механика в Московском университете перед Великой Октябрьской социалистической революцией и в советский период. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 8. Физматгиз, М., 1955, стр. 77—126.
- Горшков П. М. Из истории русской науки в Петербургском — Ленинградском университете. — В кн.: Уч. зап. ЛГУ. № 116. Сер. мат. наук. Вып. 18, 1949, стр. 192—252.
- Греков Ф. В. Краткий исторический очерк военно-учебных заведений (1700—1910). М., 1910.
- Григорьев В. В. Императорский Санкт-Петербургский университет в течение 50 лет существования. СПб, 1880.
- Гродский Г. Д. Михайловское артиллерийское училище и академия в 19 ст. Исторический очерк. Ч. 1. СПб, 1905.
- 200-летний юбилей Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. Изд-во МГУ, М., 1955, 132 с. с илл.

- Депман И. Я. Из истории математики в Дерптском (Юрьевском) университете. — В кн.: Уч. зап. Ленинградск. пед. ин-та. Т. 14. Физ.-мат. ф-т. Вып. 1, 1955, стр. 128—137.
- Депман И. Я. К. Ф. Гаусс и Дерптско-Юрьевский университет. — Вопр. естествозн. и техн., 1956, № 1, стр. 241—245.
- Днепропетровский горный институт. К предстоящему юбилею. 1899—1924. Сб. материалов. Днепропетровск, 1924.
- Днепропетровский горный институт. 1899—1949. Изд. Днепропетровск. горн. ин-та. Днепропетровск, 1949, 101 с.
- Дубрава Т. С. Гордость русской науки (к 175-летию Ленинградского горного института). Изд. Ленинградск. горн. ин-та, Л., 1948, 59 с.
- Дубрава Т. С. Ленинградский горный институт. Изд. Ленинградск. горн. ин-та, Л., 1957, 86 с. с илл.
- Есипов В. В. Материалы к истории Императорского Варшавского университета. Биографические очерки. Вып. 1, 2. Варшава, 1913—1915.
- Ефимов А. И. Историческая записка об учреждении и открытии Томского технологического института. Томск, 1902.
- Жемайтис З. Физико-математические науки в старом Вильнюсском университете. — В кн.: Литовск. мат. сб. Т. 2. № 2, 1953, стр. 319—342.
- Житков С. М. Институт инженеров путей сообщения. Исторический очерк. СПб, 1899.
- Житков К. Г. Краткий очерк истории минного офицерского класса. 1874—1908. СПб, 1908.
- Жуковский Н. Е. — Механика в Московском университете за последнее 50-летие. — В кн.: Жуковский Н. Е. Полн. собр. соч. Т. 9. ОНТИ, М.—Л., 1937.
- Загоскин Н. П. Историческая записка о четырех отделениях Казанского университета за 1814—1827 гг. Казань, 1899, 30 с.
- Загоскин Н. П. История Императорского Казанского университета за первые 100 лет его существования. 1804—1904. Т. 1—4. Казань, 1902—1904.
- Загоскин Н. П. Материалы для истории кафедр и учреждений... Казанского университета (1804—1826). Казань, 1899, 572 с.
- Зеленый А. И. Исторический очерк Штурманского училища. 1798—1871. Кронштадт, 1872.
- Иконников В. С. Биографический словарь профессоров и преподавателей Императорского Университета св. Владимира (1834—1884). К., 1884, XXXVI, 816 с.
- Иллюстрированный сборник материалов к истории возникновения Киевского политехнического института, посвященный памяти В. Л. Кирпичева. К., 1914.
- Институт гражданских инженеров. Краткий исторический очерк пятидесятилетия Института гражданских инженеров, бывшего Строительного училища. 1842—1892. СПб, 1892.
- Историко-статистические записки об ученых и учебно-вспомогательных учреждениях Императорского Университета св. Владимира (1834—1884). К., 1884, III, 419 с.
- Исторический очерк развития С.-Петербургского лесного института (1803—1903). СПб, 1903.
- История Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина. Под общ. ред. Д. Я. Мартынова. Казань, 1954, 368 с.
- Історія Київського університету. 1834—1959. Вид-во Київськ. ун-ту, К., 1959, 629 с. з іл.
- История Московского университета. В двух томах. Т. 1. Изд-во МГУ, М., 1955, 563 с. с илл.
- К 50-летию юбилею Университета св. Владимира. Очерки и заметки по истории университета. К., 1884, 67 с.
- Казанский университет. Празднование Имп. Казанским ун-том столетней годовщины дня рождения Н. И. Лобачевского. 1793—1893. Казань, 1894, 210 с.
- Казмичев. Артиллерийские офицерские классы в Кронштадте. СПб, 1908.
- Киро С. Н. Математика в Одесском (Новороссийском) ун-те (1865—1955). — В кн.: Научн. ежегодн. Одесск. ун-та за 1956 г. Одесса, 1957, стр. 121—126.

- Кіро С. М. Математика в Новоросійському (Одеському) університеті. — У кн.: Іст.-мат. зб. Вип. 2. Вид-во АН УРСР, К., 1961, стор. 22—42.
- Корбут М. К. Казанский государственный университет им. В. И. Ульянова-Ленина за 125 лет. Т. 1, 211 с., илл. Т. 2, 385 с., илл. Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1930.
- Кравчук М. Ф. Математика та математики в Київському університеті за сто років (1834—1934). — У кн.: Розвиток науки в Київському університеті за сто років. Вид-во АН УРСР, К., 1935, стор. 34—69.
- Краткий исторический очерк учебных заведений Ведомства путей сообщения. СПб, 1900.
- Кротов А. Морской кадетский корпус. СПб, 1901.
- Купфер К. Ю. Из недавнего прошлого Рижского политехнического института. Рига, 1906.
- Лазаренко Е. К. 300 лет Львовского университета. Изд-во Львовск. ун-та, Львов, 1961, 84 с.
- Лалаев. Исторический очерк военно-учебных заведений, подведомственных главному их управлению. От основания в России военных школ до исхода первого царствования имп. Александра Николаевича. 1700—1880. СПб, 1880, 303 с.
- Ланговой И. П. С.-Петербургский технологический институт. 1828—1893. Краткий исторический очерк. СПб, 1894.
- Ларионов А. М. История Института инженеров путей сообщения за 100 лет. 1810—1910. СПб, 1910.
- Лебедев С. И. К 90-летию Одесского государственного университета им. И. И. Мечникова. — В кн.: Труды Одесск. ун-та. Т. 145. Одесса 1945, стр. 7—22.
- Левенсон Л. Б. Ленинградский горный институт в его прошлом и настоящем. — Научный работник, 1926, № 3, стр. 52—70.
- Левцкий Г. В. Астрономы Юрьевского университета. 1802—1894. — В кн.: Уч. зап. Юрьевск. ун-та. Т. 2, 1900, Прил., стр. 1—224.
- Левцкий Г. В. Биографический словарь профессоров и преподавателей Юрьевского, бывшего Дерптского университета за 100 лет его существования. Юрьев, 1902.
- Левцкий Г. В. Очерк истории физико-математического факультета Императорского Юрьевского университета, б/м, б/г, б/п.
- Ленинградский горный институт. В память 150-летнего (1773—1923) юбилея Горного института в Петрограде М., 1923.
- Ленинградский ордена Ленина институт инженеров железнодорожного транспорта им. акад. В. Н. Образцова. 1809—1959. Трансжелдориздат, М., 1960, 388 с.
- Ленинградский ордена Трудового Красного Знамени инженерно-строительный институт за 125 лет. 1832—1957. Госстройиздат. Л., 1958.
- Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина. История института. Труды ЛПИ. № 190. Изд-во ЛПИ, Л., 1957, 146 с.
- Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина. Материалы по истории института. Труды ЛПИ. Изд-во ЛПИ, Л., 1949, 127 с.
- Ленинградский политехнический институт. Научно-техническая конференция, посвященная 40-летию юбилею деятельности института. Тезисы докладов. Изд. Ленинградск. политехн. ин-та, Ленинград — Ташкент, 1943, 84 с.
- Ленинградский университет в воспоминаниях современников. В трех томах. Т. 1. Петербургский университет. 1819—1895. Изд-во Ленинградск. ун-та, Л., 1963, 319 с.
- Летников А. В. О системах реального образования. Отчет и речи о деятельности Имп. Московского технического училища за 1870/71 уч. год. М., 1871.
- Лоранский А. М. Исторический очерк Горного института. СПб, 1873.
- Лысенко В. И. Из истории первой петербургской математической школы. — В кн.: Труды Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР. Т. 43, 1961, стр. 182—205.
- Любарский А. Свет русской науки. Очерки о Тартуском университете. Эстгосиздат, Таллин, 1952, 332 с.
- Максимовский М. Исторический очерк развития Главного инженерного училища. 1819—1869. СПб, 1869.

- Маркевич А. И. Двадцатипятилетие Новороссийского университета. Одесса, 1890, 846 с.
- Маркевич А. И. Физико-математический факультет. — В кн.: Маркевич А. И. Двадцатипятилетие Императорского Новороссийского университета. Одесса, 1890, стр. 330—405.
- Маркевич О. П. Наука і наукові працівники в Київському державному університеті за 112 років його існування (1834—1946). — У кн.: Наук. зап. КДУ. Т. 5. Вып. 1, 1946, стор. 9—64.
- Мартинсон Э. Э. Исторические связи Тартуского (б. Юрьевского) университета с русской наукой. Эстгосиздат, Таллин, 1951, 82 с.
- Мартинсон Э. Э. История основания Тартуского университета. Изд-во ЛГУ, Л., 1954, 192 с. с илл.
- Марчевский М. Н. История математических кафедр в Харьковском университете за 150 лет его существования. — В кн.: Уч. зап. Харьковск. ун-та. Т. 65, 1956, стр. 7—29.
- Материалы по истории Ленинградского университета. 1819—1917. Обзор архивных документов. Изд-во Ленинградск. ун-та, Л., 1961, 124 с.
- Мельникова Н. И. Издания Московского университета. Изд-во МГУ, М., 1955, 251 с.
- Михайловская артиллерийская академия и училище в годы 75-летия. 1820—1895. Краткие исторические сведения и личный состав. СПб, 1896.
- Михайловский А. И. Преподаватели, учившиеся и служившие в Казанском университете (1804—1904). Ч. 1. Вып. 1—3. Казань, 1901—1908.
- Мордах К. Николаевская инженерная академия и училище. Личный состав и расписание занятий. СПб, 1887.
- Мордухай-Болтовской Д. Д. Об академиках, работавших в области физико-математических наук. — Изв. Сев.-Кавказск. ун-та, 1926, т. 8, стр. 111—118.
- Московский университет в воспоминаниях современников. Изд-во МГУ, М., 1956, 487 с., 13 л. илл.
- Мухачев П. М. Двадцатипятилетие Харьковского технологического института. 1885—1910. Харьков, 1910.
- Наука в Казанском университете за последнее двадцатипятилетие. — В кн.: Уч. зап. Казанск. ун-та. Кн. 3-4, 1930, стр. 313—391.
- Новочеркасский политехнический институт им. С. Орджоникидзе. Краткая историческая справка. К пятидесятилетию института (1907—1957). Изд. Новочеркасск. политехн. ин-та, Новочеркасск, 1957, 29 с. с илл.
- Осадчиев В. Г. и Ионов Б. Д. Московский лесотехнический институт. Изд. Моск. лесотехн. ин-та, М., 1958, 43 с. с илл.
- Очерки по истории Академии наук. Физ.-мат. науки. Под ред. акад. А. Ф. Иоффе. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1945, 77 с.
- Очерки по истории физико-математических наук в Казанском университете. Уч. зап. Т. 120. Кн. 7. Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1960, 110 с.
- Петербургский технологический институт. Краткий исторический очерк о С.-Петербургском практическом технологическом институте. 1828—1878. СПб, 1878.
- [Петербургский]. Технологический институт с 1828 по 1895 г. СПб, 1896.
- Петухов Е. В. Юрьевский, бывший Дерптский университет в последний период своего существования (1865—1902). Исторический очерк. СПб, 1906, IV, 211, VII с.
- Петухов Е. В. Юрьевский, бывший Дерптский университет за сто лет его существования (1802—1902). Т. 1, 2. Юрьев, 1902.
- Платов А. и Кирпичев Л. Исторический очерк образования и развития Артиллерийского училища. 1820—1870. СПб, 1870.
- Плетнев П. Первое двадцатипятилетие Имп. Санкт-Петербургского университета. СПб, 1844.
- 50 лет Московского энергетического института. Госэнергоиздат, М., 1955, 303 с. с илл.
- Рижский политехнический институт. Юбилейный сборник к 50-летию Рижского политехнического института. 1862—1912. Рига, 1912.

- Рубин П. Г. Исторический очерк возникновения Екатеринославского высшего горного училища и его деятельность за первое десятилетие (1899—1909). Екатеринослав, 1909.
- Ряго Г. Из жизни и деятельности четырех замечательных математиков Тартуского университета. — В кн.: Уч. зап. Тартуск. ун-та. Т. 37, 1955, стр. 74—105.
- С.-Петербургский университет в первое столетие его деятельности. 1819—1919. Материалы по истории С.-Петербургского ун-та. Т. 1. 1819—1835. М., 1919, 735 с.
- Сборник документов, относящихся к празднованию пятидесятилетия Михайловской артиллерийской академии и училища. СПб, 1871, стр. 122—123.
- Синцов Д. М. Кафедры математики чистой и прикладной в Харьковском университете за 100 лет его существования (1805—1905). Харьков, 1908, 72 с.
- Смирнов А. Историческое обозрение первого двадцатипятилетия Главного педагогического ин-та. 1828—1853. СПб, 1853.
- Сулов А. Г. Студенческие астрономические кружки в Петербурге в 1902—1914 гг. — В кн.: Ист.-астроном. исслед. Вып. 3. Физматгиз, М., 1957, стр. 649—658.
- Сушкевич А. К. Диссертации по математике в Харьковском университете за 1805—1917 годы. — В кн.: Уч. зап. Харьковск. ун-та. Т. 65. Зап. мат. отд. физ.-мат. ф-та и Харьковск. мат. о-ва. Т. 24. Харьков, стр. 91—115.
- Тихомандрицкий М. А. Опыт истории физико-математического факультета Харьковского университета за первые 100 лет его существования. Харьков, 1905, 162 с.
- Тюлина И. А. Развитие механики в Московском университете в 18 и 19 веках. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 8. Физматгиз, М., 1955, стр. 489—536.
- Ученые общества и учебно-вспомогательные учреждения Харьковского университета (1805—1905). Харьков, 1911, 282 с.
- Физико-математический факультет Харьковского университета за первые сто лет его существования (1805—1905). Харьков, 1908, 625 с.
- Фоггт К. К. Историко-статистические записки о Харьковском университете и его заведениях от основания университета до 1859 г. Харьков, 1859, 174 с.
- Фоггт К. Отчет Казанского университета за 17 лет (1827—1844). Казань, 1844.
- Харьковский государственный университет им. А. М. Горького за 150 лет. Изд-во Харьковск. ун-та, Харьков, 1955, 387 с.
- Шевырев С. История Московского университета. М., 1855, 451 с.
- Шульгин В. Я. История Университета св. Владимира. СПб, 1860, 230 с.
- Электротехнический институт. Двадцатипятилетие электротехнического института. 1886—1911. СПб, 1914.
- Электротехнический институт. Десятилетие электротехнического института. 1886—1896. СПб, 1896.
- Юшкевич А. П. Математика в Московском университете за первые сто лет его существования. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 1. Физматгиз, М.—Л., 1948, стр. 43—140.
- Янишевский Э. П. Из воспоминаний старого казанского студента. Казань, 1893, 111 с.
- Яновская С. А. Два документа из истории Московского университета. — Вестн. Моск. ун-та, 1952, № 8, сер. физ.-мат. и естеств. наук, вып. 5, стр. 41—56.
- Яновская С. А. и Лихолетов И. И. Из истории преподавания математики в Московском университете (1804—1860 гг.). — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 8. Физматгиз, М., 1955, стр. 127—480.
- Album Academicum der Kaiserlichen Universität Dorpat. Von Hasselblatt und Otto G. Dorpat, 1889.
- Bieliński I. Uniwersytet Wileński (1579—1834). Т. 1—3. Kraków, 1899—1900.
- Finkel L., Starzyński St. Hystorya Uniwersitetu Lwowskiego. Lwów, 1894.
- Hasselblatt A. Die Ehrenlegion der 14 000 Immatriculirten. Weitere Streit-

- züge in das «Album Academicum der Kaiserlichen Universität Dorpat». Jurjen (Dorpat), 1893.
- Janowski L. Historjografja Uniwersytetu wileńskiego. Cz. 1. Wilno, 1921.
- Jaworski F. Uniwersytet lwowski. Lwów, 1912.
- Politechnika Lwowska, jej stan obecny i potrzeby. Lwów, 1932.
- Zajączowski W. C. K. Szkoła politechniczna we Lwowie. Rys historyczny jej zalozenia i rozwoju, tudzież stan jej obecny. Lwów, 1894.

Вопросы преподавания

- Белый Б. Н. Вопросы методики математики в работе Киевского физико-математического общества. — Матем. в shk., 1962, № 4, стр. 84—88.
- Бычков Б. П. Понятие функции в курсе алгебры русской средней школы в XIX в. — Матем. в shk., 1954, № 4, стр. 6—14.
- Бычков Б. П. Понятие функции в курсе алгебры русской дореволюционной средней школы в XX в. (1900—1917). — Матем. в shk., 1955, № 6, стр. 1—8.
- Володкевич Н. Н. К вопросу о реформе преподавания математики. К., 1910, 60 с.
- Галанин Д. Д. История методических идей по арифметике в России. Ч. 1. М., 1915.
- Глатенок В. Д. К выходу в свет первого курса аналитической геометрии в России. — В кн.: Уч. зап. Гомельск. пед. ин-та. Т. 3, Гомель. 1956, стр. 155—166.
- Глатенок В. Д. Открытие физико-математических факультетов университетов в России и выход в свет первого университетского курса аналитической геометрии. — В кн.: Уч. зап. Гомельск. пед. ин-та. Т. 5, Гомель, 1957, стр. 3—34.
- Дахия С. А. Методика математики в русских общепедагогических журналах (1857—1917). — В кн.: Уч. зап. Харьковск. пед. ин-та. Т. 21. Сер. мат. Вып. 2. Харьков, 1957, стр. 157—197.
- Доброгай Н. І. Нариси з історії вітчизняних російських підручників математики. Ч. 1, 2. — У кн.: Наук. зап. Мелітопольськ. пед. ін-ту. Т. 3, 1956, стор. 41—73. Т. 4, 1956, стор. 147—170.
- Каган В. Первый Всероссийский съезд преподавателей математики. — Вестн. опытно. физ., 1912, № 553, стр. 10—18; № 554, стр. 49—54; № 556, стр. 121—122.
- Клоссовский А. Материалы к вопросу о постановке университетского дела в России. Одесса, 1903, 90 с.
- Князьков С. А. и Сербов Н. И. Очерк истории народного образования в России до эпохи реформ Александра II. М., 1910, 240 с.
- Константинов Н. А. Очерки по истории средней школы. Учпедгиз, М., 1947, 248 с.
- Ланков А. В. К истории развития передовых идей в русской методике математики. Учпедгиз, М., 1951, 151 с.
- Ланков А. В. К истории вопроса о реформе преподавания математики. Ф. Клейн и В. Шереметьевский. — Матем. в shk., 1949, № 6, стр. 1—3.
- Летников А. В. О системах реального образования. М., 1871.
- Лихачева Е. Материалы для истории женского образования в России (1796—1828). СПб, 1893, 308 с.
- Лихачева Е. Материалы для истории женского образования в России (1856—1880). СПб, 1901, 641 с.
- Мазинг К. К вопросу о преподавании математики. — Журн. Мин. нар. просв., 1878, № 4, стр. 25.
- Максин И. М. Очерк развития промышленного образования в России. 1883—1908. СПб, 1909, 175 с.
- Математика в средней школе у нас и за границей. — Пед. сб., 1898, № 5, стр. 503—519.
- Молодший В. Н. Материалы к истории борьбы за математическое просвещение передовых русских офицеров в первой четверти XIX века. — В кн.: Уч. зап. Московск. пед. ин-та им. В. И. Ленина. № 188, 1962, стр. 209—223.
- Мордухай-Болтовской Д. Д. О Первом Всероссийском съезде преподавателей математики. — Универс. изв. Варшава, 1913, т. 3, стр. 1—42.

- Мордухай-Болтовской Д. Д. Философские элементы и эволюция методических идей в математике первой половины XIX в. — Изв. Сев.-Кавказск. ун-та, 1928, т. 2 (15), стр. 118—129.
- Пржишховский Р. В. Несколько слов о преподавании математики. — Вестн. опытно-физ., 1888, № 42, стр. 129—137.
- Прудников В. Е. О русских учебниках математики для средних школ в XIX веке. — Матем. в shk., 1954, № 3, стр. 6—20.
- Рождественский С. В. Исторический обзор деятельности Министерства народного просвещения 1802—1902. СПб, 1902, 786 с.
- Салтыков Н. Н. Итоги Второго Всероссийского съезда преподавателей математики и задачи организации Третьего съезда. — В кн.: Зап. Харьковск. ун-та. Т. 4, 1913, XII, 250 с.
- Сборник материалов по техническому и профессиональному образованию. Вып. 2. СПб, 1897.
- Сборник постановлений по Министерству народного просвещения. Т. 1—7. 1802—1881. СПб, 1875—1882.
- Синцов Д. Университет и средняя школа. — Матем. образ., 1913, т. 2, стр. 193—206.
- Сухомятин М. И. Материалы для истории образования в России в царствование императора Александра I. — Журн. Мин. нар. просв., 1865, № 10; 1866, № 4.
- Сухомятин М. И. Материалы для истории образования в России в царствование императора Александра I. — В кн.: Сухомятин М. И. — Исследования и статьи по русской литературе и просвещению. Т. 1. СПб, 1889, стр. 1—538.
- Ферлюдин П. И. Исторический обзор мер по высшему образованию в России. Вып. 1. Академия наук и университеты. Саратов, 1894.
- Чехов Н. В. Народное образование в России с 60-х годов XIX в. М., 1912, 224 с.
- Шмид Е. История средних учебных заведений в России. Пер. с нем. СПб, 1878, 684 с.
- Юшкевич А. П. Математика и ее преподавание в России в XVII—XIX вв. — Матем. в shk., 1947, № 1—6; 1948, № 1—3, 5; 1949, № 1, 3.

Математические общества и съезды

- Александров П. С. К восьмидесятилетию Московского математического общества. — Усп. мат. наук, 1947, т. 2, вып. 3 (19), стр. 180—181.
- Александров П. С. Московское математическое общество. — Вестн. АН СССР, 1942, т. 1, стр. 58—62.
- Александров П. С. Московское математическое общество. — Усп. мат. наук, 1946, т. 1, вып. 1 (11), стр. 232—241.
- Александров П. С. и Головин О. Н. Московское математическое общество. — Усп. мат. наук, 1957, т. 12, вып. 6 (78), стр. 9—46.
- Ахизер Н. И. Харьковское математическое общество. — В кн.: Зап. Харьковск. мат. о-ва. Т. 24. Вып. 4, 1956, стр. 31—39.
- Бобынин В. В. Деятельность русских ученых обществ в отношении физико-математических наук в 1884 г. — Физ.-мат. науки в их наст. и прош. Отд. научн. нов., крит. и библиогр., 1885, т. 1, № 5, стр. 113—126; № 6, стр. 145—151.
- Бобынин В. В. Математико-астрономическая и физическая секция первых девяти съездов русских естествоиспытателей и врачей, их цели и деятельность. Ч. 1. Съезды 1—4. М., 1896, 169 с.
- Бобынин В. В. Обзор деятельности секции математики и астрономии за 25 лет существования съездов естествоиспытателей и врачей в России (1867—1892). — В кн.: Дневник IX съезда русск. естествоисп. и вр. № 4. Секция мат. М., 1894, стр. 1—2.
- Бобынин В. В. Первое, основанное в России, математическое общество. — Физ.-мат. науки в их наст. и прош., 1896, т. 13, стр. 1—24, 49—67.
- Гнатюк В. Наукове товариство ім. Шевченка. З нагоди 50-ліття його заснування (1873—1923). Вид. Наук. т-ва ім. Шевченка, Львів, 1923, 15 с.

- Двадцатипятилетие Московского математического общества (1867—1892). М., 1896, XXXIX с.
- Депман И. Я. и Молодой В. Н. Первое математическое общество в России. — В кн.: Труды Третьего Всесоюзного математического съезда. Т. 1. М., 1956, стр. 230.
- Депман И. Я. С.-Петербургское математическое общество. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 13. Физматгиз, М., 1960, стр. 11—106.
- Х Съезд русских естествоиспытателей и врачей в Киеве. — Изв. Казанск. физ.-мат. о-ва, 1894, сер. 2, т. 4, № 3, стр. 90—93.
- Киро С. Н. Математика на съездах русских естествоиспытателей и врачей. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 11. Физматгиз, М., 1958, стр. 133—158.
- Каган В. XI Съезд русских естествоиспытателей и врачей. Секция чистой математики и механики. — Вопр. опытно-физ. и элем. мат., 1902, № 313, стр. 1—7; № 314, стр. 25—30.
- Краткий отчет о деятельности Московского математического кружка с 1 февр. 1914 г. по 1 февр. 1916 г. М., 1916.
- Курш А. Г. Московское математическое общество за последнюю треть века. Докл. на юб. засед. о-ва 20. 10. 1964. — Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 3, стр. 10—18.
- Липшиц С. Ю. Московское общество испытателей природы за 135 лет его существования (1805—1940): М., 1940, 136 с.
- Майстров Л. Е. Возникновение Московского математического общества. — Усп. мат. наук, 1959, т. 14, вып. 3, стр. 227—234.
- Марчевский М. Н. Харьковское математическое общество за первые 75 лет его существования (1879—1954). — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 9. Физматгиз, М., 1956, стр. 613—666.
- Материалы для истории Московского математического общества. — Мат. сб., 1889, т. 14, стр. 471—487.
- Меньшов Д. Е. Московское математическое общество в период 1910—1920 гг. Докл. на торжеств. засед. о-ва. Окт. 1964 г. — Усп. мат. наук, 1965, т. 20, вып. 3, стр. 19—20.
- Отчеты заседаний Московского математического общества. М., 1926, 25 с.
- Погожев А. В. 25-летие естественнонаучных съездов в России (1861—1886). М., 1887.
- Протоколы С.-Петербургского математического общества. 1890—1899. СПб, 1899, 131 с.
- Пшерборский А. П. Математическое общество при Харьковском университете (1879—1904). Харьков, 1911, 26 с.
- Синцов Д. М. XIII Съезд русских естествоиспытателей и врачей в Тифлисе. — Вестн. опытно-физ., 1913, № 50, стр. 75—81.
- Синцов Д. М. Харьковское математическое общество за 50 лет. — В кн.: Труды I Всесоюзного съезда математиков. ОНТИ, М.—Л., 1936, стр. 97—105.
- Сообщения и протоколы заседания математического общества при Харьковском университете. Харьков, 1879—1886.
- Суслов Г. К. Из протоколов Киевского физико-математического общества. К., 1898, 24 с.
- Физико-математическое общество. Отчеты за 1—25 годы существования. Казань, 1892—1916.
- Физико-математическое общество. Отчет и протоколы Физ.-мат. об-ва при Императорском Университете св. Владимира (с 1891 по 1914 г.). К., 1892—1915.
- Шевелев Ф. Я. Из истории Московского математического общества (обзор архива Н. В. Бугаева). — Вестн. Московск. ун-та, 1963, № 2, сер. 1. Математика, механика, стр. 65—73.
- Шевелев Ф. Я. К истории Московского математического общества. — Вестн. Московск. ун-та, 1963, № 6, сер. 1. Математика, механика, стр. 71—78.

4. Источники и источниковедение

- Архив Академии наук СССР. Обзор архивных материалов. Т. 1—5. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1944—1951.
- Афанасьев Н. И. Современники. Альбом биографий. Т. 1. Б/м, 1909, 351 с.
- Библиографические источники по математике и механике, изданные в СССР за 1953—1960 гг. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1963, 248 с.
- Библиография математической литературы. Книги и журнальные статьи. ОНТИ, М.—Л., 1934, 72 с.
- Bibliographia mathematica. Rossica. Списки книг и статей по чистой математике, напечатанных в России в течение 1896—1900 гг. Изд. Казанск. физ.-мат. о-ва. Казань, 1898—1902.
- Биографический словарь деятелей естествознания и техники. Под ред. А. А. Зворыкина. Т. 1, 2. Изд-во БСЭ, М., 1959.
- Бобынин В. В. Литература физико-математических наук в России в 1884 г. I. Непериодическая литература. — Физ.-мат. науки. Отд. научн. нов., крит. и библиогр., 1885, т. 1, стр. 24—29.
- Бобынин В. В. Русская физико-математическая библиография. Указатель книг и статей по физико-математическим наукам, вышедших в России с начала книгопечатания до последнего времени. Т. 1—3. М., 1885—1900.
- Венгеров С. А. Критико-биографический словарь русских писателей и ученых (с начала русской образованности до наших дней). Т. 1—6. СПб, 1889—1904.
- Венгеров С. А. Критико-биографический словарь русских писателей и ученых. Изд. 2-е, перераб. Т. 1, 2. Птгр., 1915.
- Венгеров С. А. Источники словаря русских писателей. Т. 1—4. СПб, 1900—1917.
- Давид С. А. «Учебный математический журнал» (1833—1834) и его роль в истории русской методики математики. — В кн.: Уч. зап. Харьковск. пед. ин-та. Т. 18. Мат. Сер. 1, 1956, стр. 65—81.
- Давид С. А. «Журнал элементарной математики» и «Вестник опытной физики и элементарной математики». — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 9. Физматгиз, М., 1956, стр. 537—612.
- 220 лет Академии наук СССР (1725—1945). Справочная книга. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1945, 327 с. с илл.
- Депман И. Я. Русские математические журналы для учителя. — Матем. в шк., 1951, № 6, стр. 9—23.
- История естествознания. Литература, опубликованная в СССР (1917—1947). Изд-во АН СССР, М., 1949, 519 с.
- История естествознания. Литература, опубликованная в СССР (1948—1950). Изд-во АН СССР, М., 1955, 394 с.
- История естествознания. Литература, опубликованная в СССР (1951—1956). Изд-во АН СССР, М., 1963, 430 с.
- Кауфман И. М. Русские биографические и библиографические словари. Госкультпросветиздат, М., 1955, 751 с.
- Киро С. Н. Математика в периодических изданиях Одесского (Новороссийского) университета. 1865—1955. Ч. 1, 1865—1933. — В кн.: Труды Одесск. ун-та. Сер. мат. Т. 6, 1956, стр. 89—109.
- Лукомская А. М. Библиографические источники по математике и механике, изданные в СССР за 1917—1952 гг. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1957, 354 с.
- Лукомская А. М. Библиография отечественной литературы по математике и физике. Обзор библиографических источников. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1961, 156 с.
- Лурье С. Я. Обзор русской литературы по истории математики. — Арх. ист. науки и техн., 1934, вып. 3, стр. 233—311.
- Люди русской науки. Физматгиз, М., 1961, 600 с.
- Математика в изданиях Академии наук. 1728—1935. Библиогр. указатель. Сост. О. В. Динзе и К. И. Шафрановским. Под ред. В. И. Смирнова. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1936, 315 с.

- Математика и естествознание в СССР (за 20 лет). ГТТИ, М.—Л., 1938, 1006 с.
- Математика в СССР за тридцать лет. 1917—1947. ГТТИ, М.—Л., 1948, 1044 с.
- Математика в СССР за 40 лет. 1917—1957. В двух томах. Т. 2. Библиография. Физматгиз, М., 1959, 817 с.
- Материалы для биографического словаря действительных членов Академии наук. Ч. 1, 2. СПб, 1915—1917.
- Меженко Ю. А. Русская техническая периодика 1800—1916 гг. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1955, 300 с. с илл.
- Ростовский-на-Дону университет. Систематический указатель к изданиям Ростовского-на-Дону государственного университета. 1869—1960. Вып. 1. Физ.-мат. науки. Изд. Ростовск.-на-Дону ун-та, Ростов-на-Дону, 1962, 244 с.
- Русская библиография по естествознанию и математике, составленная состоящим при Академии наук С.-Петербургским бюро международной библиографии. Т. 1—9. СПб. — Птгр., 1904—1917.
- Русская математическая библиография. Под ред. Д. М. Синцова. Одесса, 1912.
- Русский биографический словарь. Изд. под набл. А. А. Половцева. Т. 1—25. М., 1890—1913.
- Сводный каталог иностранных периодических изданий за время с 1 августа 1914 г. по 1 января 1928 г., имеющих в библиотеках Ленинграда. Л., 1928, 265 с.
- Симонов Р. А. Первые русские математические журналы — носители прогрессивных методических идей. — Матем. в шк., 1955, № 3, стр. 13—20.
- Синцов Д. М. Систематический указатель книг и статей по чистой и прикладной математике, напечатанных в Казани по 1890 г. Казань, 1893.
- Синцов Д. М. Русская математическая библиография. Вып. 1. Список сочинений по чистой и прикладной математике, напечатанных в России в 1908 г. СПб, 1910, 74 с.
- Синцов Д. М. Харьковская математическая библиография. Список книг, брошюр и статей по математическим наукам, напечатанных в Харькове с 1805 по 1905 г. Харьков, 1925 (Прилож. к т. 14. Сообщ. Харьковск. мат. о-ва), 84 с.
- Систематический указатель статей к периодическим изданиям Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина. 1815—1947 г. Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1960, 279 с.
- Справочный словарь о русских писателях и ученых, умерших в XVIII и XIX столетиях, и список русских книг с 1725 по 1825 г. Сост. Григорий Геннади. Т. 1, 2. Берлин, 1876—1880.
- Указатель русской литературы по математике, чистым и прикладным естественным наукам, медицине и ветеринарии. Под ред. Н. А. Бунге и П. В. Гвоздика. 1872—1906. К., 1872—1913.
- Указатель статей к Ученым запискам Казанского ордена Трудового Красного Знамени государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина за 1900—1950 гг. Казань, 1955, 131 с.
- Указатель статей, содержащихся в 15 томах Математического сборника, издаваемого Московским математическим обществом при Имп. Московском университете. М., 1893, 139 с.
- Указатель статей, напечатанных в Ученых записках Казанского университета с 1834 по 1899 г. включительно. Казань, 1900, 90 с.
- Фоваро А. Литература и деятели истории математики в XIX в. — Физ.-мат. науки в их наст. и прош., 1901, № 9, стр. 267—285.
- Энциклопедический словарь. Изд. Ф. А. Брокгауза и И. А. Ефрона. Т. 1—41А. СПб, 1890—1907.
- Catalogue of scientific papers. V. 1—39. 1800—1900. London, 1807—1925.
- Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Bd 1—6. Leipzig, 1898—1934.
- Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi. T. 1—3. Milano, 1930—1950.
- Encyclopédie des sciences mathématiques. Paris-Leipzig, 1904—1966.
- Enriques F. La matematiche nella storia e nella cultura. Bologna, 1938.
- Müller F. Gedenktagebuch für Mathematik. 3. Aufl. Leipzig, 1912.
- Poggendorf J. C. Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. Bd 1 (A—L), 2 (M—Z). Leipzig, 1863.

Sprawozdania z piśmiennictwa naukowego polskiego w dziedzinie nauk matematycznych i przyrodowych. Rok 1. Warszawa, 1883.
Żebrawski T. Bibliografia piśmiennictwa polskiego z działu matematyki i fizyki. Kraków, 1873.

5. Персоналии

В. Г. Алексеев

Алексеев В. Г. — В кн.: Донцы XIX века. Биографии и материалы для биографий. Новочеркасск, 1907, стр. 1—3.

В. П. Алексеевский

Стеклов В. А. и Синцов Д. М. Отзыв об ученых трудах приват-доцента В. П. Алексеевского. — В кн.: Зап. Имп. Харьковск. ун-та. Т. 1, 1904, стр. 1—11.

В. А. Анисимов

Мордухай-Болтовской Д. Д. Василий Афанасьевич Анисимов. Некролог. — Изв. Варшавск. политехн. ин-та, 1909, стр. 1—14, с порт.

К. А. Андреев

Гордewский Д. З. К. А. Андреев — выдающийся русский геометр. Изд-во Харьковск. ун-та, Харьков, 1955, 46 с.

Егоров Д. Ф. Константин Алексеевич Андреев. — Мат. сб., 1924, т. 31, вып. 3-4, стр. 337—340.

Черняев М. П. Константин Алексеевич Андреев как геометр. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 9. Физматгиз, М., 1956, стр. 723—756.

М. Ф. Бартельс

М. Ф. Бартельс. — В кн.: Левицкий Г. В. Биограф. словарь проф. и преп. Юрьевск., б. Дерптск. ун-та за 100 лет его существов. Т. 1, Юрьев, 1902, стр. 163—167.

Депман И. Я. М. Ф. Бартельс — учитель Н. И. Лобачевского. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 3. Физматгиз, М., 1950, стр. 475—485.

Е. И. Бейер

Тихомандрицкий М. А. Е. И. фон Бейер. Некролог. — В кн.: Сообщ. Харьковск. мат. о-ва. Сер. 2. Т. 7. Харьков, 1902, стр. 20—22.

Д. К. Бобылев

Записки об ученой деятельности Д. К. Бобылева. — В кн.: Прот. засед. совета С.-Петербургск. ун-та за перв. полов. 1878/79 акад. года. № 19. СПб, 1879, стр. 32—33.

Ляпунов А. М. Дмитрий Константинович Бобылев. — Изв. Акад. наук, 1917, сер. мат., т. 11, стр. 301—306.

Петрушевский Ф. Записка об ученых трудах приват-доцента Д. К. Бобылева. — В кн.: Прот. засед. совета С.-Петербургск. ун-та за втор. полов. 1875/76 акад. года. № 14. СПб, 1877, стр. 37—38.

В. В. Бобынин

Зубов В. П. В. В. Бобынин и его труды по истории математики. — В кн.: Труды Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР. Т. 15, 1956, стр. 277—322.

Рыбников К. А. Виктор Викторович Бобынин. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Т. 3. Физматгиз, М., 1950, стр. 343—357.

П. Г. Боль

- Боль П. Г. Избр. труды. Изд-во АН ЛатвССР, Рига, 1961, 328 с.
Мышкис А. Д. и Рабинович И. М. Математик Пирс Боль из Риги. «Зинатне», Рига, 1965, 97 с.
Мышкис А. Д., Рабинович И. М. Пирс Георгиевич Боль. — В кн.: Боль П. Г. Избр. труды. Изд-во АН ЛатвССР, Рига, 1961, стр. 5—29.
П. Г. Боль. — В кн.: Ист. естествозн. в России. Т. 2. Изд-во АН СССР, М., 1960, стр. 149—151.

Н. Д. Брашман

- Биография Н. Д. Брашмана. — Мат. сб., 1866, т. 1, стр. XI—XXVI.
Письма академика Остроградского к профессору Брашману. — Мат. сб., 1866, т. 1, б/п.

Н. В. Бугаев

- Егоров Д. Ф. Научные труды Н. В. Бугаева. К., 1904, 5 с.
Ляхтин Л. К. Труды Н. В. Бугаева в области анализа. — Мат. сб., 1905, т. 25, стр. 322—330.
Минин А. П. О трудах Н. В. Бугаева по теории чисел. М., 1905, 29 с.
Некрасов П. А. и др. Николай Васильевич Бугаев. Изд. Московск. мат. о-ва, М., 1905, 123 с., с портр.
Николай Васильевич Бугаев. — В кн.: Речи, произнес. в засед. Московск. мат. о-ва 16 марта 1904 г. Изд. Московск. мат. о-ва, М., 1904, 249 с.

Н. С. Будаев

- Будаев Н. С. Некролог. — Ист. вестн., 1902, ноябрь, стр. 821—822.
Будаев Н. С. Некролог. — В кн.: Отч. о сост. и деят. С.-Петербургск. ун-та за 1902 г. СПб, 1903, стр. 8—9.

Б. Я. Букреев

- Белоусова В. П. и Ильин И. Г. Борис Яковлевич Букреев. — Усп. мат. наук, 1950, т. 5, вып. 2, стр. 199—202.
Белоусова В. П. и Ильин И. Г. Борис Яковлевич Букреев. — Укр. мат. журн., 1959, т. 11, № 3, стр. 312—314.
Білоусова В. П. та Ільїн І. Г. Борис Якович Букреєв. — Вісн. Київськ. ун-ту. Сер. астрон. мат. та мех., 1958, № 1, вип. 2, стор. 173—190.
Білоусова В. П. та Ільїн І. Г. Життя та наукова діяльність Б. Я. Букреєва. — У кн.: Наук. зап. Київськ. ун-ту. Т. 10. Вип. 1. Мат. зб. № 5, 1951, стор. 5—14.
Борис Яковлевич Букреев. — Усп. мат. наук, 1959, т. 14, вып. 5, стр. 181—195.
Грацианская Л. Н. Борис Яковлевич Букреев (к 100-летию со дня рожд.) — Матем. в шк., 1960, № 2, стр. 83—85, с портр.
Добровольский В. А. Старейший профессор советской высшей школы (к 100-летию со дня рожд. Б. Я. Букреева). — Вестн. высш. шк., 1959, № 8, стр. 64—68, с портр.
Профессор Борис Яковлевич Букреев. — Укр. мат. журн., 1950, т. 2, № 1, стр. 3—9.

В. Я. Буняковский

- Андреев К. А. Виктор Яковлевич Буняковский. Некролог. Харьков, 1890, 15 с.
Буняковский В. Я. — В кн.: Матер. для биограф. словаря действ. чл. Акад. наук. Ч. 1. Пгтр., 1915, стр. 73—78.

- В. Я. Буняковский. Некролог. — В кн.: Отч. о сост. и деят. С.-Петербургск. ун-та за 1889 г. СПб, 1890, стр. 3—4.
- Добровольский В. А. и Минковский В. Л. Примечания к письму В. Я. Буняковского. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 12. Физматгиз, М., 1959, стр. 511—524.
- Описание празднования докторского юбилея вице-президента Импер. Академии наук, академика, тайного советника В. Я. Буняковского 19 мая 1875 г. СПб, 1876, 67 с.
- Отрадных Ф. П. В. Я. Буняковский — профессор Петербургского университета. — Вестн. Ленинградск. ун-та. Сер. мат., физ. и хим., 1955, вып. 2, № 5, стр. 49—54, с. портр.
- Прудников В. Е. В. Я. Буняковский — ученый и педагог. Учпедгиз, М., 1954, 87 с., с портр.
- Трипольский П. И. Виктор Яковлевич Буняковский. Полтава, 1905, 34 с., с портр.

А. В. Васильев

- Парфентьев Н. Н. А. В. Васильев как математик и философ. — В кн.: Уч. зап. Казанск. ун-та. Кн. 6, 1930, стр. 943—956.
- Парфентьев Н. Н. Заслуженный профессор математики Александр Васильевич Васильев. — Изв. Казанск. физ.-мат. о-ва, 1924, т. 24, стр. 2—7.
- Синцов Ф. М. Александр Васильевич Васильев как педагог и популяризатор. — Матем. образ., 1930, № 1, стр. 177—184.

П. М. Васильев

- Владимиров В. В. Петр Михайлович Васильев. Некролог. Казань, 1866, 6 с.

М. Е. Ващенко-Захарченко

- Гайдук Ю. М. О роли педагогов-математиков М. Е. Ващенко-Захарченко и М. С. Волкова в популяризации идей Лобачевского. — Матем. в шк., 1956, № 2, стр. 74—76.
- Граціанська Л. М. Михайло Єгорович Ващенко-Захарченко. — У кн.: Наук. щорічник мех.-мат. ф-ту Київськ. ун-ту. К., 1956, стор. 511—513.
- Поссе К. М. Е. Ващенко-Захарченко (1825—1912). Некролог. — Журн. Мин. нар. просв., 1912, № 42, стр. 49—51.

А. К. Власов

- Глаголев Н. А. А. К. Власов (1868—1922). Некролог. — Мат. сб., 1925, т. 32, вып. 2, стр. 273—275.

Г. Ф. Вороной

- Вороной Г. Ф. Собр. соч. В трех томах. Изд-во АН УССР, К., 1952—1953.
- Брайцев И. Р. Г. Ф. Вороной (1868—1908). Некролог. Варшава, 1909, 15 с.
- Вейберг С. А. Участие Г. Ф. Вороного в решении некоторых задач геометрической кристаллографии. — В кн.: Прот. засед. О-ва естествоисп. при Импер. Варшавск. ун-те за 1909 г. № 1—2, 1910, стр. 5—9.
- Венков Б. А. О научном дневнике Г. Ф. Вороного. — Укр. мат. журн., 1951, т. 3, № 3, стр. 279—289.

- Марков А. А. Г. Ф. Вороной. 1868—1908. Некролог. — Изв. Акад. наук, 1908, т. 2, № 17, стр. 1247—1248.
- Погребысский И. Б. Обзор архивных материалов о Г. Ф. Вороном. — В кн.: Вороной Г. Ф. Собр. соч. В трех томах. Т. 3. Изд-во АН УССР, К., 1953, стр. 248—251.
- Погребысский И. Б. Рукописный фонд Г. Ф. Вороного. — В кн.: Вороной Г. Ф. Собр. соч. В трех томах. Т. 3. Изд-во АН УССР, К., 1953, стр. 251—260.
- Штокало И. З. и Погребысский И. Б. Жизнь и научная деятельность Г. Ф. Вороного. — В кн.: Вороной Г. Ф. Собр. соч. В трех томах. Т. 3. Изд-во АН УССР, К., 1953, стр. 263—304.

Д. А. Граве

- Бреус К. А. Дмитрий Александрович Граве. — Укр. мат. журн., 1963, т. 15, № 3, стр. 235—239, с портр.
- Делоне Б. Н. Дмитрий Александрович Граве (1863—1939). — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1940, т. 4, № 4-5, стр. 349—356.
- Добров Г. М. і Сологуб В. С. Пам'яті Д. О. Граве. — ДАН УРСР, 1964, № 5, стор. 697—699.
- Добровольский В. А. Научно-педагогическая деятельность Д. А. Граве. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 15. Физматгиз, М., 1963, стр. 319—360.
- Кравчук М., Крилов М., Пфейффер Ю. і Штаерман І. Півстоліття науково-педагогічної діяльності академіка Д. О. Граве. — Вісті УАН, 1935, № 8-10, стор. 59—64.
- Погребысский И. Б. Дмитрий Александрович Граве. — Матем. в шк., 1963, № 5, стр. 72—74.
- Пясковський Б. В. До 100-річчя з дня народження академіка Д. О. Граве. — У кн.: Нариси з іст. техн. і природозн. Вып. 4. Вид-во АН УРСР, К., 1963, стор. 125—129.
- Сборник, посвященный памяти академика Дмитрия Александровича Граве. ГТТИ, М.—Л., 1940, 326 с.
- Стеклов В. А., Лазарев П. П. и Белопольский А. А. Записка об ученых трудах Д. А. Граве. — Изв. Рос. акад. наук, 1924, т. 18, № 12—18, стр. 448—449.
- Тесленко И. Ф. Академик Дмитрий Александрович Граве. — Вопр. элем. и высш. мат., 1952, вып. 1, стр. 5—14.
- Чеботарев Н. Г. Академик Дмитрий Александрович Граве (к 50-летию его научно-педагогической деятельности). — Усп. мат. наук, 1937, вып. 3, стр. 222—233.
- Чеботарев Н. Г. Академик Д. А. Граве. — В кн.: Сб., посвящ. пам. акад. Д. А. Граве. ГТТИ, М.—Л., 1940, стр. 3—14.

С. Е. Гурьев

- Прудников В. Е. К биографии академика С. Е. Гурьева. — В кн.: Труды Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР. Т. 10, 1956, стр. 384—392.
- Юшкевич А. П. Академик С. Гурьев и его роль в развитии русской науки. — В кн.: Труды Ин-та ист. естествозн. АН СССР. Т. 1, 1947, стр. 219—268.
- Siméon Gouriev. Notice nécrologique. — Mem. de l'Acad. des Sci., 1818, t. 6, Histoire, p. 4—6.

А. Ю. Давидов

- Бобынин В. В. А. Ю. Давидов. Некролог. — Физ.-мат. науки. Отд. научн. нов., крит. и библиогр., 1886, т. 2, № 1, стр. 12—22; № 2, стр. 39—43; № 3, стр. 64—69.

- Гетлих А. А. Ю. Давидов. — Матем. образ., 1912, т. 1, стр. 30—36.
- Жуковский Н. Е. Жизнь и труды А. Ю. Давидова. Изд.-во Московск. мат. о-ва, М., 1890, 57 с.
- Жуковский Н. Е. Труды А. Ю. Давидова по аналитической механике. — В кн.: Жуковский Н. Е. Собр. соч. Т. 7. Гостехиздат, М., 1950, стр. 94—118.
- Жуковский Н. Е., Некрасов П. А. и Покровский П. М. Жизнь и труды А. Ю. Давидова. — Мат. сб., 1890, т. 15, вып. 1, стр. 1—57.
- Симонов Р. А. Август Юльевич Давидов. — Матем. в шк., 1954, № 4, стр. 70—75.
- Симонов Р. А. Математические учебники А. Ю. Давидова, изданные в 70-е гг. 19 в. — В кн.: Труды Всесоюзн. заочн. ин-та пищ. пром. Т. 4, 1957, стр. 160—188.
- Симонов Р. А. Педагогическое наследие профессора математики Московского университета А. Ю. Давидова. — В кн.: Труды Всесоюзн. заочн. ин-та пищ. пром. Т. 1, 1957.
- Симонов Р. А. Последние математические учебники А. Ю. Давидова. Изд. Всесоюзн. заочн. ин-та пищ. пром., М., 1958, 32 с.

И. П. Долбня

- I. Dolbnia. Oeuvres mathématiques. Paris, 1913.
- Васильев А. В. Памяти И. П. Долбни (речь, сказанная 8 апр. 1912 г. в засед. совета Горн. ин-та). Казань, 1912, 5 с.
- Крылов Н. М. И. П. Долбня. — В кн.: Зап. Горн. ин-та. Т. 4, СПб, 1912—1913, стр. V—XI.
- Крылов Н. М. И. П. Долбня. СПб, 1912.
- Крылов Н. М. и Акимов М. И. Список работ профессора И. П. Долбни в хронологическом порядке их появления. — В кн.: Зап. Горн. ин-та. Т. 4. СПб, 1912—1913, стр. XXIX—XL.
- Мордухай-Болтовской Д. Д. Очерк научной деятельности И. П. Долбни. — Мат. сб., 1912, т. 28, стр. 473—491.

Д. Ф. Егоров

- Мчедlishvili С. А. Об одной теореме Д. Ф. Егорова. — Сообщ. АН ГрузССР, 1965, т. 38, № 1, стр. 3—6.
- Стеклов В. А., Лазарев П. П. и Белопольский А. А. Записки об ученых трудах Д. Ф. Егорова. — Изв. Рос. акад. наук, 1924, т. 18, № 12-18, стр. 445—446.

В. П. Ермаков

- Бобынин В. В. Новые сочинения профессора В. П. Ермакова... — Физ.-мат. науки. Отд. научн. нов., крит. и библиогр., 1887, т. 3, № 6, стр. 140—142.
- Букреев Б. Я. Биография профессора В. П. Ермакова. — Вісті Політехн. ін-ту. К., 1926, т. 20, стор. 133—135.
- Грацианская Л. Н. Василий Петрович Ермаков. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 9. Физматгиз, М., 1956, стр. 667—690.
- Дахия С. А. Василий Петрович Ермаков. — Матем. в шк., 1952, № 6, стр. 64—69.
- Латышева К. Я. О работах В. П. Ермакова по теории дифференциальных уравнений. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 9. Физматгиз, М., 1956, стр. 691—722.
- Латышева К. Я. О работах В. П. Ермакова (1845—1922) по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — Укр. мат. журн., 1955, т. 7, № 2, стр. 231—238.

- Потапов В. С. Работа В. П. Ермакова по векторной алгебре. Из истории математики. — В кн.: Уч. зап. Сталинградск. пед. ин-та. Вып. 3, 1953, стр. 3—8.
- Путята Т. В. и Фрадлин Б. Н. Василий Петрович Ермаков. — Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1956, т. 19, стр. 389—400.

Л. Жмурко

- Dziwiński P. Rys działalności naukowej i nauczycielskiej Wawrzyńca Zmurki. — Prace mat.-fiz. T. 11. Warszawa, 1890, s. 433—448.
- Puzyna J. Wawrzyniec Zmurko, jego życie. — Kosmos, roczn. XIV. Zesz. 2. Lwów, 1899, s. 1—16.

Н. Е. Жуковский

- Жуковский Н. Е. Полн. собр. соч. В десяти томах. т. 1—9. ОНТИ, М.—Л., 1935—1938.
- Жуковский Н. Е. Собр. соч. Под ред. Л. С. Лейбензона. Т. 1—7. Гостехиздат, М.—Л., 1948—1950.
- Голубев В. В. К столетию со дня рождения Н. Е. Жуковского (1847—1947). — В кн.: Голубев В. В. Труды по аэродинамике. Гостехиздат, М.—Л., 1957, стр. 865—886.
- Голубев В. В. Николай Егорович Жуковский. Биографический очерк. — В кн.: Голубев В. В. Труды по аэродинамике. Гостехиздат, М.—Л., 1957, стр. 823—864.
- Голубев В. В. Николай Егорович Жуковский. Очерк. Изд-во МГУ, М., 1947, 64 с.
- Голубев В. В. Николай Егорович Жуковский. — Усп. мат. наук, 1947, т. 2, вып. 3 (19), стр. 3—17.
- Домбровская В. А. Николай Егорович Жуковский. 1847—1921. Воспоминания и материалы к биографии. Оборонгиз, М.—Л., 1939, 248 с. с илл.
- Н. Е. Жуковский. Документы научной и общественной деятельности. Оборонгиз, М., 1954, 66 с. с илл.
- Космодемьянский А. А. Николай Егорович Жуковский (1847—1921). — В кн.: Люди русской науки. Т. 1. Гостехиздат, М.—Л., 1948, стр. 153—163.
- Космодемьянский А. А. Основоположники современной аэродинамики Н. Е. Жуковский и Г. А. Чаплыгин. — В кн.: Уч. зап. Московск. ун-та. Т. 91. Роль русской науки в развитии мировой науки и культуры. Т. 1. Кн. 1, 1947, стр. 105—128.
- Лейбензон Л. С. Николай Егорович Жуковский. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1947, 182 с.
- Памяти профессора Николая Егоровича Жуковского. Сб. ст. М., 1922, 184 с.
- Христианович С. А. Научное наследие Н. Е. Жуковского. — В кн.: Труды по ист. техн. Вып. 4. Изд-во АН СССР, М., 1954, стр. 3—25.
- Юрьев Б. Н. Жизнь и деятельность Н. Е. Жуковского (1847—1921). — Изв. АН СССР. Отд. техн. наук, 1947, № 3, стр. 241—252.

Д. Н. Зейлигер

- Батырев А. А. Работы проф. Д. Н. Зейлигера в области теоретической механики. — В кн.: Уч. зап. НИИ мат. и физ. Ростовск.-на-Дону ун-та. Т. 1, 1937, стр. 19—20.
- Вельмин В. П. Дмитрий Николаевич Зейлигер. 25/V 1864—26/VI 1936. — В кн.: Уч. зап. НИИ мат. и физ. Ростовск.-на-Дону ун-та. Т. 1, 1937, стр. 11—13.
- Парфентьев Н. Н. Речь на юбилее проф. Д. Н. Зейлигера. — Изв. Казанск. физ.-мат. о-ва, 1927, т. 2, стр. 127—130.
- Слугинов С. П. Дмитрий Николаевич Зейлигер, профессор механики Казанского государственного университета. — Журн. Пермск. физ.-мат. о-ва, 1927, т. 4, стр. 73—78.

Черняев М. П. Работы проф. Д. Н. Зейлигера по комплексной геометрии линейчатого пространства. — В кн.: Уч. зап. НИИ мат. и физ. Ростовск.-на-Дону ун-та. Т. 1, 1937, стр. 15—18.

Н. Е. Зернов

Любимов Н. А. Воспоминания о Николае Ефимовиче Зернове. — В кн.: Речь и отчет, произнес. в торжеств. собр. Имп. Московск. ун-та 12 янв. 1864 г. М., 1864, стр. 41—46.

Н. Н. Зинин

Кузнецов П. Николай Николаевич Зинин. Некролог. — Изв. Новочеркасск. политехн. ин-та, 1913, т. 2, стр. 1—14, с портр.

Е. И. Золотарев

Золотарев Е. И. Полн. собр. соч. Вып. 1, 2. Изд-во АН СССР, Л., 1931—1932.

Башмакова И. Г. Обоснование теории делимости в трудах Е. И. Золотарева. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 2. Физматгиз, М., 1949, стр. 233—351.

Венков Б. А. Егор Иванович Золотарев. — В кн.: Золотарев Е. И. Полн. собр. соч. Вып. 1. Изд-во АН СССР, Л., 1931, стр. 9—11.

Коркин А. Записка об ученых трудах доцента Е. И. Золотарева. — В кн.: Прот. засед. совета С.-Петербургск. ун-та за втор. полов. 1875/76 акад. года. № 14. СПб, 1877, стр. 35—37.

Кузьмин Р. О. Жизнь и научная деятельность Егора Ивановича Золотарева (к 100-летию со дня рожд.). — Усп. мат. наук, 1947, т. 2, вып. 6. (22), стр. 21—51.

Ожигова Е. П. Егор Иванович Золотарев. 1847—1878. «Наука», М.—Л., 1966, 141 с. с илл.

И. И. Иванов

Кузьмин Р. О. Иван Иванович Иванов (1862—1939). — Изв. АН СССР, Сер. мат., 1940, т. 4, № 4-5, стр. 357—362.

Стеклов В. А., Лазарев П. П. и Белополюцкий А. А. Записка об ученых трудах И. И. Иванова. — Изв. Рос. акад. наук, 1924, т. 18, № 12-18, стр. 442—444.

В. Г. Имшенецкий

Андреев К. А. Василий Григорьевич Имшенецкий. Харьков, 1895, 65 с.

Андреев К. А. Жизнь и научная деятельность Василия Григорьевича Имшенецкого. Изд. Московск. мат. о-ва, М., 1896, 111 с.

Износков И. А. В. Г. Имшенецкий (воспоминания). Казань, 1893, 8. с.

Порецкий П. С. Новая наука и академик Имшенецкий. Ковно, 1897, 19 с.

Суворов Ф. М. В. Г. Имшенецкий. Казань. 1892, 7 с.

А. Кнезер

Кнезер А. — В кн.: Левицкий Г. В. Биограф. словарь проф. и преп. Юрьевск., б. Дерптск. ун-та за 100 лет его существов. Т. 1. Юрьев, 1902, стр. 197—198.

Стеклов В. А., Лазарев П. П. и Белополюцкий А. А. Записки об ученых трудах Адольфа Кнезера. — Изв. Рос. акад. наук, 1924, т. 18, № 12-18, стр. 452—453.

С. В. Ковалевская

- С. В. Ковалевская. Воспоминания и письма. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1951, 576 с.
- С. В. Ковалевская. Научные работы. Изд-во АН СССР, М., 1948.
- Вавилов С. И. Софья Васильевна Ковалевская. — В кн.: Памяти С. В. Ковалевской. Изд-во АН СССР, М., 1951, стр. 5—6.
- Воронцова Л. А. Софья Ковалевская. «Молодая Гвардия», М., 1959, 335 с. с илл.
- Депман И. Я. К биографии С. В. Ковалевской. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 8. Физматгиз, М., 1955, стр. 620—629.
- Жуковский Н. Е. О трудах С. В. Ковалевской по прикладной математике. — В кн.: Жуковский Н. Е. Полн. собр. соч. Т. 9. ОНТИ, М.—Л., 1937, стр. 299—310.
- Лавров П. Л. Русская развитая женщина. В память С. В. Ковалевской. Женева, 1891, 19 с.
- Леффлер А. Ш. Софья Ковалевская. Воспоминания. Пер. со шведск. СПб, 1893, 315 с.
- Литвинова Е. Ф. С. В. Ковалевская. Ее жизнь и ученая деятельность. СПб, 1894, 92 с.
- Малевич И. И. Воспоминания (Софья Васильевна Ковалевская, доктор философии и профессор высшей математики в «Воспоминаниях» первого по времени ее учителя И. И. Малевича 1858—1868 гг.). — Русская старина, 1890, № 12, стр. 615—654.
- Некрасов П. А. О трудах С. В. Ковалевской по чистой математике. — Мат. сб., 1891, т. 16, стр. 35—55.
- Нечкина М. В. Общественная и литературная деятельность С. В. Ковалевской. — В кн.: Памяти С. В. Ковалевской. Изд-во АН СССР, М., 1951, стр. 67—97.
- Памяти С. В. Ковалевской. Сб. ст. Изд-во АН СССР, М., 1951, 156 с., с портр.
- Парфентьев Н. Н. Научное значение работ С. В. Ковалевской в области чистой математики. — Изв. Казанск. физ.-мат. о-ва, 1923, т. 23, вып. 2, стр. 1—11.
- Письма Вейерштрасса Фуксу о Софье Ковалевской. — В кн.: Ковалевская С. В. Научные работы. Изд-во АН СССР, М., 1948, стр. 343—354.
- Полубаринова-Кочина П. Я. Дж. Сильвестр и С. В. Ковалевская. — Вопр. ист. естествозн. и техн., 1957, т. 5, стр. 156—162.
- Полубаринова-Кочина П. Я. Из переписки С. В. Ковалевской. — Усп. мат. наук, 1952, т. 7, вып. 4 (50), стр. 103—126.
- Полубаринова-Кочина П. Я. К биографии С. В. Ковалевской (по материалам ее переписки). — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 7. Физматгиз, М., 1954, стр. 666—712.
- Полубаринова-Кочина П. Я. Научные работы С. В. Ковалевской. — Усп. мат. наук, 1950, т. 5, вып. 4 (38), стр. 3—14.
- Полубаринова-Кочина П. Я. Письма Эрмита к С. В. Ковалевской. — В кн.: Труды Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР. Т. 19, 1957, стр. 650—690.
- Полубаринова-Кочина П. Я. Софья Васильевна Ковалевская, ее жизнь и деятельность. Гостехиздат, М., 1955, 100 с. с илл.
- Полубаринова-Кочина П. Я. Софья Васильевна Ковалевская (очерк научной деятельности). — В кн.: Ковалевская С. В. Научные работы. Изд-во АН СССР, М., 1948, стр. 313—342.
- Руссьян Ц. К. С. В. Ковалевская (к 25-летию со дня смерти). — Сообщ. Харьковск. мат. о-ва, 1917, т. 4, вып. 2, стр. 161—176.
- Сонин П. Я. — Заметки по поводу письма П. Л. Чебышева к С. В. Ковалевской. — Изв. Акад. наук, 1895, т. 2, № 1, стр. 18.
- Столетов А. Г. Софья Васильевна Ковалевская. М., 1891, 55 с. с илл.
- Штрайх С. Я. С. Ковалевская. Сер. Жизнь замечательных людей. М., 1935, 237 с.
- Штрайх С. Я. Семья Ковалевских. «Сов. писатель», М., 1948, 392 с., с портр.
- Штрайх С. Я. — Сестры Корвин-Круковские. «Мир», М., 1933, 342 с.

- Hof er K. Sonja Kowalewsky. Die Geschichte einer geistigen Frau. Stuttgart—Berlin, 1927, 336 S.
 Leffler A.-C. Sonja Kowalewsky. — Ann. di mat. Milano, 1891, t. 19, p. 201—211.
 Mansion P. Sophie Kowalewsky. — Rev. quest. scient. Bruxelles, 1891, t. 29, p. 591—598.
 Mittag-Leffler G. Sophie Kovalevsky. Notice biographique. — Acta math., 1892—1893, Bd 16, S. 385—392.

М. А. Ковальский

- М. А. Ковальский. Некролог. — В кн.: Годичный акт С.-Петербургск. ун-та 8 февр. 1885 г. СПб, 1885, стр. 2.

Э. Коллинс

- Fuss P. H. Ed. Collins. Notice biographique. Recueil des actes de la séance publique de l'Académie des Sciences de St-Petersbourg tenue le 29 décembre 1840. St-P., 1841, p. 3—12.

А. Н. Коркин

- Коркин А. Н. Соч. Т. 1. СПб, 1911.
 А. Н. Коркин. — Вестн. опын. физ., 1908, вып. 40, стр. 329—330.
 Поссе К. А. А. Н. Коркин. Некролог. — В кн.: Отч. о сост. и деят. С.-Петербургск. ун-та за 1908 г. СПб, 1909, стр. 31—42.
 Ребиндер М. Г. Александр Николаевич Коркин. — В кн.: Прот. О-ва естествоисп. Т. 17. Юрьев, 1908, стр. LXV—LXX.
 Сохоцкий Ю. Записка о трудах ординарного профессора А. Н. Коркина. — В кн.: Прот. засед. совета С.-Петербургск. ун-та за втор. полов. 1882/83 акад. года. № 28. СПб, 1884, стр. 53—56.

А. П. Котельников

- А. П. Котельников. Некролог. — В кн.: Труды сем. по векторн. и тензорн. анализу. Вып. 6, 1948, стр. 3—5.
 К семидесятилетию заслуженного деятеля науки и техники проф. д-ра А. П. Котельникова. — Журн. прикл. мат. и мех., 1940, т. 4, вып. 5-6, стр. 3—10.
 Розенфельд Б. А. Александр Петрович Котельников. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 9. Физматгиз, М., 1956, стр. 317—400.

А. Н. Крылов

- Крылов А. Н. Собр. трудов. Т. 1—12. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1951—1956.
 Крылов А. Н. Собр. трудов. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1936—1947.
 Алексей Николаевич Крылов. — В кн.: Труды Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова. Отд. мат. Т. 5. Л., 1934, стр. 1—3.
 Боклевский К. П. К 30-летию научной и педагогической деятельности Алексея Николаевича Крылова. — Морск. сб., 1920, № 10-11, стр. 1—14.
 Глаголева М. Н. и Залесский Н. А. Кабинет-музей А. Н. Крылова (к биографии ученого). — Судостроение, 1963, № 8, стр. 73—74.
 Иоффе А. Ф. А. Н. Крылов и Академия наук. — В кн.: Труды Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР. Т. 15, 1956, стр. 6—12.
 К 50-летию научной деятельности академика А. Н. Крылова. Сб. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1936, 40 с.
 Кравец Т. П. Памяти А. Н. Крылова. — В кн.: Труды Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР. Т. 15, 1956, стр. 32—39.

- Красоткина Т. А. Из переписки А. Н. Крылова с С. О. Макаровым, Н. Е. Жуковским и другими. — В кн.: Труды Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР. Т. 15, 1957, стр. 54—168.
- Крыжановская Н. А. Академик А. Н. Крылов. Библиографический указатель. Судпромгиз, Л., 1952, 276 с. с илл.
- Крылов А. Н. Воспоминания и очерки. Изд-во АН СССР, М., 1956, 884 с.
- Кузьмин Р. О. Алексей Николаевич Крылов как математик. — Природа, 1946, № 8, стр. 81—84.
- Лаврентьев М. А. и Фаворов П. А. Алексей Николаевич Крылов. — Судостроение, 1963, № 8, стр. 1—4.
- Летопись жизни академика А. Н. Крылова. — Судостроение, 1963, № 8, стр. 20.
- Лучининов С. Т. Выдающийся кораблестроитель, математик и педагог. Учпедгиз, М., 1959, 167 с., с портр.
- Люстерник Л. А. Памяти А. Н. Крылова. — Усп. мат. наук, 1946, т. 1, вып. 1 (11), стр. 3—10.
- Олчи-Оглу Н. И. Общественная деятельность А. Н. Крылова. — Судостроение, 1963, № 8, стр. 13—15.
- Павленко Г. Е. Из личных воспоминаний об Алексее Николаевиче Крылове. — Судостроение, 1963, № 8, стр. 4—6.
- Памяти Алексея Николаевича Крылова. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1958, 248 с.
- Погребысский И. Б. Алексей Николаевич Крылов. — Матем. в шк., 1963, № 4, стр. 77—80.
- Скрынский Н. Г. Педагогическое наследие А. Н. Крылова. — В кн.: Памяти Алексея Николаевича Крылова. Изд-во АН СССР. М.—Л., 1958, стр. 124—134.
- Смирнов В. И. Математические работы А. Н. Крылова. — В кн.: Труды Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР. Т. 15, 1956, стр. 13—23.
- Смирнов В. И. Научное творчество А. Н. Крылова. — Усп. мат. наук, 1946, т. 1, вып. 3-4 (13-14), стр. 3—12.
- Смирнов В. И. Работы А. Н. Крылова по математической физике и механике. — В кн.: Памяти Алексея Николаевича Крылова. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1958, стр. 36—46.
- Смирнов В. И., Шиманский Ю. А., Идельсон Н. И. Очерк жизни и деятельности А. Н. Крылова. — В кн.: Крылов А. Н. Собр. трудов. Т. 1. Ч. 1, Изд-во АН СССР, М.—Л., 1951, стр. 7—39.
- Чаплыгин С. А. Научная деятельность Алексея Николаевича Крылова. — В кн.: Труды Физ.-мат. ин-та им. В. А. Стеклова. Отд. мат. Т. 5. Л., 1934, стр. 5—12.
- Шателен М. А. Из воспоминаний о встречах с Алексеем Николаевичем Крыловым. — В кн.: Труды Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР. Т. 15, 1956, стр. 40—45.
- Штрайх С. Я. Алексей Николаевич Крылов. Воениздат, М., 1956, 232 с. с илл.

Н. М. Крылов

См. библиографию к третьему тому настоящего издания.

П. Л. Лавров

- Васильев А. В. П. Лавров — историк и философ математики. — В кн.: П. Л. Лавров. Пгтр., 1922.
- П. Л. Лавров. Сборник статей. Пгтр., 1922.

В. Левицкий

- Чайковский М. Володимир Левицкий. — У кн.: 36. мат.-природописно-лікарськ. секції Наук. т-ва ім. Т. Г. Шевченка. Т. 26. Львів, 1927.

А. В. Летников

- Алексей Васильевич Летников (биографические сведения и надгробные речи). М., 1888, 24 с.
- Некрасов П. А. и Покровский П. М. Об осмотре рукописей А. В. Летникова, найденных после его смерти и доставленных Математическому обществу. — Мат. сб., 1888, т. 14, вып. 1, стр. 202—204.
- Слудский Ф. А. Жизнь и труды А. В. Летникова. Изд. Московск. мат. о-ва, М., 1889, 34 с.
- Шапошников Н. А. Памяти Алексея Васильевича Летникова. М., 1888, 30 с.
- Шостак Р. Я. Алексей Васильевич Летников. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 5, Физматгиз, М., 1952, стр. 167—238.

И. А. Литтров

- Депман И. Я. И. А. Литтров — учитель Н. И. Лобачевского. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 9. Физматгиз, М., 1956, стр. 111—122.

Н. И. Лобачевский

- Лобачевский Н. И. Полн. собр. соч. Т. 1—5. Гостехиздат, М.—Л., 1946—1951.
- Александров П. С. Н. И. Лобачевский. — Усп. мат. наук, 1946, т. 1, вып. 1 (11), стр. 11—14.
- Александров П. С. Лобачевский и русская культура. — В кн.: Общее собрание АН СССР 25—30 сент. 1943 г. Изд.-во АН СССР, М.—Л., 1944, стр. 49—60.
- Александров П. С. Николай Иванович Лобачевский. — В кн.: Николай Иванович Лобачевский. Изд.-во АН СССР, М.—Л., 1943, стр. 3—30.
- Александров П. С. Николай Иванович Лобачевский. — В кн.: Лобачевский Н. И. Избр. труды по геометрии. Изд.-во АН СССР, М., 1956, стр. 562—595.
- Александров П. С. и Колмогоров А. Н. Николай Иванович Лобачевский. Гостехиздат, М.—Л., 1943, 100 с. с черт.
- Андронов А. А. Где и когда родился Н. И. Лобачевский. — В кн. Ист.-мат. исслед. Вып. 9. Физматгиз, М.—Л., 1956, стр. 9—48.
- Башмакова И. Г. и Юшкевич А. П. «Алгебра или вычисление конечных» Н. И. Лобачевского. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 2. Физматгиз, М., 1949, стр. 72—128.
- Бонولا Р. Неевклидова геометрия. Критико-историческое исследование ее развития, дополненное заметкой А. В. Васильева «Об отношении Н. И. Лобачевского к теории параллельных линий до 1826 г.». СПб. 1910, 213 с.
- Бронштейн И. Н. Выявление наследия Н. И. Лобачевского и материалов к его биографии. — В кн.: Сто двадцать пять лет неевклидовой геометрии Лобачевского. Гостехиздат, М.—Л., 1952, стр. 61—74.
- Бронштейн И. Н. К истории «Обзоров преподавания чистой математики» Н. И. Лобачевского. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 3. Физматгиз, М., 1950, стр. 171—194.
- Буймола Г. Л. О тригонометрии Лобачевского. — В кн.: Уч. зап. Казанск. ун-та. Т. 115. Вып. 10, 1955, стр. 18.
- Вагнер Н. П. Из жизни великого геометра. — Книжки недели, 1894, № 3, стр. 5—34.
- Васильев А. В. Броннер и Лобачевский. Казань, 1893, 15 с.
- Васильев А. В. Значение Н. И. Лобачевского для Имп. Казанского университета. Казань, 1896, 20 с.
- Васильев А. В. Николай Иванович Лобачевский. Казань, 1894, 40 с.

- В а с и л ь е в А. В. Об отношении Лобачевского к теории параллельных линий в начале его научной деятельности. — Изв. Казанск. физ.-мат. о-ва, 1894, сер. 2, т. 4, № 3, стр. 73.
- В а с и л ь е в А. В. Столетие не-евклидовой геометрии. — Научный работник, 1926, № 10, стр. 20—29.
- Г а й д у к Ю. М. К истории борьбы за признание геометрических идей Лобачевского в России. — Укр. мат. журн., 1954, т. 6, стр. 476—478.
- Г а й д у к Ю. М. Дополнительные материалы к истории распространения идей Лобачевского в России. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 9. Физматгиз, М., 1956, стр. 215—246.
- Г е р а с и м о в а В. М. Указатель литературы по геометрии Лобачевского и развитию ее идей. Гостехиздат, М., 1952, 192 с.
- Г н е д е н к о Б. В. О работах Н. И. Лобачевского по теории вероятностей. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 2. Физматгиз, М.—Л., 1949, стр. 129—136.
- Г у т м а н Д. С. Н. И. Лобачевский и Казанское экономическое общество. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 9. Физматгиз, М.—Л., 1956, стр. 77—100.
- Д е л о н е Б. Н. Геометрия Лобачевского и некоторые ее применения. — В кн.: Вопр. ист. отеч. науки. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1949, стр. 113—141.
- Д е п м а н И. Я. Новое о Н. И. Лобачевском. К вопросу о рецензии в «Сыне отечества». — В кн.: Труды Ин-та ист. естествозн. АН СССР. Т. 2, 1948, стр. 561—563.
- Д у б я г о А. Д. Поездка Н. И. Лобачевского в Пензу для наблюдения солнечного затмения 1842 г. — В кн.: Сто двадцать пять лет неевклидовой геометрии Лобачевского. Гостехиздат, М.—Л., 1952, стр. 87—98.
- Д у л ь с к и й П. М. Строитель Казанского университета великий русский математик Н. И. Лобачевский и его иконография. — В кн.: Каган В. Ф. Лобачевский. Изд. 2-е. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1948, 508 с.
- Е ф и м о в Н. В. Николай Иванович Лобачевский. — Усп. мат. наук, 1956, т. 11, вып. 1 (67), стр. 3—15.
- З у б о в В. П. Кто был автором анонимной рецензии на «Пангеометрию» Лобачевского в «Отечественных записках»? — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 9. Физматгиз, М., 1956, стр. 123—128.
- И д е л ь с о н Н. И. Лобачевский — астроном. — В кн.: Вопр. ист. отеч. науки. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1949, стр. 142—164.
- К а г а н В. Ф. Великий русский ученый Н. И. Лобачевский и его место в мировой науке. Изд. 2-е. Гостехиздат, М.—Л., 1948, 84 с.
- К а г а н В. Ф. Лобачевский и его геометрия. Общедоступные очерки. Гостехиздат, М., 1955, 303 с., с портр.
- К а г а н В. Ф. Лобачевский. Изд. 2-е. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1948, 347 с. с илл.
- К а г а н В. Ф. Обзор сочинения «Геометрические исследования». — В кн.: Лобачевский Н. И. Геометрические исследования по теории параллельных линий. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1945, стр. 23—36.
- К а г а н В. Ф. Сочинения Н. И. Лобачевского, предшествовавшие «Геометрическим исследованиям». — В кн.: Лобачевский Н. И. Геометрические исследования по теории параллельных линий. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1945, стр. 17—22.
- К а г а н В. Ф. Строение неевклидовой геометрии у Лобачевского, Гаусса и Больяи. — В кн.: Труды Ин-та ист. естествозн. АН СССР. Т. 2, 1948, стр. 323—389.
- К е р р А. К. Н. И. Лобачевский. Киев — Харьков, 1899, 56 с.
- К о л е с н и к о в М. С. Лобачевский. «Молодая гвардия», М., 1965, 319 с. с черт. и илл.
- К о л м о г о р о в А. Н. Лобачевский и математическое мышление XIX в. — В кн.: Николай Иванович Лобачевский. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1943, стр. 87—100.
- К о л ь м а н Э. Б. Великий русский мыслитель Н. И. Лобачевский. Изд. 2-е. Госполитиздат, М., 1956, 102 с.
- К о л ь м а н Э. О философском смысле геометрии Лобачевского. — Вестн. АН СССР, 1956, т. 6, стр. 72—77.

- К о р н е й ч и к Т. Д. Великий русский математик как педагог-новатор (к 170-летию со дня рождения Н. И. Лобачевского). — Сов. педагогика, 1963, № 1, стр. 43—52.
- К о с т и н В. И. Н. И. Лобачевский и его геометрия. Облиздат, Горький, 1947, 75 с.
- К о т е л ь н и к о в А. П. Историко-библиографические сведения о сочинении «О началах геометрии». — В кн.: Л о б а ч е в с к и й Н. И. Полн. собр. соч. Т. 1, Гостехиздат, М.—Л., 1946.
- К о т е л ь н и к о в А. П. Обзор сочинения «О началах геометрии». — В кн. Л о б а ч е в с к и й Н. И. Полн. собр. соч. Т. 1. Гостехиздат, М.—Л., 1946, стр. 179—183.
- К у з н е ц о в Б. Г. Лобачевский и его современники. — Под знаменем марксизма, 1937, № 7, стр. 136—157.
- К у з н е ц о в Б. Г. Ломоносов. Лобачевский. Менделеев. Очерки жизни и мировоззрения. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1945, 334 с. с илл.
- Л а н к о в А. В. Н. И. Лобачевский в элементарной геометрии. — В кн.: Уч. зап. Пермск. пед. ин-та. Т. 3, 1938, стр. 5—14.
- Л а п т е в Б. Л. Жизнь и деятельность Н. И. Лобачевского. — В кн.: Сто двадцать пять лет неевклидовой геометрии Лобачевского. Гостехиздат, М.—Л., 1952, стр. 23—33.
- Л а п т е в Б. Л. Н. И. Лобачевский. — В кн.: Николай Иванович Лобачевский. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1943, стр. 5—18.
- Л а п т е в Б. Л. Теория параллельных линий в ранних работах Н. И. Лобачевского. — В кн.: Сто двадцать пять лет неевклидовой геометрии Лобачевского. Гостехиздат, М.—Л., 1952, стр. 99—116.
- Л е т н и к о в А. В. О теории параллельных линий Н. И. Лобачевского. — Мат. сб., 1868, т. 3.
- Л и т в и н о в а Е. Ф. Н. И. Лобачевский. Его жизнь и научная деятельность. СПб, 1895, 79 с.
- Л и д и с Н. К вопросу о естественнонаучном и философском значении геометрии Лобачевского. — Изв. АН ЛатвССР, 1960, № 3, стр. 33—44.
- Л о б а ч е в с к и й Н. И. Письма к И. Е. Великопольскому (1832—1842). Казань, 1902, 18 с.
- Л у н ц Г. Л. Аналитические работы Н. И. Лобачевского. — Усп. мат. наук, 1950, т. 5, вып. 1 (35), стр. 187—197.
- Л у н ц Г. Л. О работах Н. И. Лобачевского по математическому анализу. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 2. Физматгиз, М.—Л., 1949, стр. 9—71.
- М а т е р и а л ы для биографии Н. И. Лобачевского. Собр. и ред. М о д з а л е в с к и й Л. Б. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1948, 828 с. с илл.
- М о р д у х а й-Б о л т о в с к о й Д. Д. Лобачевский и основные логические проблемы в математике. — Изв. Сев.-Кавказск. ун-та, 1927, т. 12, вып. 1, стр. 78—96.
- М о р о з о в В. В. Об алгебраических рукописях Н. И. Лобачевского. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 4. Физматгиз, М., 1951, стр. 230—234.
- Мысли и высказывания Н. И. Лобачевского. — Усп. мат. наук, 1946, т. 1, вып. 1, стр. 15—21.
- Н а г а е в а В. М. Николай Иванович Лобачевский. — Вестн. высш. шк., 1955, т. 10, стр. 50—55.
- Н а г а е в а В. М. Н. И. Лобачевский как деятель просвещения. — В кн.: Труды Ин-та ист. естествозн. АН СССР. Т. 3, 1949, стр. 368—377.
- Н а г а е в а В. М. Педагогические взгляды и деятельность Н. И. Лобачевского. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 3. Физматгиз, М., 1950, стр. 76—153.
- Н и к о л а й И в а н о в и ч Л о б а ч е в с к и й. Сб. ст. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1943, 84 с.
- Н о в а к И. П. К вопросу об идентичности взглядов Н. И. Лобачевского и К. Маркса на главный пункт оснований дифференциального исчисления. — В кн.: Уч. зап. Казахск. ун-та. Т. 32. Философия. Вып. 1, 1957, стр. 64—70.
- Н о в а к И. П. Об истоках физико-математических и философских воззрений Н. И. Лобачевского. — В кн.: Уч. зап. Казахск. ун-та. Т. 40. Философия. Вып. 2, 1959, стр. 105—130.
- Н о р д е н А. П. Гаусс и Лобачевский. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 9. Физматгиз, М.—Л., 1956, стр. 145—168.

- Норден А. П. Геометрические идеи Лобачевского. — В кн.: Лобачевский Н. И. Три сочинения по геометрии. Гостехиздат, М., 1956, стр. 10—29.
- Норден А. П. Об изложении основных теорем геометрии Лобачевского. — В кн.: Сто двадцать пять лет неевклидовой геометрии Лобачевского. Гостехиздат, М.—Л., 1952, стр. 117—128.
- Парфентьев Н. Н. Историческая заметка по поводу одного метода решения численных алгебраических уравнений, данного Н. И. Лобачевским. — В кн.: Уч. зап. Казанск. ун-та. Т. 85, 1925, стр. 53—55.
- Парфентьев Н. Н. Неевклидова геометрическая система Н. И. Лобачевского и ее роль в истории развития физико-математических наук и теории познания. — В кн.: Празднование Казанским ун-том столетия открытия неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевского 24/II 1826 г. — 25/II 1926 г. Изд. Казанск. ун-та, Казань, 1927, стр. 34—54.
- Персидский К. П. О геометрии Лобачевского. — Вестн. АН КазССР, 1952, т. 4, стр. 82—85.
- Пономарев П. А. К биографии Лобачевского. — Изв. Казанск. физ.-мат. о-ва. Сер. 2, 1913, т. 19, стр. 1—27.
- Попов А. Ф. Воспоминание о службе и трудах Н. И. Лобачевского. — Мém. Univ. Kasan, 1857, vol. 4, p. 129—141.
- Привалова Н. И. Дом, в котором родился Н. И. Лобачевский. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 9. Физматгиз, М.—Л., 1956, стр. 49—64.
- Рогаченко В. Ф. К вопросу об открытии Н. И. Лобачевским метода приближенного решения численных алгебраических уравнений. — Докл. и сообщ. Львовск. ун-та, 1952, т. 3, вып. 2, стр. 40—41.
- Рогаченко В. Ф. Об открытии Н. И. Лобачевским метода приближенного решения численных алгебраических уравнений. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 6. Физматгиз, М., 1952, стр. 477—494.
- Розенфельд Б. А. Интерпретации геометрии Лобачевского. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 9. Физматгиз, М., 1956, стр. 169—208.
- Рукавицын И. Н. Н. И. Лобачевский (к столетию открытия неевклидовой геометрии). Иркутск, 1926, 32 с.
- Рыбкин Г. Ф. Материализм — основная черта мировоззрения Н. И. Лобачевского. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 3. Физматгиз, М., 1950, стр. 9—29.
- Рыбкин Г. Ф. Николай Иванович Лобачевский. — Вопр. ист. естествозн. и техн., 1956, т. 2, стр. 50—60.
- Рыбкин Г. Ф. Новые книги о Лобачевском. — В кн.: Труды Ин-та ист. естествозн. АН СССР. Т. 1, 1947, стр. 428—440.
- Рыбкин Г. Ф. Новые материалы в биографии Н. И. Лобачевского. — В кн.: Труды III Всесоюзн. мат. съезда. Т. 1. М., 1956, стр. 235.
- Рыбкин Г. Ф. О мировоззрении Н. И. Лобачевского. — Усп. мат. наук, 1951, т. 6, вып. 3 (43), стр. 18—30.
- Слугинов С. П. К столетнему юбилею новой геометрической теории Н. И. Лобачевского. — В кн.: Труды мат. сем. Пермск. ун-та. Т. 1, 1927, стр. 11—19.
- Синцов Д. М. Николай Иванович Лобачевский. Изд-во Харьковск. ун-та, 1941, 32 с.
- Сто двадцать пять лет неевклидовой геометрии Лобачевского. 1826—1951. Гостехиздат, М.—Л., 1952, 208 с.
- Файдель Ф. П. Николай Иванович Лобачевский. Перечень трудов и библиографических материалов. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1944, 24 с.
- Файдель Ф. П. и Шафрановский К. И. Печать в России о трудах Н. И. Лобачевского (1834—1856). — Вестн. АН СССР, 1944, № 3, стр. 127—131.
- Федоренко Б. В. Годы учения Н. И. Лобачевского и его первые геометрические исследования. — В кн.: Труды Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР. Т. 17, 1957, стр. 163—208.
- Федоренко Б. В. Некоторые сведения к биографии Н. И. Лобачевского. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 9. Физматгиз, М.—Л., 1956, стр. 65—76.
- Хилькевич Э. К. Геометрия Лобачевского и опыт. Философское значение творчества Лобачевского. Кн. изд-во, Тюмень, 1956.

- Хилькевич Э. К. Из истории распространения и развития идей Н. И. Лобачевского в 60—70-х годах XIX ст. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 2. Физматгиз, М., 1949, стр. 168—230.
- Хилькевич Э. К. Математические мотивы борьбы между сторонниками и противниками идей Лобачевского в 19 ст. — В кн.: Труды Сиб. физ.-техн. ин-та. Т. 27. Томск, 1952.
- Чеботарев Н. Г. Геометрия Лобачевского и ее значение в современной науке. — В кн.: Николай Иванович Лобачевский. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1943, стр. 56—82.
- Чистяков В. Д. О проникновении идей Лобачевского в среднюю школу. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 9. Физматгиз, М., 1956, стр. 247—270.
- Шамов Г. Ф. Роль Н. И. Лобачевского в создании восточного разряда в Казанском университете. Доклад на «Краеведческих чтениях». Казань, 1956, 15 с.
- Широков П. А. Краткий очерк основ геометрии Лобачевского. — В кн.: Николай Иванович Лобачевский. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1943, стр. 19—22.
- Широков П. А. Н. И. Лобачевский как творец новой геометрической системы. — Природа, 1943, № 6, стр. 51—59.
- Якунин П. Ф. О деятельности Н. И. Лобачевского в области народного просвещения. — В кн.: — Ист.-мат. исслед. Вып. 9. Физматгиз, М.—Л., 1956, стр. 129—144.
- Янишевский Э. П. Историческая записка о жизни и деятельности Н. И. Лобачевского. Казань, 1868, 59 с.
- Яновская С. А. О мировоззрении Н. И. Лобачевского. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 3. Физматгиз, М., 1950, стр. 30—75; вып. 4, 1951, стр. 173—200.
- Яновская С. А. Передовые идеи Н. И. Лобачевского — орудие борьбы против идеализма в математике. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1950, 84 с.

Н. Н. Лузин

См. библиографию к третьему тому настоящего издания.

А. М. Ляпунов

- Ляпунов А. М. Собр. соч. Т. 1—5. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1954—1965.
- Витензон И. Г. Работы А. М. Ляпунова по механике в харьковский период его деятельности. — В кн.: Зап. Харьковск. мат. о-ва. Т. 24. Вып. 4, 1956, стр. 75—89.
- Григорьян А. Т. Великий русский ученый А. М. Ляпунов. — В кн.: Труды Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР. Т. 19, 1957, стр. 284—289.
- Зубов В. И. Методы Н. М. Ляпунова и их применение. Изд-во ЛГУ, Л., 1957, 241 с.
- Крылов А. Н. Александр Михайлович Ляпунов. 1857—1919. Некролог. — Изв. Рос. акад. наук, 1919, т. 13, № 8-11, стр. 389—394. Отд. оттиск. — Птгр., 1921.
- Крылов Н. М. и Смирнов В. И. Памяти двух великих русских ученых второй половины XIX столетия: П. Л. Чебышева и А. М. Ляпунова. — В кн.: Зап. мат. кабинета Крымск. ун-та. Т. 3. Симферополь, 1921, стр. XXII—LII.
- Лукомская А. М. Александр Михайлович Ляпунов. Библиография. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1953, 268 с. с илл.
- Лукомская А. М. Библиографический указатель печатных трудов и материалов о жизни и деятельности А. М. Ляпунова. — В кн.: Ляпунов А. М. Избр. труды. Изд-во АН СССР, М., 1948, стр. 495—538.
- Ляпунов Александр Михайлович. — В кн.: Матер. для биограф. словаря действ. чл. Акад. наук. Ч. 1. Птгр., 1915, стр. 430—433.
- Ляпунов Б. М. Краткий очерк жизни и деятельности А. М. Ляпунова. — Изв. АН СССР. Отд. физ.-мат. наук, 1930, сер. 7, № 1, стр. 1—24.
- Моисеев Н. Д. Обзор истории развития понятия и теории устойчивости в смысле Ляпунова. — В кн.: Труды Военно-Возд. акад. Зап. сем. по теор. устойчив. движ. Т. 1. М., 1946.

- Полак Л. С. Александр Михайлович Ляпунов (к 100-летию со дня рождения). — *Вопр. ист. естествозн. и техн.*, 1957, т. 5, стр. 31—38.
- Смирнов В. И. Александр Михайлович Ляпунов. — В кн.: Ляпунов А. М. Собр. соч. Т. 1. Изд-во АН СССР, М., 1954, стр. 5—15.
- Смирнов В. И. Жизнь и деятельность А. М. Ляпунова. — В кн.: *Вопр. ист. отеч. науки*. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1949, стр. 100—112.
- Смирнов В. И. Научный архив А. М. Ляпунова по вопросам устойчивости и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — В кн.: *Труды III Всесоюзн. мат. съезда*. Т. 1. М., 1956, стр. 136.
- Смирнов В. И. Обзор научного творчества А. М. Ляпунова. — *Прикл. мат. и мех.*, 1948, № 12, вып. 5, стр. 479—560.
- Смирнов В. И. Очерк жизни А. М. Ляпунова. — В кн.: Александр Михайлович Ляпунов. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1953, стр. 11—18.
- Смирнов В. И. Очерк основных научных трудов А. М. Ляпунова. — В кн.: Ляпунов А. М. Избр. труды. Изд-во АН СССР, М., 1948, стр. 341—450.
- Соболев С. Л. О работах А. М. Ляпунова по теории потенциала. — *Прикл. мат. и мех.*, 1957, т. 21, вып. 3, стр. 306—308.
- Сологуб В. С. Дослідження О. М. Ляпунова та В. А. Стеклова з теорії потенціалу. — У кн.: *Нариси з іст. техн. і природозн.* Вип. 6. «Наукова думка», К., 1965, стор. 82—95.
- Стеглов В. А. Александр Михайлович Ляпунов. — *Изв. Рос. акад. наук*, 1919, т. 13, № 8-11, стр. 367—388.
- Стеглов В. и др. Об ученых трудах акад. А. М. Ляпунова. — В кн.: *Прот. засед. совета С.-Петербургск. ун-та за 1913 г.* № 69. СПб, 1915, стр. 196—198.
- Степанов В. В. и Калинин С. В. Александр Михайлович Ляпунов. — *Изв. АН СССР. Отд. техн. наук*, 1949, т. 2, стр. 161—167.
- Четаев Н. Г. Александр Михайлович Ляпунов. — В кн.: *Люди русской науки*. Физматгиз, М.—Л., 1961, стр. 200—206.

А. А. Марков

- Марков А. А. Избр. труды. Теория чисел. Теория вероятностей. Ред. Линника Ю. В. Изд-во АН СССР, Л., 1951, 719 с. с илл.
- Марков А. А. Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющихся от нуля. ГТТИ, М.—Л., 1948, 411 с.
- Андрей Андреевич Марков. — В кн.: *Люди русской науки*. Физматгиз, М., 1961, стр. 193—199.
- А. А. Марков. — В кн.: *Ист. естествозн. в России*. Т. 2. Изд-во АН СССР, М., 1960, стр. 94—97.
- Ахизер Н. И. Андрей Андреевич Марков (биографический очерк). — В кн.: Марков А. А. Избр. труды. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1948, стр. 9—12.
- Безикович А. Работы А. А. Маркова по теории вероятностей. — *Изв. Рос. акад. наук*, 1923, т. 17, № 1-18, стр. 45—52.
- Гнеденко Б. В. Андрей Андреевич Марков. — В кн.: *Люди русской науки*. Т. 1. Гостехиздат, М.—Л., 1948, стр. 179—185.
- Гюнтер Н. М. О педагогической деятельности А. А. Маркова. — *Изв. Рос. акад. наук*, 1923, т. 17, № 1-18, стр. 35—44.
- Делоне Б. Н. О работе А. А. Маркова «О бинарных квадратичных формах положительного определителя». — *Усп. мат. наук*, 1948, т. 3, вып. 5 (27), стр. 3—5.
- Кольцов А. В. Некоторые материалы к биографии академика А. А. Маркова. — *Вопр. естествозн. и техн.*, 1956, т. 1, стр. 204—207.
- Линник Ю. В. и др. Очерк работ А. А. Маркова по теории чисел и теории вероятностей. — В кн.: Марков А. А. Избр. труды. Изд-во АН СССР, М., 1951, стр. 614—642. Комментарии — стр. 643—678.
- Марков А. А. — В кн.: *Матер. для биограф. словаря действ. чл. Акад. наук*. Ч. 2. Птгр., 1917, стр. 16—18.
- Марков А. А. (биография). — В кн.: Марков А. А. Избр. труды. Изд-во АН СССР, М., 1951, стр. 599—613.

- Минковский В. Л. Педагогические идеи и деятельность академика А. А. Маркова. — Матем. в shk., 1952, № 5, стр. 10—16.
- Новлянская М. Г. К тридцатилетию со дня смерти акад. А. А. Маркова. — Усп. мат. наук, 1952, т. 7, вып. 6., стр. 213—215.
- Сарманов О. В. Создатель понятия математической цепи (к 100-летию со дня рождения А. А. Маркова). — Природа, 1956, № 11, стр. 73—76, с портр.
- Стеклов В. А. Андрей Андреевич Марков. Некролог. — Изв. Рос. акад. наук, 1922, т. 16, № 1-18, стр. 169—184. Отд. оттиск. — Л., 1924.
- Стеклов В. и др. Об ученых трудах акад. А. А. Маркова. — В кн.: Прот. засед. совета С.-Петербургск. ун-та за 1913 г, № 69. СПб, 1915, стр. 193—196.
- Успенский Я. В. Очерк научной деятельности А. А. Маркова. — Изв. Рос. акад. наук, 1923, т. 17, № 1-18, стр. 19—34.

Б. К. Млодзеевский

- Егоров Д. Ф. Болеслав Корнелиевич Млодзеевский. — Мат. сб., 1925, т. 32, вып. 3, стр. 449—452.
- Российский С. Д. Болеслав Корнелиевич Млодзеевский. 1858—1923. Изд-во МГУ, М., 1950, 52 с. с илл.

Ф. Э. Молин

- Канунов Н. Ф. Фробениус и Молин. — В кн.: Уч. зап. Кабард.-Балкарск. ун-та. Вып. 19, 1963, стр. 155—157.
- Куликовский Н. Н. Об изучении научного наследства и архива Ф. Э. Молина. — В кн.: Труды Томск. ун-та. Т. 163, 1963, стр. 3—5.
- Молин Ф. Э. Некролог. — Изв. НИИ мат. и мех. при Томск. ун-те, 1946, т. 3, вып. 1, стр. 1—2.
- Ф. Э. Молин. — В кн.: Левицкий Г. В. Биограф. словарь проф. и препод. Юрьевск., б. Дерптск. ун-та за 100 лет его существов. Т. 1. Юрьев, 1902, стр. 173—175.
- Ряго Г. Из жизни и деятельности четырех замечательных математиков Тартуского университета. — В кн.: Уч. зап. Тартуск. ун-та. Вып. 37, 1955, стр. 74—103 (о Молине и Колосове).

Д. Д. Мордухай-Болтовской

- Минковский В. Л. К пятидесятилетию научно-педагогической деятельности профессора Д. Д. Мордухай-Болтовского. — Матем. в shk., 1949, № 2, стр. 45—47, с. портр.
- Несторович Н. По поводу 40-летия научной, педагогической и общественной деятельности проф. Дмитрия Дмитриевича Мордухай-Болтовского. Обл. ведомств. изд-во, Ростов-на-Дону, 1940, 9 с., с портр.
- Черняев М. П., Несторович Н. М. и Ляпин Н. М. Дмитрий Дмитриевич Мордухай-Болтовской (1876—1952). — Усп. мат. наук, 1953, т. 8, вып. 4 (56), стр. 131—139.

П. С. Назимов

- Васильев А. Петр Сергеевич Назимов (1851—1901). Некролог. Казань 1903, 6 с.

П. А. Некрасов

- Имшенецкий В. Г. Отзыв о работе П. А. Некрасова «Исследование уравнений вида: $u^m - pu^n - q = 0$ ». М., 1883.
- Слугин С. П. П. А. Некрасов. Некролог. — В кн.: Труды мат. сем. Пермск. ун-та. Т. 1. Пермь, 1927, стр. 37—38.

Ф. Норвайша

Жемайтис З. Выдающийся профессор математики старого Вильнюсского университета Франциск Норвайша (1742—1819). — Литовск. мат. сб., 1964, т. 4, № 2, стр. 261—290.

М. Ф. Окатов

Записка об ученых трудах экстраординарного профессора М. Ф. Окатова со времени избрания его в 1868 г. в звание экстраординарного профессора. — В кн.: Прот. засед. совета С.-Петербургск. ун-та за втор. полов. 1872/73 акад. года. № 8. СПб., 1874, стр. 78—79.

Т. Ф. Осиповский

- Бахмутская Э. Я. Тимофей Федорович Осиповский. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 5. Физматгиз, М., 1952, стр. 28—74.
- Кравец И. Н. Т. Ф. Осиповский — выдающийся русский ученый и мыслитель. Изд-во АН СССР, М., 1955, 104 с. с илл.
- Кравец И. Н. Т. Ф. Осиповский — выдающийся русский философ-материалист и естествоиспытатель. — Вопр. филос., 1951, № 5, стр. 111—121.
- Прудников В. Е. Дополнительные сведения о Т. Ф. Осиповском. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 5. Физматгиз, М., 1952, стр. 75—83.
- Рыбкин Г. Ф. Материалистические черты мировоззрения М. В. Остроградского и его учителя Т. Ф. Осиповского. — Усп. мат. наук, 1952, т. 7, вып. 2, стр. 123—144.
- Симонов Р. А. Борьба Т. Ф. Осиповского против мистики в математике. — Матем. в shk., 1955, № 5, стр. 11—14.
- Чириков Г. С. Тимофей Федорович Осиповский. — Русская старина, 1876, ноябрь.

М. В. Остроградский

- Остроградский М. В. Полн. собр. трудов. Т. 1—3. Изд-во АН УССР, К., 1959—1961.
- Алексеев В. Г. Михаил Васильевич Остроградский. Биография. Юрьев, 1902, 36 с.
- Антропова В. И. К истории интегральной теоремы М. В. Остроградского. — В кн.: Труды Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР. № 17, 1957, стр. 229—269.
- Антропова В. И. Михаил Васильевич Остроградский. — Вестн. высш. shk., 1954, № 9, стр. 49—56.
- Антропова В. И. О работах Фурье, Остроградского и Пуассона по теплопроводности в жидкостях. — Вопр. ист. естествозн. и техн., 1957, № 3, стр. 49—61.
- Антропова В. И. Публичные лекции по интегральному исчислению М. В. Остроградского. — В кн.: Труды Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР. № 5, 1955, стр. 304—320.
- Бурачек С. О. Математические лекции г. академика Остроградского. СПб, 1836, 31 с.
- Васильев А. В. М. В. Остроградский. Казань, 1904, 8 с.
- Гнеденко Б. В. Выдающийся русский ученый М. В. Остроградский. «Знание», М., 1952, 24 с.
- Гнеденко Б. В. Михаил Васильевич Остроградский. Очерки жизни, научного творчества и педагогической деятельности. ГТТИ, М., 1952, 332 с.
- Гнеденко Б. В. Михаил Васильевич Остроградский. — В кн.: Люди русской науки. Т. 1. Гостехиздат, М.—Л., 1948, стр. 99—104.
- Гнеденко Б. В. Михаил Васильевич Остроградский. — Усп. мат. наук, 1951, т. 6, вып. 5(45), стр. 3—25.

- Гнеденко Б. В. О работах М. В. Остроградского по теории вероятностей. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 4. Физматгиз., М., 1951, стр. 99—123.
- Гнеденко Б. В. и Погребысский И. Б. Михаил Васильевич Остроградский. 1801—1862. Жизнь и работа. Научное и педагогическое наследие. Изд-во АН СССР, М., 1963, 271 с. с илл.
- Гнеденко Б. В. і Ремез Е. Я. Попередні повідомлення про рукописи М. В. Остроградського. — Вісн. АН УРСР, 1951, т. 8, стор. 52—63.
- Григорьян А. Т. Михаил Васильевич Остроградский. — Изд-во АН СССР, М., 1961, 91 с. с илл.
- Григорьян А. Т. Михаил Васильевич Остроградский— выдающийся русский ученый. Учпедгиз, М., 1953, 40 с.
- Григорьян А. Т. Роль М. В. Остроградского в развитии механики в России. — В кн.: Труды Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР. Т. 28, 1959, стр. 250—258.
- Делоне Б. Н. М. В. Остроградский и его работы в области математического анализа. — Природа, 1952, № 2, стр. 77—81.
- Депман И. Я. Дополнительные сведения о педагогической деятельности М. В. Остроградского. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 4. Физматгиз, М., 1951, стр. 160—170.
- Жуковский Н. Е. М. В. Остроградский. — В кн.: Жуковский Н. Е. Собр. соч. Т. 7. ОНТИ, М., 1947, стр. 250—257.
- Жуковский Н. Е. Некоторые черты из жизни Остроградского. Изд. Московск. мат. о-ва, М., 1902, VIII, 19 с. с илл.
- Жуковский Н. Е. Ученые труды М. В. Остроградского по механике. — Мат. сб., 1901, т. 22, стр. 555—573.
- Конфорович А. Г. Вшанування пам'яті М. В. Остроградського полтавським гуртком любителів фізико-математичних наук. — У кн.: Методика викладання математики. Вип. 1, 1964, стор. 157—163.
- Кропотов А. И., Марон И. А. М. В. Остроградский и его педагогическое наследие. Учпедгиз, М., 1961, 204 с.
- Куликовский Н. Н. К истории установления Остроградским интегрального вариационного принципа механики. — В кн.: Уч. зап. Томск. пед. ин-та. Т. 8, 1951, стр. 207—220.
- Ляхтин Л. К. Работы М. В. Остроградского в области анализа. — Мат. сб., 1902, т. 22, вып. 4, стр. 540—554.
- Макарова В. И. Забытый портрет М. В. Остроградского. — В кн.: Труды Ин-та ист. естествозн. и техн. АН СССР. Т. 1, 1954, стр. 317—319.
- Марон И. А. Академик М. В. Остроградский как организатор преподавания математических наук в военно-учебных заведениях в России. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 3. Физматгиз, М.—Л., 1950, стр. 197—340.
- Марон И. А. Общие педагогические взгляды М. В. Остроградского. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 4. Физматгиз, М., 1951, стр. 124—159.
- Михаил Васильевич Остроградский. Педагогическое наследие. Документы о жизни и деятельности. Под ред. И. Б. Погребысского и А. П. Юшкевича. Физматгиз, М., 1961, 399 с. с илл.
- Михаил Васильевич Остроградский. Празднование столетия дня его рождения Полтавским кружком любителей физико-математических наук. Сб. Полтава, 1902, 140 с.
- Отрадных Ф. П. Михаил Васильевич Остроградский. Изд-во ЛГУ, Л., 1953, 103 с.
- Памяти М. В. Остроградского. — Вестн. опытно. физ. и элем. мат., 1901, № 305, стр. 97—101.
- Письма академика Остроградского к профессору Брашману. — Мат. сб., 1866, т. 1, стр. XXVII—XXXVIII.
- Прудников В. Е. Четыре письма к М. В. Остроградскому. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 7. Физматгиз, М., 1954, стр. 716—719.
- Пулята Т. В. і Фрадлін Б. Н. Михайло Васильович Остроградський. До 150-річчя з дня народження. Держтехвидав УРСР, К., 1951, 78 с. з іл.
- Ремез Е. Я. О математических рукописях академика М. В. Остроградского. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 4. Физматгиз, М., 1951, стр. 9—98.

- Рыбкин Г. Ф. Материалистические черты мировоззрения М. В. Остроградского и его учителя Т. Ф. Осиповского. — Усп. мат. наук, 1952, т. 7, вып. 2 (48), стр. 123—144.
- Сабинин Е. Ф. Михаил Васильевич Остроградский. Одесса, 1881, 32 с.
- Свешников А. Г. Об одной работе М. В. Остроградского. — Усп. мат. наук, 1953, т. 8, вып. 1 (53), стр. 101—102.
- Синцов Д. К празднованию столетия дня рождения М. В. Остроградского. — Вестн. опытно-физ. и элем. мат., 1903, т. 29, № 2, стр. 34—37.
- Сомов И. И. Очерк жизни и ученой деятельности М. В. Остроградского. — В кн.: Зап. Акад. наук. Т. 3, 1863, стр. 1—26.
- Хилькевич Э. К. Об одном замечании М. В. Остроградского по поводу первой аксиомы геометрии. — Вопр. ист. естествозн. и техн., 1957, т. 5, стр. 162—165.
- Штокало И. З. Труды М. В. Остроградского по математической физике. — Укр. мат. журн., 1952, т. 4, вып. 1.
- Штокало И. З. и Погребысский И. Б. Об издании полного собрания научных трудов М. В. Остроградского. — В кн.: Труды III Всесоюзн. мат. съезда. Т. 1. Изд-во АН СССР, М., 1956, стр. 233.

Н. Н. Парфентьев

См. библиографию к третьему тому настоящего издания.

И. М. Первушин

- Жогин И. И. Иван Михеевич Первушин (к 130-летию со дня рождения). — В кн.: Научн.-метод. сб. Шадринск. пед. ин-та. Вып. 1, 1957, стр. 325—330.
- Латгин Л. К. По поводу одной теоремы теории чисел, найденной эмпирически отцом И. М. Первушиным. Изд. Московск. мат. о-ва, М., 1892, 9 с.
- Райк А. Е. Уральский математик Иван Михеевич Первушин. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 6. Физматгиз, М., 1953, стр. 535—572.

Д. М. Перовщиков

- Касьянюк С. А. Дмитрий Матвеевич Перовщиков. — Матем. в шк., 1953, № 1, стр. 75—79.

К. М. Петерсон

- Депман И. Я. Карл Михайлович Петерсон и его кандидатская диссертация. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 5. Физматгиз, М., 1952, стр. 134—164.
- Егоров Д. Ф. Работы К. М. Петерсона по теории уравнений с частными производными. — Мат. сб., 1903, т. 24, стр. 22—29.
- Млодзеевский Б. К. Карл Михайлович Петерсон и его геометрические работы. — Мат. сб., 1903, т. 24, стр. 1—21.
- Россинский С. Д. Карл Михайлович Петерсон (1828—1881). — Усп. мат. наук, 1949, т. 4, вып. 5 (33), стр. 3—13.
- Россинский С. Д. Комментарии к диссертации К. М. Петерсона «Об изгибании поверхностей». — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 5. Физматгиз, М., 1952, стр. 113—133.

П. М. Покровский

- Пшеборский А. П. Памяти Петра Михайловича Покровского. М., 1901, 33 с. с илл.
- Пшеборский А. П. Петр Михайлович Покровский. — В кн.: Отч. и прот. Физ.-мат. о-ва при Имп. Киевск. ун-те. К., 1901, стр. 63—68.

А. Ф. Попов

- Бычков В. П. Казанский математик Александр Федорович Попов. — В кн.: Уч. зап. Тираспольск. пед. ин-та. Вып. 5, 1957, стр. 143—149.
Износков И. А. Воспоминания о бывшем профессоре Казанского университета Александре Федоровиче Попове. Казань, 1883, 6 с.
Имшенецкий И. Г. Воспоминания о бывшем профессоре Казанского университета Александре Федоровиче Попове. Казань, 1883, 5 с.

П. С. Порецкий

- Васильев А. В. Очерк статей П. С. Порецкого: Новые законы логических равенств. — Изв. Казанск. физ.-мат. о-ва. Сер. 2, б/г, т. 9, № 4, стр. 51.
Дубяго Д. И. П. С. Порецкий. Некролог. Казань, 1908, 5 с.
Памяти Платона Сергеевича Порецкого. Одесса, 1909, с портр.
Стяжкин Н. И. К вопросу о вкладе П. С. Порецкого в развитие математической логики. — Вестн. Московск. ун-та. Сер. экон., филос. и права, 1956, т. 1, стр. 108—109.
Стяжкин Н. И. Упрощение П. С. Порецким некоторых алгоритмов классического исчисления высказываний. — В кн.: Логические исследования. Изд-во АН СССР, М., 1959, стр. 33—47.

И. Л. Пташицкий

- И. Л. Пташицкий. Некролог. — В кн.: Отч. о сост. и деят. С.-Петербургск. ун-та за 1912 г. СПб, 1913, стр. 9—17.
Поссе К. И. Л. Пташицкий. Некролог. — Сообщ. Харьковск. мат. о-ва. Сер. 2, 1913, т. 13, стр. 247—252.

Г. В. Пфейффер

См. библиографию к третьему тому настоящего издания.

И. И. Рахманинов

- Суслов Г. Некролог профессора И. И. Рахманинова. — Универс. изв. К., 1898, № 5, стр. 32—36.

А. Н. Савич

- Записка об ученых трудах заслуженного профессора Алексея Николаевича Савича. — В кн.: Прот. засед. совета С.-Петербургск. ун-та за перв. полов. 1874/75 акад. года. № 11. СПб, 1875, стр. 46—47.
А. Н. Савич. Некролог. — В кн.: Годичный акт С.-Петербургск. ун-та, 8 февр. 1884 г. СПб, 1884, стр. 4—7.
Селиханович В. Г. Алексей Николаевич Савич (1810—1833). Геодезиздат, М., 1957, 77 с., с портр.

Я. А. Севастьянов

- Гусев В. А. Первый русский профессор начертательной геометрии Я. А. Севастьянов (1796—1849). — В кн.: Труды Ин-та ист. естествозн. АН СССР. Т. 4, 1952, стр. 184—194.

Д. М. Синцов

- Лукомская А. Н. Библиографическая деятельность Д. М. Синцова (из материалов к истории русской и физ.-мат. библиографии). — В кн.: Труды Б-ки АН СССР. Т. 2, 1955, стр. 206—214.
- Наумов И. А. Дмитрий Матвеевич Синцов (очерк жизни и научной деятельности). Изд-во Харьковск. ун-та, Харьков, 1955, 72 с., с портр.
- Наумов И. О. Роботи Д. М. Синцова з теорії конексів і їх застосування до теорії диференціальних рівнянь. — У кн.: Іст.-мат. зб. Вип. 3. Вид-во АН УРСР, К., 1962, стор. 58—74.

Ф. А. Слудский

- Жуковский Н. Е. Биография и ученые труды проф. Ф. А. Слудского. — В кн.: Жуковский Н. Е. Собр. соч. Т. 7. ОНТИ, М., 1947.
- Замечания Ф. А. Слудского по поводу составленного им курса теоретической механики. — Мат. сб., 1898, т. 20, стр. 337—349, 350—352.
- Жуковский Н. Е. Ф. А. Слудский. — В кн.: Жуковский Н. Е. Полн. собр. соч. Т. 9, ОНТИ, М.—Л., 1937, стр. 375—386.

В. И. Смирнов

См. библиографию к третьему тому настоящего издания.

Я. Снядецкий

- Рыбка Е. В. Ян Снядецкий (к 200-летию со дня рождения). — В кн.: Ист.-астроном. исслед. Вып. 11, Физматгиз, М., 1956.

О. И. Сомов

- Золотарев Е. И. Об ученых трудах академика О. И. Сомова. СПб, 1877, 19 с.
- Крамар Ф. Д. и Молюков И. Д. Иосиф Иванович Сомов (1815—1819). Математик, механик, педагог. Изд. Казахск. ун-та им. С. М. Кирова, Алма-Ата, 1965, 123 с.
- Никифорова Т. Р. Осип Иванович Сомов. «Наука», М.—Л., 1964, 128 с.
- Сомов А. И. Осип Иванович Сомов. СПб, 1876.

Н. Я. Сонин

- Ахизер Н. И. Работа Н. Я. Сонины по приближенному вычислению определенных интегралов. — В кн.: Сонин Н. Я. Исслед. о цилинд. функциях и спец. полиномах. Гостехиздат, М., 1954, стр. 219—243.
- Имшенецкий В. Г., Чебышев П. Л. и Марков А. А. Отзыв о работах Н. Я. Сонины. — В кн.: Зап. Акад. наук. Т. 67, 1892, стр. 16—21.
- Кропотов А. И. Научное наследие академика Н. Я. Сонины. — В кн.: Научн. зап. Ленинградск. фин.-эконом. ин-та. Т. 13, 1953, стр. 153—189.
- Марков А. А. Николай Яковлевич Сонин. Некролог. — Изв. Акад. наук, 1915, т. 9, № 5, стр. 369—372.
- Мордухай-Болтовской Д. Д. Очерк научной деятельности Н. Я. Сонины. Харьков, 1916, 34 с., с портр.

- Парфентьев Н. Н. Памяти ординарного академика Н. Я. Сони́на. Казань, 1915, 19 с.
- Поссе К. Н. Я. Сонин. Некролог. — Журн. Мин. нар. просв., 1915, ч. 7, июнь, стр. 105—124.
- Сонин Николай Яковлевич. — В кн.: Матер. для биограф. словаря действ. чл. Акад. наук. Ч. 2. Птгр., 1917, стр. 170—173.

Ю. В. Сохоцкий

- Коркин А. Записка об ученых трудах профессора Ю. В. Сохоцкого. — В кн.: Прот. засед. совета С.-Петербургск. ун-та за перв. полов. 1882/83 акад. года. № 27. СПб, 1883, стр. 66—67.
- Маркушевич А. И. Вклад Ю. В. Сохоцкого в общую теорию аналитических функций. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 3. Физматгиз, М., 1950, стр. 399—406.

В. А. Стеклова

- Ахизер Н. И. К 90-летию со дня рождения Владимира Андреевича Стеклова. — В кн.: Труды Харьковск. политехн. ин-та. Т. 5. Сер. инж.-физ. Вып. 1, 1955, стр. 3—14.
- Бахмутская Э. Я. Некоторые сведения о педагогической деятельности В. А. Стеклова в Харьковском технологическом институте. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 6. Физматгиз, М., 1952, стр. 529—534.
- Владимир Андреевич Стеклова. — В кн.: Люди русской науки. Физматгиз, М., 1961, стр. 271—276.
- Галеркин Б. Г. Труды В. А. Стеклова по теории упругости. — В кн.: Памяти В. А. Стеклова. Изд-во АН СССР, Л., 1928, стр. 23—28.
- Гюнтер Н. М. О научных достижениях В. А. Стеклова. — В кн.: Памяти В. А. Стеклова. Сб. ст. Изд-во АН СССР, Л., 1928, стр. 1—12.
- Гюнтер Н. М. Труды В. А. Стеклова по математической физике. — В кн.: Памяти В. А. Стеклова. Сб. ст. Изд-во АН СССР, Л., 1928, стр. 49—77; Усп. мат. наук, 1946, т. 1, № 3-4 (13-14), стр. 23—43.
- Депман И. Я. В. А. Стеклова в Петербургском университете. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 6. Физматгиз, М., 1953, стр. 509—528.
- Кольцов А. В. Академик В. А. Стеклова — вице-президент АН СССР. — Вопр. ист. естествозн. и техн., 1959, вып. 7, стр. 107—112.
- Кузьмин Р. О. О работах В. А. Стеклова по теории механических квадратур. — В кн.: Памяти В. А. Стеклова. Сб. ст. Изд-во АН СССР, Л., 1928, стр. 78—85.
- Мещерский И. В. Гидродинамические труды В. А. Стеклова. — В кн.: Памяти В. А. Стеклова. Сб. ст. Изд-во АН СССР, Л., 1928, стр. 29—48.
- Никифоров П. М. В. А. Стеклова. — Природа, 1926, № 9-10, стр. 3—20.
- Памяти В. А. Стеклова. Сб. ст. Изд-во АН СССР, Л., 1928, 92 с.
- Смирнов В. И. Владимир Андреевич Стеклова. Биографический очерк. — В кн.: Памяти В. А. Стеклова. Сб. ст. Изд-во АН СССР, Л., 1928, стр. 15—22.
- Смирнов В. И. В. А. Стеклова. — Усп. мат. наук, 1946, т. 1, вып. 3-4, стр. 17—23.
- Смирнов В. И. Памяти Владимира Андреевича Стеклова. — В кн.: Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. Т. 73, 1964, стр. 5—13.
- Смирнов В. И. Работы В. А. Стеклова о разложениях по ортогональным функциям. — В кн.: Юбил. сб., посвящ. тридцатилетию Великой Октябрьской социалистической революции. Т. 1. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1947, стр. 186—213.
- Сологуб В. С. Дослідження О. М. Ляпунова та В. А. Стеклова з теорії потенціалу. — У кн.: Нариси з іст. техн. і природозн. Вип. 6. «Наукова думка», К., 1965, стор. 82—95.
- Стеклова Владимир Андреевич. — В кн.: Матер. для биограф. словаря действ. чл. Акад. наук. Ч. 2. Птгр., 1917, стр. 173—177.

- Успенский Я. В. Владимир Андреевич Стеклов. Некролог. — Изв. Акад. наук, 1926, т. 20, № 10-11, стр. 837—856.
- Успенский Я. В., Гюнтер Н. М., Смирнов В. И. В. А. Стеклов как ученый. — Научный работник, 1926, № 5-6, стр. 12—21.

А. Н. Страннолюбский

- Граціанська Л. М. Олександр Миколайович Страннолюбський. — У кн.: Наук. зап. Київськ. ун-ту. Т. 11. Вып. 7. Мат. зб. № 6, 1952, стор. 111—116.
- Прудников В. Е. А. Н. Страннолюбский — педагог и математик. — В кн.: Памяти С. В. Ковалевской. Изд-во АН СССР, М., 1951, стр. 120—132.

Ф. М. Суворов

- Ефимов М. Ф. Воспоминания о профессоре Ф. М. Суворове. Казань, 1912, 4 с.
- Олоничев П. М. Казанский геометр Федор Матвеевич Суворов. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 9. Физматгиз, М., 1956, стр. 271—316.
- Парфентьев Н. Н. Памяти профессора Ф. М. Суворова. Казань, 1911, 15 с.
- Слугинов С. Ф. М. Суворов (биографический очерк). — Изв. Казанск. физ.-мат. о-ва. Сер. 2, 1912, т. 18, стр. 140—143.

Г. К. Суслов

- Профессор Г. К. Суслов. — Наука и техника, 1927, № 5, стр. 1—8.
- Сборник статей, посвященных профессору Г. К. Сулову. К., 1911, 6/п.
- Слугинов С. П. К 45-летию юбилею научно-педагогической деятельности проф. Г. К. Сулова. — Журн. Физ.-мат. о-ва при Пермск. ун-те, 1927, т. 4, стр. 89—93.

И. Ю. Тимченко

- Киро С. Н. И. Ю. Тимченко (к 100-летию со дня рождения). — Вопр. ист. естествозн. и техн., 1964, вып. 17, стр. 123—126.

М. А. Тихомандрицкий

- Тихомандрицкий М. А. Очерк педагогической и научной деятельности. — В кн. Зап. мат. кабинета Крымск. ун-та. Т. 2, 1921, стр. XX—XXXII.

Н. А. Умов

- Жуковский Н. Е. Николай Алексеевич Умов как математик. М., 1916, 6 с.
- Лазарев П. П. Николай Алексеевич Умов (1846—1915). Изд. Московск. о-ва испыт. природы, М., 1940, 39 с.
- Умов Н. А. Автобиография. — В кн.: Научное наследие, естественнонаучная серия. Т. 2. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1951, стр. 363—397.

В. Я. Цингер

- Андреев К. А. Василий Яковлевич Цингер. Его жизнь и деятельность. М., 1909, 39 с.
- Андреев К. Василий Яковлевич Цингер. — В кн.: Отч. Имп. Московск. ун-та за 1907 г. М., 1908.
- Профессор Василий Яковлевич Цингер. К., 1898, 4 с.

Е. С. Федоров

Делоне Б. Н. Е. С. Федоров как геометр. — В кн.: Труды Ин-та ист. естеств. и техн. АН СССР. Т. 10, 1956, стр. 5—12.
Шафрановский И. И. Евграф Степанович Федоров. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1963, 284 с. с илл.

П. Н. Фусс

Struve O. E'loge de P. N. Fuss. — Compte rendus de l'Acad. des Sci. de St-P., 1856, p. 89—122.

С. А. Чаплыгин

См. библиографию к третьему тому настоящего издания.

П. Л. Чебышев

- Чебышев П. Л. Полн. собр. соч. Т. 1—5. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1944—1951.
- Артоболевский И. И. Роль и значение П. Л. Чебышева в истории развития теории механизмов. — Изв. АН СССР, 1945, № 4-5, стр. 396—413.
- Артоболевский И. И. и Левитский Н. И. П. Л. Чебышев и русская теория механизмов. — В кн.: Труды Сем. по теор. маш. и мех. Ин-та машиновед. АН СССР. Вып. 5, 1947.
- Ахизер Н. И. Краткий обзор трудов П. Л. Чебышева. — В кн.: Чебышев П. Л. Избр. мат. труды. ГТТИ, М.—Л., 1946, стр. 171—189.
- Ахизер Н. И. П. Л. Чебышев и его научное наследие. — В кн.: Чебышев П. Л. Избр. труды. Изд-во АН СССР, М., 1955, стр. 843—887.
- Бенштейн С. Н. Академик П. Л. Чебышев. — Природа, 1945, № 3, стр. 78—86.
- Бенштейн С. Н. Конструктивная теория функций как развитие идей Чебышева. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1945, т. 9, стр. 145—158.
- Бенштейн С. Н. О математических работах П. Л. Чебышева. — Природа, 1935, № 2, стр. 1—6.
- Бенштейн С. Н. О работах П. Л. Чебышева по теории вероятностей. — В кн.: Научн. наследие П. Л. Чебышева. Т. 1. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1945, стр. 43—68.
- Бенштейн С. Н. Чебышев, его влияние на развитие математики. — В кн.: Уч. зап. Московск. ун-та. Т. 91. Роль русской науки в развитии мировой науки и культуры. Т. 1. Кн. 1, 1947, стр. 35—45.
- Беспамятных Н. Д. Участие П. Л. Чебышева в работе съездов русских естествоиспытателей. — В кн.: Уч. зап. Гродненск. пед. ин-та. Т. 1, 1955, стр. 13—16.
- Бычков Б. П. К вопросу о значении работы П. Л. Чебышева «О кройке одежды» для дальнейших геометрических исследований. — В кн.: Матер. I конф. историков естествозн. и техн. Молдавии 17 мая 1962 г. Изд-во АН МолдССР, Кишинев, 1962, стр. 170—178.
- Виноградов И. М. и Делоне Б. Н. Работы П. Л. Чебышева по теории чисел. — В кн.: Научн. наследие П. Л. Чебышева. Т. 1. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1945, стр. 69—88.
- Гнеденко Б. В. Об одной работе П. Л. Чебышева, не вошедшей в полное собрание сочинений. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 6. Физматгиз, М., 1953, стр. 215—216.

- Г о л у б е в В. В. Работы П. Л. Чебышева по интегрированию алгебраических функций. — В кн.: Научн. наследие П. Л. Чебышева. Т. 1. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1945, стр. 88—121.
- Г у р о в С. П. и Х р о м и е н к о в Н. А. Великий русский ученый П. Л. Чебышев (к 140-летию со дня рождения). Кн. изд-во. Калуга, 1961, 55 с. с илл.
- Д а х и я С. А. П. Л. Чебышев и популяризация математики в России. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 6. Физматгиз, М., 1953, стр. 239—244.
- Д е л о н е Б. Н. Академик Пафнутий Львович Чебышев и русская школа математики. Изд-во АН СССР, М., 1945, 9 с.
- Д е л о н е Б. Н. и В и н о г р а д о в И. М. Работы П. Л. Чебышева по теории чисел. — В кн.: Научн. наследие П. Л. Чебышева. Т. 1. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1945, стр. 69—88.
- Д е п м а н И. Я. Достижения русской теории чисел. Чебышев. — Сов. школа Эстонии, 1951, № 5, стр. 402.
- К и с е л е в А. А. и О ж и г о в а Е. П. П. Л. Чебышев на съездах русских естествоиспытателей и врачей. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 15. Физматгиз, М., 1963, стр. 291—317.
- К о р к и н А. Записка о деятельности профессора П. Л. Чебышева, читанная в заседании совета 1 мая 1872 г. — В кн.: Прот. засед. совета С.-Петербургск. ун-та за втор. полов. 1871/72 акад. года. № 6. СПб, 1873, стр. 78—79.
- К р е й н М. Г. Идеи П. Л. Чебышева и А. А. Маркова в теории предельных величин интегралов и их дальнейшее развитие. — Усп. мат.-наук, 1951, т. 6, вып. 4, стр. 3—121.
- К р ы л о в А. Н. Пафнутий Львович Чебышев. Биографический очерк. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1944, 31 с.
- Л я п у н о в А. М. Пафнутий Львович Чебышев. Харьков, 1895, 18 с.
- Л я п у н о в А. М. Пафнутий Львович Чебышев. — В кн.: Ч е б ы ш е в П. Л. Избр. мат. труды. ГТТИ, М.—Л., 1946, стр. 9—21.
- О т р а д н ы х Ф. П. Жизнь и творчество П. Л. Чебышева. «Сов. наука», М., 1953, 36 с.
- П. Л. Чебышев. — В кн.: Отч. по С.-Петербургск. ун-ту за 1882 г. СПб, 1883, стр. 7—9.
- П. Л. Чебышев и петербургская математическая школа. — В кн.: Ист. естествозн. в России. Т. 2. Изд-во АН СССР, М., 1960, стр. 57—64.
- П р у д н и к о в В. Е. Академик П. Л. Чебышев и русская школа. — В кн.: Труды Ин-та ист. естествозн. Т. 3, 1949, стр. 117—135.
- П р у д н и к о в В. Е. К вопросу о работах П. Л. Чебышева по астрономии. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 10. Физматгиз, М., 1957, стр. 639—648.
- П р у д н и к о в В. Е. Московское математическое общество и П. Л. Чебышев. — Природа, 1949, № 4, стр. 53—56.
- П р у д н и к о в В. Е. Новые материалы к биографии П. Л. Чебышева. — Усп. мат. наук., 1949, т. 4, вып. 2 (30), стр. 173—175.
- П р у д н и к о в В. Е. О статьях П. Л. Чебышева, М. В. Остроградского, В. Я. Буняковского и И. И. Сомова в «Энциклопедическом словаре», составленном русскими учеными и литераторами. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 6. Физматгиз, 1953, стр. 223—244.
- П р у д н и к о в В. Е. Педагогическое наследие П. Л. Чебышева. — Матем. в shk., 1948, № 6, стр. 28—33.
- П р у д н и к о в В. Е. П. Л. Чебышев — выдающийся педагог отечественной высшей школы. — Вестн. высш. shk., 1954, № 12, стр. 52—55.
- П р у д н и к о в В. Е. П. Л. Чебышев и артиллерийская наука в России в XIX веке. — Природа, 1950, № 7, стр. 75—80.
- П р у д н и к о в В. Е. П. Л. Чебышев и Московский университет 40-х годов XIX века. — В кн.: Ист.-мат. исслед. Вып. 1. Физматгиз, М.—Л., 1948, стр. 184—224.
- П р у д н и к о в В. Е. П. Л. Чебышев, ученый и педагог. Изд. 2-е. Доп. «Просвещение», М., 1964, 271 с. с илл.
- П р у д н и к о в В. Е. С. В. Ковалевская и П. Л. Чебышев. — В кн.: Памяти С. В. Ковалевской. Изд-во АН СССР, М., 1951, стр. 98—119.

- Стеклов В. А. Теория и практика в исследованиях Чебышева. — Усп. мат. наук, 1946, т. 1, вып. 12, стр. 4—11.
- Стеклов В. А. Теория и практика в исследованиях Чебышева. Птгр., 1921, 21 с.
- Труды П. Л. Чебышева по теории вероятностей. — В кн.: Ист. естествозн. в России. Т. 2. Изд-во АН СССР, М., 1960, стр. 87—94.
- Чебышев Пафнутий Львович. — В кн.: Матер. для биограф. словаря действ. чл. Акад. наук. Ч. 2. Птгр., 1917, стр. 218—222.
- Wassilief A. P. L. Tschebyschef und seine wissenschaftlichen Leistungen. Leipzig, 1900, 70 S.

П. А. Ш и ф ф

Попруженко М. Г. П. А. Шифф. Некролог. М., 1911, 3 с., с портр.

О. Ю. Ш м и д т

См. библиографию к третьему тому настоящего издания.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абель 61, 62, 66, 68, 69, 76, 79, 114, 197—
203, 246, 251, 257, 264, 271, 272,
298, 385, 386, 399, 417, 466, 531
Абовян Х. 104
Авенариус М. П. 480
Аверкиев Д. В. 561
Агамонов М. А. 120
Адамар Ж. 192, 405, 419, 437, 470, 517
Адамов А. А. 410, 419
Адамс 244, 390, 533
Азанчевский П. Н. 323
Акимов М. И. 576
Александров И. И. 554
Александров П. С. 434, 437, 443, 558,
561, 568, 582
Александрова Н. В. 560
Алексеев В. Г. 518, 572, 589
Алексеев В. П. 312
Алексеев Н. Н. 243, 322, 323
Алексеевский В. П. 464, 465, 473, 526—
527, 572
Аллез 148
Альбицкий П. М. 280
Ампер 54, 253, 254, 263, 379
Андреев К. А. 243, 244, 255, 307, 315,
413, 427, 428, 435—436, 460—463,
466, 473, 572, 573, 578, 595
Андреев П. И. 561
Андреевский М. А. 312, 322
Андронов А. А. 349, 524, 582
Анисимов В. А. 527—530, 549, 572
Анкудович В. А. 26, 28, 113—115, 121,
125
Аносов П. И. 107
Антропова В. И. 81, 589
Аппель П. 465, 479, 499, 500
Аппельрот Г. Г. 427
Аппельтауер 146
Апухтин А. 561
Араго 112
Аронгольд 518
Артоблевский И. И. 596
Архангельский Н. М. 17, 35, 36, 134
Архимед 33
Арчибальд Р. 559
Аршеневский В. К. 29
Астряб М. А. 481
Афанасьев Н. И. 570
Афанасьев П. А. 30
Ахиезер Н. И. 275, 568, 587, 593, 594,
596
Ашетт Ж. Н. 14
Ахундов М. Ф. 104
Багaley Д. И. 561
Базен П. П. 27, 119
Байков М. А. 37, 133
Баклунд О. А. 225, 406, 435
Баклунд И.-О. 319
Балашов 28
Барабашев Н. И. 561
Бардин И. П. 557
Бари Н. К. 438
Барнс 465
Бартельс М. Ф. 38, 39, 43, 44, 138—
140, 145, 151—153, 572
Бархов Г. 553
Батырев А. А. 577
Бауман 444
Бахмутская Э. Я. 5, 6, 561, 589, 594,
614, 615
Башмакова И. Г. 2, 578, 582
Бэббэдждж Ч. 112
Беген А. 499
Безикович А. 333, 587
Безу Э. 13, 29, 33
Бейер Е. И. 118, 119, 134, 135, 305,
306, 461, 572
Бек А. А. 324
Бек В. В. 562
Белинский В. Г. 104
Белинский И. 566
Белл Э. Т. 559
Беллавень 148, 325
Белов Н. В. 415
Белозеров С. Е. 560, 562
Белоновский П. Д. 486
Белопольский А. А. 575, 576, 578
Белоусова В. П. 573

- Белькинд Л. Д. 557
 Бельтрами Э. 142, 179, 305, 317, 431, 509
 Беляев А. М. 125
 Белянкин И. И. 473, 481, 486, 487
 Берви Н. В. 518
 Беренс В. И. 77, 124
 Беркевич Л. Ф. 312
 Бернал Д. 557
 Бернулли Д. 22, 370
 Бернулли И. 22, 69, 387
 Бернулли Н. 22
 Бернулли Я. 67, 96, 167, 214, 217, 255, 382—384, 483, 533, 534, 560
 Бернштейн С. Н. 334, 360, 461, 470—472, 560, 561, 596
 Бертран Ж. 75, 112, 124, 182, 191, 192, 252, 259, 262, 310, 324, 327, 378, 485, 532
 Бертран Л. 172
 Беспамятных Н. Д. 5, 6, 560, 562, 596, 613, 616
 Бессель А. В. 256, 259, 312
 Бессель Ф. В. 55, 140, 143, 370, 389, 487, 498, 546
 Бианки 419, 435
 Биеркнесс 452
 Билибин Н. И. 405, 555
 Бине Ж. 78, 117, 168, 385
 Био 34, 136
 Блаше 16
 Бlichфельд 274
 Блум И. А. 81
 Бобраков И. И. 524
 Бобылев Д. К. 243, 253, 340, 406, 409, 419, 422, 519, 572
 Бобынин В. В. 508, 562, 568, 570, 572, 575, 576
 Боголюбов А. Н. 2, 5, 614, 615
 Боголюбов Н. Н. 2, 422
 Богомолов С. А. 411
 Богоявленский Н. К. 427
 Богуславский И. А. 278
 Бойяи Я. (Больяи) 154, 162, 176, 177, 583
 Боклевский К. П. 580
 Болл У. 559
 Болотов Е. А. 427, 514
 Боль П. Г. 320, 521—524, 529, 573
 Больман А. Н. 149, 325
 Больцани И. А. 182, 183, 252
 Больцано 165
 Бонкомпанья 92
 Бонне О. 263, 301
 Бонола Р. 582
 Бонсдорф Э. 244
 Бопэн 465
 Бор Г. 522
 Борель 437, 440, 442, 493, 517
 Борисов Е. В. 408, 410, 411
 Борткевич 81
 Борхардт 72, 194, 244
 Боссю 15
 Бохер 437
 Брайцев И. Р. 528, 574
 Брауэр А. 523
 Брауэр Л. 495
 Брашман Н. Д. 40, 68, 72, 74, 110, 111, 114, 116, 128—132, 135, 148, 153, 179, 180, 184, 222, 245, 250, 294, 295, 296, 435, 516, 573, 590
 Бредихин Ф. А. 133, 295, 378, 429, 435, 448
 Бреус К. А. 575
 Брио 284, 467
 Бриоски 244, 404
 Брокгауз Ф. А. 400, 571
 Броннер К. И. 151
 Бронштейн И. Н. 582
 Брун Г. К. 111, 112
 Брунс 293, 316, 319—321
 Бугаев Н. В. 244, 255, 294, 297—299, 307, 378, 427, 429, 477, 481, 508, 569, 573
 Будаев Н. С. 118, 119, 126, 243, 256—258, 278, 281, 410, 573
 Буймола Г. Л. 582
 Буке 284, 467
 Букреев Б. Я. 311, 474—478, 480, 486, 487, 573, 576
 Булгаков Н. А. 406
 Булич Н. 562
 Буль 515
 Бунге Н. А. 571
 Буницкий Е. Л. 489, 493, 496—497
 Буняковский В. Я. 12, 22, 52, 59, 83—103, 107, 109—111, 114—116, 118—123, 148, 150, 188, 212, 237, 243—245, 253, 259, 279, 293, 299, 326, 378, 379, 435, 463, 536, 573—574, 597
 Бур 248, 261
 Бурачек С. А. 79, 111, 122, 123
 Бурдон 117, 133, 136
 Буренин К. П. 326, 327, 552, 553
 Буркхард 415
 Буссе Ф. И. 117, 148, 150, 325, 326
 Бутлеров А. М. 107
 Бутру П. 559
 Бушарла 31
 Бьенэме И. Ж. 205, 214, 244
 Бьянки 304
 Бычков Б. П. 567, 592, 596
 Бычков О. 553
 Бычков Ф. 400
 Бэр 439, 443, 520
 Бюшгенс С. С. 302, 428, 434, 435
 Бюржа 29
 Бюффон 96

- Бавилов С. И. 579
 Вагнер Н. П. 582
 Валле-Пуссен Ш.-Ж. 192, 472
 Валлис 33
 Вальцов Н. К. 327, 553
 Вангерин 374
 Вандермонд 24
 Ванечек И. С. 244
 Ванечек М. Н. 244
 Васильев А. В. 163, 179, 303, 334, 508—511, 515, 517, 558, 574, 576, 581, 582, 588, 589, 592, 598
 Васильев В. П. 509
 Васильев Н. Н. 496
 Васильев П. М. 40, 574
 Васмут А. 506
 Ватсон 546
 Вахулка А. 559
 Ващенко-Захарченко М. Е. 243, 308—310, 411, 474, 476, 480, 574
 Вебер Г. 493, 495
 Вейберг С. А. 574
 Вейдеман Г. 324
 Вейерштрасс К. 168, 197, 244, 247, 248, 252, 267, 283—289, 316, 319, 398—400, 407, 416, 447, 463, 466, 471, 475, 477, 488 502, 509, 516, 521, 579
 Вейлер 464
 Вейль Г. 509, 523, 524
 Вейраух Ф. 318, 319
 Великая С. В. 5, 614
 Великопольский И. Е. 584
 Вельмин В. П. 482, 483, 485, 530, 532, 577
 Вельштейн 493
 Вельянинова З. Р. 5, 6, 613, 615
 Венан С. 373
 Венгероу С. А. 185, 570
 Венков Б. А. 541, 542, 574, 578
 Верebrюсов А. 555
 Верещагин И. П. 552
 Верещагин Н. В. 12
 Вериго А. А. 314
 Веркмейстер 16
 Верлинский Ф. И. 323
 Веселаго Ф. 123, 562
 Веселовский 77
 Вестерман-фон Г. Э. 529
 Вестфаль В. 496
 Вивальнюк Л. Н. 558
 Вигерт 546
 Вилейтнер Г. 558
 Вильдбрехт А. М. 26
 Вильсон 86
 Винклер П. П. 121
 Виноградов И. М. 545, 596, 597
 Висковатов В. И. 12, 15—17, 26, 27
 Висковатов П. А. 562
 Витали 439
 Витензон И. Г. 586
 Витковский А. 501
 Владимиров В. В. 574
 Власов А. К. 425, 428, 429, 435, 574
 Воинов А. 555
 Войничский В. О. 121
 Войтинский С. О. 408
 Волков А. А. 427
 Волков Д. П. 560
 Волков М. С. 411, 412, 574
 Володкевич Н. Н. 567
 Вольгемут И. И. 121
 Вольтер 335
 Вольтерра 289
 Вольф Х. 49
 Воронец П. В. 479—481, 486
 Вороной Г. Ф. 196, 269, 274, 332, 406, 481, 503, 508, 527, 528, 530, 531, 533—550, 574—575
 Воронцова Л. А. 579
 Вронский 65
 Выгодский М. Я. 558, 562
 Выжевский С. С. 136, 137
 Вырвич А. 47
 Вышнеградский И. А. 119, 126, 242, 278, 472
 Гагаев Б. М. 562
 Гадолин А. В. 126, 406, 412
 Гайдук Ю. М. 558, 574, 583
 Галанин Д. Д. 567
 Галеркин Б. Г. 594
 Галилей Г. 377
 Галуа Э. 144, 306, 418, 483—486, 495, 506
 Галченкова Р. И. 562
 Гамалея П. Ф. 13, 28
 Гамильтон У. Р. 71—74, 112, 250, 251, 309, 317, 446, 456, 457, 480, 500, 519
 Ган Ганс 507
 Гарди 549
 Гассе 537
 Гассельблатт А. 566
 Гаусман И. М. 42
 Гаусс К. Ф. 21—23, 35, 38, 39, 41, 43, 54, 66, 79, 86, 88, 92, 114, 115, 135, 151, 152, 154, 159, 162, 163, 176, 179, 191, 204, 248, 251, 252, 266, 301, 302, 310, 317, 329, 339, 401, 416, 448, 534, 538, 559, 563, 583, 584
 Гвоздик П. В. 571
 Гегенбауэр Л. 381, 506
 Гейне 465
 Гельмгольц Г. 283, 494, 509
 Гельмлинг П. 143, 145, 244, 318—320
 Гельфонд А. О. 2, 531
 Гензель К. 485
 Геннади Г. 571
 Генник Г. Г. 529
 Герасимова В. М. 583

- Гербель 562
 Герлинг 176
 Гернет Н. Н. 406
 Геронимус Я. Л. 245, 558
 Герцен А. И. 104, 423
 Гетлих А. 576
 Гиббс Дж. 500
 Гильберт Д. 321, 447, 470, 471, 478, 485, 494—496, 509, 516, 531
 Гиляровский П. И. 25
 Гишпократ 144
 Гихман И. И. 560
 Глаголев А. Н. 552—554, 573
 Глаголева М. Н. 580
 Глазенап С. П. 406
 Глатенок В. Д. 567
 Глиноецкий Н. П. 562
 Гнатюк В. 568
 Гнеденко Б. В. 558—561, 583, 587, 589, 590, 596
 Гоголь Н. В. 104
 Годнев А. 554
 Голицын Б. Б. 429
 Головин М. Е. 25
 Головин О. Н. 568
 Головкинский Н. А. 314
 Голубев А. Ф. 121
 Голубев В. В. 201, 425, 437, 444, 559, 562, 577, 597
 Гольдбах Х. 22
 Гольдгаммер Д. А. 508
 Гольфельд Я. 49
 Гоппе Э. 560
 Гордецкий Д. З. 572
 Гордон П. 518
 Горнер 146
 Горшков П. М. 562
 Гбрький А. М. 340, 510
 Горянинов П. Ф. 106
 Горячев Д. Н. 427, 555
 Гофер К. 580
 Гоффман И. Э. 560
 Граве Д. А. 255, 260, 264, 395, 400—402, 405—408, 410, 460, 466—467, 473—475, 478, 481—486, 532, 575
 Граве И. П. 410
 Граве П. П. 518
 Грам 462
 Гранат 510
 Грассман 63
 Грацианская Л. Н. 573, 574, 576, 595
 Грдина Я. И. 460, 499—500
 Гребенка Е. П. 104
 Греков Ф. В. 562
 Гренков Н. М. 136
 Гречина Г. В. 136, 137
 Грешищев 122
 Григорьев В. В. 562
 Григорьев Е. И. 509
 Григорьян А. Т. 559, 586, 590
 Гриман В. С. 409
 Грин 54, 56, 275, 356, 358, 364, 368, 496, 497,
 Гродский Г. Д. 562
 Грофе Г. 519
 Гудерман 171, 385
 Гулак-Артемковский П. П. 104
 Гуров С. П. 597
 Гурьев П. С. 148
 Гурьев С. Е. 12—17, 27, 28, 31, 35, 36, 150, 575
 Гусев В. А. 592
 Гуссов В. В. 560
 Гут И. С. 35, 41, 42
 Гутман Д. С. 583
 Гюйгенс 249
 Гюльден 409
 Гюнтер Н. М. 255, 331, 339, 367, 372, 395, 404—406, 408, 410, 587, 594
 Гюнтнер Г. 324
 Давидов 122
 Давидов А. Ю. 101, 131, 132, 294—297, 302, 326, 327, 378, 428, 429, 435, 553, 575, 576
 Давидоглу 421
 Давыдов И. И. 30, 128
 Дазе З. 146
 Даламбер 13, 33, 46, 247, 248, 500
 Данделен 162
 Данжуа 437, 438, 440, 442
 Данилевский В. В. 557
 Дарбу Г. 285, 290, 378, 379, 401, 404, 419, 429, 431, 434, 467, 470, 488
 Дарвин Д. 106, 350, 355
 Даублебский 507
 Дахия С. А. 567, 570, 576, 597
 Дедекинд Р. 192, 193, 271, 332, 402, 403, 475, 485, 509, 534
 Декарт Р. 407
 Деларю Д. М. 305—307, 460
 Делла-Вос В. К. 323
 Делассью 405
 Делоне Б. Н. 2, 331, 332, 413, 415, 480, 484—486, 535, 541, 560, 575, 583, 587, 590, 596, 597
 Делоне Н. Б. 292, 406, 407
 Демидов П. Н. 110
 Ден 495
 Депман И. Я. 5, 560, 563, 569, 570, 572, 579, 582, 583, 590, 591, 594, 597, 613, 614
 Дестрем 119
 Джевонс 515
 Дзивинский П. 504, 577
 Дианни И. 559
 Динзе О. В. 570
 Дини 55, 419, 441
 Динник А. Н. 487, 498

- Динострат 33
 Диоклес 33
 Дирихле 57, 91, 92, 112, 140, 163—166,
 193, 220, 268, 343, 356, 359, 369,
 370, 374, 376, 401, 403, 419, 471,
 485, 519, 534, 540, 543, 544
 Дирксен 163, 166
 Дмитриев 325
 Дмитриевский А. А. 427
 Добров Г. М. 575
 Добровольский В. А. 5, 6, 560, 573—
 575, 613, 616
 Доброгай Н. И. 567
 Добролюбов Н. А. 104, 328
 Докушевский А. М. 120
 Долбня И. П. 408, 409, 417, 418, 576
 Долгушин П. А. 481, 552
 Домбровская В. А. 577
 Достоевский Ф. М. 104
 Драшусов В. 131
 Дробин 137
 Дубнов Я. С. 496
 Дубошин Г. Н. 349
 Дубрава Т. С. 563
 Дубяго А. Д. 583
 Дубяго Д. И. 508, 592
 Дульский П. М. 583
 Дуров Н. П. 278, 279
 Дьяченко А. А. 137
 Дьяченко Н. А. 133, 134, 137, 138, 308
 Дьячков П. А. 280
 Дюамель Ж. 75, 99, 112, 115, 182, 252,
 310
 Дюбуа-Реймон 283, 438

 Евклид 12, 13, 33, 35, 46, 80, 101, 155,
 156, 159, 172—174, 178, 179, 189,
 305, 310, 411, 463, 514
 Евневич И. А. 121, 278
 Евтушевский В. А. 552
 Егоров Д. Ф. 302, 424, 425, 427—429,
 434, 437, 572, 573, 576, 588, 591
 Ераков Л. А. 279
 Ермаков В. П. 111, 243, 244, 251, 254,
 255, 265, 266, 274, 308, 310—312,
 315, 409, 460, 474, 477, 480, 481,
 485—488, 552, 576, 577
 Еругин Н. П. 2, 349
 Ершов А. С. 131
 Есинов В. В. 563
 Ефимов А. И. 563
 Ефимов М. Ф. 595
 Ефимов Н. В. 583
 Ефрон И. А. 400, 571

 Жбиковский А. К. 303, 326
 Жебравский Т. 572
 Жегалкин И. И. 424, 425, 427, 443

 Жемайтис Ю.-З. 496, 563, 589
 Жермен С. 87
 Жилинский Е. И. 480, 483, 485
 Жильбер 385
 Жирухин В. И. 118
 Житков К. Г. 563
 Житков С. М. 563
 Жицкий Т. 45—47
 Жмурко Л. 147, 324, 500—502, 504, 577
 Жогин И. И. 591
 Жокос М. Н. 528
 Жуковский Н. Е. 283, 290—292, 315,
 323, 341, 343, 387, 427, 429, 430,
 444—452, 461, 481, 520, 563, 576,
 577, 579, 581, 590, 593, 595
 Журавский Д. Н. 120

 Забудский Н. А. 280, 406, 410
 Завадский С. В. 410
 Загорский В. А. 29
 Загоскин Н. П. 563
 Зайдель 168, 197
 Зайончковский В. 321, 324, 504, 567
 Зайцев 107
 Залеский В. М. 145
 Залесский Н. А. 580
 Занчевский И. М. 489, 490, 493
 Запольская Л. Н. 406
 Запольский И. И. 37
 Зарубин П. А. 102, 111
 Затеplinский П. А. 36, 83
 Заустиновский М. В. 408
 Зворыкин А. А. 557, 570
 Зейдель 316
 Зейлигер Д. Н. 508, 514, 517, 577, 578
 Зелинский А. А. 323
 Зеленый А. И. 111, 123, 563
 Зеленый С. И. 79, 111, 122
 Зеллинг 411
 Зембрицкий К. Е. 280
 Зенфф К. Э. 138—141, 143, 145, 300,
 318
 Зенфф К. Ю. 138
 Зернов Н. Е. 111, 128—132, 184, 294,
 578
 Зимин М. Ф. 528, 532, 533
 Зинин Н. Н. 182, 527, 530, 549, 578
 Зморович В. А. 5, 6, 311, 614
 Золотарев Е. И. 93, 196, 203, 235, 243,
 245, 246, 256, 258, 259, 266—274,
 276—278, 310, 328, 329, 332, 340,
 399, 402, 403, 411, 418, 534, 535, 541,
 578, 593
 Зоммерфельд А. 498
 Зотина Р. С. 560
 Зубов В. П. 557, 572, 583, 586
 Зылев В. П. 527
 Зюндман К. 488
 Иваницкий А. И. 259

- Иванов А. А. 406
 Иванов И. И. 260, 271, 395, 402, 403, 407, 409, 410, 578
 Иванов М. Н. 527
 Иващенко М. 113
 Иде И. А. 29
 Идельсон Н. И. 357, 581, 583
 Иенсен Б. 524
 Иериш 374
 Извольский Н. 554
 Износков И. А. 578, 592
 Иконников В. С. 563
 Ильин И. Г. 573
 Ильинский А. И. 17
 Имшенецкий В. Г. 93, 243, 245, 252—255, 293, 303, 304, 307, 311, 378, 379, 383, 405, 406, 408, 435, 461, 467, 476, 515, 578, 588, 592, 593
 Иоганни С. Г. 125
 Ионов Б. Д. 565
 Иоффе А. Ф. 565, 580
 Ишлинский А. Ю. 2
- Каган В. Ф. 161, 460, 489, 490, 492—495, 508, 567, 569, 583
 Кадикис П. 320
 Казмичев 563
 Кайсаров А. В. 39
 Калинин С. В. 587
 Калле Ф. 36
 Каменков Г. В. 349
 Каминский С. 504
 Камке Э. 496
 Кант И. 34, 46, 178, 411, 412
 Канунов Н. Ф. 588
 Каньоли 39
 Каразин В. Н. 32
 Карастелев К. И. 312
 Карно 31, 75
 Картан Э. 509
 Карташевский Г. И. 37, 151
 Кассини 350
 Касьянюк С. А. 591
 Каталан 64, 194, 195, 244, 385
 Кауфман И. М. 570
 Кели 244
 Келле 418
 Кенигсбергер 283
 Кеплер 522
 Керр А. К. 583
 Кестнер А. Г. 49, 50, 146
 Кижнер Н. М. 524
 Кизерицкий Г. 323
 Киллинг В. 509
 Киндерева А. С. 125, 148
 Кинкелин 465
 Киро С. Н. 5, 6, 559, 563, 569, 570, 595, 613—616
 Кирпичев В. Л. 472—473
- Кирпичев Л. 565
 Кирхгоф Г. Р. 59, 283, 361, 364, 372, 374
 Киселев А. А. 597
 Киселев А. П. 327, 552—554
 Клазиус 182
 Клапейрон Б. 27
 Клаузен Ф. 112, 143—145, 244
 Клебш А. 72, 373, 375, 467, 468, 515
 Клейн Ф. 82, 320, 429, 467, 478, 493, 509, 510, 516, 521, 555, 559, 567
 Клеро А. 46, 318, 350, 351
 Клиффорд В. К. 179
 Клоссовский А. В. 489, 567
 Ключевский В. О. 558
 Кнезер А. 517, 519, 522, 578
 Кнорр Э. А. 154
 Кнорре К. 111
 Кнорре Э. 40, 42
 Князев Г. А. 558
 Князьков С. А. 567
 Кобе 516
 Ковалевская С. В. 210, 235, 244, 281—293, 315, 350, 361, 382, 423, 451, 488, 505, 579—580, 595, 597
 Ковалевский А. О. 242, 314
 Ковалевский В. О. 283
 Ковалевский М. М. 510
 Коваленский В. М. 427
 Ковалевский Г. 555
 Ковальский М. А. 508, 580
 Ковальский М. Ф. 305, 307, 460, 473
 Кованцов Н. И. 5, 6, 614, 615
 Коверский Э. А. 278
 Коданци 300, 301
 Кодеш Ф. 49, 145, 146
 Коковцев К. К. 121
 Колесников М. С. 583
 Коллинс Э. Д. 12, 21—25, 85, 98, 101, 111, 112, 580
 Колмогоров А. Н. 161, 216, 217, 334, 560, 582, 583
 Колонг И. П. 410
 Колосов Г. В. 406, 519—520
 Кольман Э. Б. 583
 Кольцов А. В. 558, 587, 594
 Коновалов И. 113
 Константинов Н. А. 567
 Конфедератов И. Я. 557, 558
 Конфорович А. Г. 590
 Коперник Н. 46, 179
 Корбут М. К. 564
 Корвин-Круковский В. В. 281
 Корвин-Круковский П. В. 281
 Кориолис 248
 Коркин А. Н. 196, 207, 243, 245, 253, 255, 256, 258—268, 272—274, 276, 278, 281, 310, 311, 328, 329, 331, 340, 387, 388, 395, 400—402, 404, 406,

- 411, 415, 461, 530, 532, 541, 578,
580, 594, 597
- Корн 342
- Корнейчик Т. Д. 584
- Коробов А. Н. 486
- Королев Ф. Н. 134
- Космодомьянский А. А. 559, 577
- Коссера 342
- Костин В. И. 584
- Кострикин М. Л. 409
- Котельников А. П. 445, 448, 474, 475,
480, 508—514, 517, 580, 584
- Котельников П. И. 139, 140, 180, 252,
302
- Котельников С. К. 13, 17, 18
- Котес 46
- Котляров М. Г. 135
- Коцауров Н. В. 127
- Коши О. Л. 52, 54, 59, 60, 63, 66, 75,
77, 83, 112—114, 123, 124, 130, 133,
135—137, 163, 168, 196, 230, 246,
251, 253, 256, 257, 284, 285, 298,
309, 310, 370, 378, 384, 391, 396,
401, 405, 410, 438, 444, 449, 465,
490, 495
- Коялович Б. М. 407, 408, 410, 415, 551
- Кравец И. Н. 589
- Кравец Т. П. 580
- Кравчук М. Ф. 485, 564, 575
- Краевич К. Д. 149, 553
- Крамар Ф. Д. 593
- Крамер 46
- Крамп 24
- Красновский М. А. 278
- Красоткина Т. А. 581
- Крафт В. Л. 18
- Крейн М. Г. 597
- Крелле А. Л. 112, 141, 146, 169, 175,
194, 196, 212, 318, 463, 523
- Кронекер Л. 244, 316, 400, 418, 475,
484, 485, 502, 509, 510, 523
- Кропотов А. И. 5, 80, 590, 593, 614,
615
- Кротов А. 564
- Круликовский Н. Н. 6, 588, 590, 616
- Крыжановская Н. А. 581
- Крыжановский Д. А. 496
- Крылов А. Н. 77, 119, 259, 260, 328,
387—392, 408, 410, 419, 423, 580,
581, 586, 597
- Крылов Н. М. 408, 419—422, 575, 576,
581, 586
- Кубилос И. П. 2
- Куделька 146
- Кудрявцев П. С. 558, 559
- Кузен Ж. 13
- Кузнецов Б. Г. 558, 584
- Кузнецов П. 578
- Кузмин 16
- Кузьмин Р. О. 578, 581, 594
- Кулик Я. Ф. 145
- Куммер 82, 92, 168, 259, 267, 270, 316,
332, 385, 534
- Кундзич Т. 45
- Кунцек А. 145, 146
- Купфер 153
- Купфер В. В. 521
- Купфер К. Ю. 321, 564
- Купфер К. Я. 42
- Курош А. Г. 484, 569
- Кутюра 493, 515
- Кушакевич А. Я. 125, 148
- Кушнир Е. А. 6, 616
- Кэджори 493, 559
- Кэли 77, 78
- Кюи Ц. А. 125
- Лаврентьев М. А. 450, 581
- Лавров В. М. 323, 427
- Лавров П. Л. 125, 245, 579, 581
- Лавровский П. А. 321
- Лаггер 231, 305, 371, 397, 466
- Лагранж Ж. 13, 15—17, 20, 31, 34, 37,
47, 62—65, 70, 73, 77, 79, 84, 86,
87, 97, 114, 126, 130, 135, 136, 151,
154, 165, 182, 220, 222, 226, 228,
235, 247, 248, 250, 251, 253, 263,
277, 290, 291, 329, 343, 354, 361,
379, 392, 401, 446, 456, 480, 492,
500, 523
- Лагутинский М. Н. 467, 474
- Лазарев П. П. 558, 575, 576, 578, 595
- Лазаренко Е. К. 564
- Лакруа 13, 26, 33, 39, 43, 47, 51, 113,
128, 129, 165
- Лалаев 564
- Лаланд 123, 128
- Ламберт И. Г. 18, 171, 448
- Ламе Г. 27, 58, 68, 120, 252, 257, 259,
288, 289, 338, 339, 364, 370
- Ланговой И. П. 564
- Лангсдорф К. Х. 46
- Ландау Э. 193
- Ланков А. В. 554, 567, 584
- Ланкре 139
- Лаплас П. 36, 37, 55—57, 64, 65, 69,
77, 78, 96, 113, 151, 166—169, 171,
214, 217, 248, 251, 253, 254, 286,
287, 315, 324, 350, 356—359, 364,
366, 369, 370, 392, 409, 439, 503,
523
- Лаптев Б. Л. 5, 6, 584, 614, 616
- Лапшин В. И. 140
- Ларионов А. М. 564
- Лахтин Л. К. 427, 517, 518, 520, 573,
590, 591
- Латышева К. Я. 576
- Лебег А. 166, 402, 419, 437—440, 526
- Лебедев В. И. 559

- Лебединцев К. Ф. 481, 553
 Левенсон Л. Б. 564
 Леверрье 392
 Левитский Н. И. 596
 Левитус Д. М. 553
 Левицкий В. А. 505, 581
 Левицкий Г. В. 564, 572, 578, 588
 Леви-Чивита И. 292, 304, 509
 Лежандр А. 12, 33, 39, 66, 67, 86, 87, 92, 93, 95, 96, 114, 118, 133, 155, 160, 163, 167, 168, 171, 172, 190, 193, 199, 207, 224, 229, 231, 257, 258, 276, 322, 326, 371, 376—378, 383, 396, 409, 537
 Лейбензон Л. С. 520, 577
 Лейбниц 13, 69, 81, 324
 Лельевр 433
 Лемох И. 146, 147, 500
 Ленин В. И. 10, 106, 239, 303, 394, 445, 557, 563, 564, 571
 Ленц Э. Х. 107
 Лермонтов М. Ю. 104
 Леруа Э. 85, 114, 135, 137, 365, 370
 Летников А. В. 243, 244, 264, 295, 296, 321, 323—325, 427, 464, 564, 567, 582, 584
 Леффлер А. Ш. 579, 580
 Ли С. 254, 312, 318, 401, 494, 509, 518
 Либри Г. 86
 Лигин В. Н. 314
 Линделеф Л. 244
 Линдеман 479
 Линник Ю. В. 2, 334, 587
 Линдстедт А. 244, 319, 320
 Липкин 236
 Липшиц 304, 317, 357, 359
 Липшиц С. Ю. 569
 Литвинова Е. Ф. 579, 584
 Литтлвуд Дж. 193, 549
 Литтров И. А. 38—40, 146, 151, 582
 Лиувилль Ж. 61, 66, 68, 69, 76, 90, 92, 112, 142, 168, 171, 183, 188, 191, 192, 196—200, 204, 209, 213, 252, 255, 259, 265, 268, 271, 276, 277, 309, 324, 353, 356, 370, 371, 378, 421, 466, 467, 488, 515, 516
 Лихачева Е. 567
 Лихин В. В. 560
 Лихолетов И. И. 566
 Липис Н. 584
 Лобачевский И. М. 151
 Лобачевский Н. И. 11, 12, 39, 40, 57, 78, 101, 107, 109, 110, 130, 140, 142, 151—183, 296, 302, 304, 305, 309, 325, 364, 407, 411, 464, 470, 474, 494, 505, 509, 510, 512, 514, 517, 563, 572, 574, 582—586
 Ловис К. Д. 324
 Ломмель 381
 Ломницкий А. 504
 Ломовский А. А. 323
 Ломоносов М. В. 35, 128, 178, 364, 377, 395, 562
 Лоран О. 316
 Лоранский А. М. 564
 Лоренц А. 455, 498
 Лориа Г. 560
 Лузин Н. Н. 424, 425, 428, 437—444, 586
 Лукомская А. М. 570, 586, 593
 Лукьянов А. Я. 131
 Лукьянченко С. И. 474
 Лумисте Ю. Г. 5, 6, 614—616
 Лунц Г. Л. 166, 584
 Лурье С. Я. 570
 Лучининов С. Т. 581
 Лысенко В. И. 564
 Любарский А. 564
 Любимов Н. А. 295, 378, 581
 Люк Э. 244
 Люстерник Л. А. 438, 581
 Ляпин Н. М. 588
 Ляпунов А. М. 188, 217, 235, 243, 307, 328, 333, 339—362, 364, 366—368, 375, 377, 387, 395, 451, 461, 464, 471, 473, 490, 497, 524, 572, 586—587, 594, 597
 Ляпунов Б. М. 586
 Ляпунов М. В. 154
 Магницкий М. Л. 40, 153
 Мазин 107
 Мазинг К. 567
 Маиевский Н. В. 126, 133
 Майер 401
 Майнард 300, 301
 Майстров Л. Е. 6, 569, 615
 Макаров С. О. 581
 Макарова В. И. 590
 Мак-Куллах 290
 Маклорен 46, 66, 129, 167, 182, 229, 303, 350—353, 383, 385, 543, 544, 547, 548
 Максвелл 287, 290
 Максимов А. А. 558
 Максимович В. П. 303, 305, 308
 Максимовский М. 564
 Максин И. М. 567
 Малевич И. И. 281, 579
 Малкин И. Г. 349
 Малинин А. Ф. 326, 327, 552, 553
 Мансион П. 580
 Мари 305
 Маркевич А. И. 565
 Маркевич О. П. 565
 Марков А. А. 196, 205, 207, 210, 211, 217, 243, 253, 255, 258, 274, 328—340, 359, 360, 362, 377, 379, 381—383, 387, 395, 401—404, 406, 407,

- 411, 415, 429, 461, 491, 508, 532, 533, 535, 536, 575, 587, 588, 593, 597
- Марков А. А. (мл.) 328
 Марков В. А. 337, 395, 407, 411
 Маркс К. 557, 584
 Маркушевич А. И. 2, 561, 594
 Марон И. А. 80, 590
 Мартинсон Э. Э. 565
 Мартынов Д. Я. 563
 Марчевский М. Н. 565, 569
 Марчевский Э. 560
 Матковский 553
 Маюров А. И. 27, 112
 Медер А. Р. 529
 Медлер Г. 140
 Мелер Ф. 398
 Мельников М. И. 179, 180, 182, 183
 Мельникова Н. И. 565
 Менделеев Д. И. 242, 243, 337
 Менелай 532
 Менье 77
 Меньшов Д. Е. 437, 442—443, 569
 Мергелян С. Н. 2
 Мертенс 403
 Мерцалов Н. И. 292
 Мехович Ф. И. 136
 Мечников И. И. 242, 314, 315
 Мещерский И. В. 405, 406, 408, 419, 422, 594
 Миготти-Адольтф 507
 Миквиц 326
 Микулинский С. Р. 559
 Миллер 421
 Миндинг Ф. 111, 112, 141—143, 145, 244, 251, 264, 300, 305, 317—319, 324, 519
 Минин А. П. 573
 Минковский Г. 194, 538
 Минковский В. Л. 574, 588
 Миракьян Г. М. 559
 Миттаг-Леффлер Г. 285, 290, 580
 Михайловский А. И. 565
 Михневич Г. Л. 496
 Млодзеевский Б. К. 292, 294, 295, 302, 341, 424, 427—434, 442, 588, 591
 Модзалевский Л. Б. 176, 584
 Мойсеев Н. Д. 349, 559, 586
 Молин Ф. Э. 320, 517, 520, 521, 525, 527, 588
 Молодший В. Н. 567, 569
 Моль К. 324
 Молюков И. Д. 593
 Монж 13, 14, 17, 27, 31, 151, 253, 254, 263, 318, 476
 Монтель 440
 Морган 124, 298, 310
 Мордах К. 565
 Мордухай-Болтовской Д. Д. 159, 417, 527, 528, 530, 531, 559, 561, 565, 567, 568, 572, 576, 584, 588, 593
- Морозов В. В. 584
 Мочник Ф. 504
 Мрочек В. Р. 561
 Муавр А. 33, 214, 217
 Мусхелишвили Н. И. 2, 520
 Мухачев П. М. 565
 Мутар 433, 434
 Мчедlishvili С. А. 576
 Мышкис А. Д. 573
 Мюллер Ф. 571
 Мюрфи 257
- Навроцкий Н. 112
 Навье Л. 54, 59, 68
 Нагаева В. М. 584
 Назимов П. С. 303, 516, 588
 Найденов В. Ф. 410
 Натансон И. П. 437
 Наумов И. А. 593
 Нейман Д. П. 560
 Нейман К. Ф. 59, 355, 359, 364—369, 381, 479
 Нейман Ф. Э. 140
 Некрасов В. Л. 524, 526, 527
 Некрасов П. А. 255, 284, 299, 323, 427, 429, 573, 576, 579, 582, 588
 Немцевский З. 46, 47
 Несторович Н. М. 588
 Нечкина М. В. 579
 Никифоров П. М. 594
 Никифорова Т. Р. 245
 Никольский Г. Б. 39, 40, 179
 Новак И. П. 584
 Новлянская М. Г. 588
 Новосельский Н. Н. 125
 Норвайша Ф. 45—47, 589
 Норден А. П. 514, 584, 585
 Нортон 448
 Ньютон И. 24, 33, 45, 46, 65, 69, 84, 130, 135, 149, 154, 163, 200, 223, 229, 342, 350, 376, 515
 Нявяровский К. Е. 113
- Образцов В. Н. 564
 Обручев В. А. 524
 Огиевецкий И. Е. 496
 Оглоблин Н. В. 481
 Огоновский П. М. 505
 Однер 238
 Ожигова Е. П. 578, 597
 Окатов М. Ф. 133, 243, 589,
 Олоничев П. М. 595
 Олчи-Оглу Н. И. 581
 Олышев П. А. 121, 278
 Ом Г. 23
 Ом М. 23

- Орбинский А. Р. 493
 Орлов Ф. 278
 Орлов Ф. Е. 323
 Осадчиев В. Г. 565
 Осиповский Т. Ф. 10, 25, 32—37, 50, 52, 133, 589, 591
 Островский А. Н. 311, 485
 Остроградский М. В. 12, 22, 48, 52—83, 86, 107, 108, 110—113, 115—126, 129, 130, 132, 134, 136, 142, 150, 153, 161, 162, 166, 168, 170, 179, 181, 197, 198, 245, 246, 250, 251, 282, 297, 306, 312, 313, 392, 409, 456, 457, 480, 500, 555, 573, 589—591, 597
 Осьмова Н. П. 557
 Отрадных Ф. П. 559, 574, 590, 597

 Павленко Г. Е. 581
 Павловский А. Ф. 34—37, 52, 133—135
 Панкевич М. И. 29
 Панфилов И. И. 486, 528, 532
 Панченко А. В. 474
 Паплаускас А. Б. 2
 Папп 21
 Парасюк О. С. 2
 Пароменский А. И. 280, 410
 Паррот Г. Ф. 40—42
 Парсеваль 370
 Парфентьев Н. Н. 508, 509, 516—517, 574, 577, 579, 585, 591, 594, 595
 Паукер М. Г. 42, 102
 Паукер Г. Е. 124
 Пеано Дж. 509
 Пекарский П. П. 558
 Пенлеве 265
 Пёнчарский 321
 Первушин И. М. 93, 591
 Перевощиков Д. М. 10, 30, 31, 39, 112, 116, 127, 128, 132, 148, 150, 184, 243, 244, 326, 591
 Перелогов Т. И. 29
 Перрот Ф. Ф. 120, 121, 278, 279
 Персидский К. П. 349, 585
 Петерс Х. 111
 Петерсон 122
 Петерсон К. М. 143, 295, 296, 299—302, 318, 429, 432, 433, 591
 Петров В. В. 107
 Петров Н. П. 124, 242
 Петрович С. Г. 423
 Петровский В. 140
 Петрушевский Ф. И. 51, 572
 Петухов Е. В. 565
 Пикар Э. 207, 342, 391, 419, 437, 465, 470, 478, 517, 531, 561
 Пиотровский Б. Б. 410, 423
 Пирогов Н. И. 107, 108
 Пирогов Н. Н. 406
 Пирсон К. 520
 Писарев 328
 Пиум 399
 Пифагор 103
 Плато 471
 Платов А. 565
 Племель 507
 Плетнев П. 565
 Плюкер 249
 Плюшар Л. А. 83, 117
 Поггендорф И. 571
 Погожев А. В. 569
 Погорельский П. Н. 127, 148—150, 184, 325, 326
 Погребынский И. Б. 2, 5, 6, 558, 559, 575, 581, 590, 591, 615, 616
 Покровский П. М. 295, 474—477, 479, 481, 561, 576, 582, 591
 Полак Л. С. 587
 Полиа Г. 549
 Полинский М. 46—48
 Полиньяк 193, 195
 Половцев А. А. 571
 Полубаринова-Кочина П. Я. 283, 284, 286, 579
 Поляков А. П. 427
 Пономарев П. А. 585
 Понселе Ж.-В. 75, 112, 218, 337, 338, 435, 436, 462
 Понтрягин Л. С. 524
 Попов А. Ф. 112, 180—183, 244, 252, 585, 592
 Попов А. С. 408, 410
 Попруженко М. Г. 481, 555, 598
 Порецкий П. С. 303, 508, 515, 517, 578, 592
 Порфирьев Н. И. 509
 Поселье А. 236
 Поссе К. А. 205, 207, 243, 244, 253, 258—260, 278, 340, 381, 395—399, 402, 405, 406, 408, 551, 574, 580, 592, 594
 Потапов В. С. 577
 Потье К. И. 27
 Почобут-Одланицкий М. 45
 Прайс 77
 Прандтль Л. 498
 Преображенский В. В. 303, 314, 315, 323, 405, 489, 490
 Пржишиховский Р. В. 568
 Привалов И. И. 425, 437, 439, 444
 Привалова Н. И. 585
 Прим 399
 Прокопович Ф. 112
 Прони 47
 Прудников В. Е. 559, 568, 574, 575, 589, 590, 595, 597
 Пташицкий И. Л. 243, 258, 395, 399, 406, 410, 592
 Птолемей 179

Пуанкаре А. 335, 342, 343, 350, 355,
364—370, 377, 410, 417, 419, 470,
476, 509, 510, 517, 523, 524, 531
Пуансо Л. 52, 290
Пуассон С. 47, 52, 54, 55, 57, 59, 62,
66, 68, 70, 71, 96, 113, 115, 129, 130,
133, 137, 168, 171, 181, 182, 212,
217, 248, 253, 261, 262, 370, 388,
391, 410, 442, 546, 589
Пузына Ю. 502, 505, 577
Путята Т. В. 5, 6, 559, 577, 590, 614—
616
Пухта А. 507
Пушкин А. С. 104
Пфейффер Г. В. 474, 475, 477—479,
481, 486, 575, 592
Пфафф И. В. 41, 42
Пфафф И. Ф. 41, 306, 470, 492
Пчельников М. И. 118
Пшеборский А. П. 411, 465—466, 470,
471, 473—474, 480, 569, 591
Пьюизе 324
Пюиссан 148
Пяковский Б. В. 5, 6, 575, 615, 616

Раабе И. 99, 310, 465
Рабинович И. М. 573
Радовский М. И. 559
Раевский Я. 503
Раик А. Е. 591
Райзингер А. 147, 504
Райковский С. И. 17
Ракчеев Е. Н. 559
Рауз 343
Рахманинов И. И. 133, 138, 250, 466,
480, 592
Рахманов П. А. 16, 17, 98
Рашевский К. Н. 554
Ребиндер М. Г. 580
Ревковский З. 48
Резаль А. 248
Резимон И. С. 27, 119
Релей 420
Ремак Р. 484
Ремез Е. Я. 2, 590
Реннер К. Ф. 38
Риккати В. 33, 171, 316, 318, 324, 491,
530
Рикье 405
Риман Б. 57, 166, 178, 189, 192, 193,
304, 309, 353, 370, 377, 398, 399,
437, 438, 442, 449, 476, 494, 509,
512, 514, 548, 549
Ритц 420
Риччи 304
Ришело 163
Робуш М. К. 52
Робэн 356, 357, 364, 366—368
Рогаченко В. Ф. 585

Родошковский О. И. 125
Рождественский С. В. 568
Розенгайн 398
Розенфельд Б. А. 2, 580, 585
Ройтман Д. 554
Ролль 453
Романенко Г. Н. 5, 614
Романовский В. И. 334, 530, 532
Ромер П. Э. 138, 308—310, 480
Россинский С. Д. 588, 591
Рош 385
Рощин П. Е. 126, 243, 281, 410
Рубин П. Г. 566
Рудский Ф. Ф. 529
Рукавицын И. Н. 585
Рулье К. Ф. 106
Румбович И. 48
Румовский С. Я. 13, 17, 18, 37—39
Руссьян Ц. К. 470, 489, 492, 579
Рыбка Е. В. 593
Рыбкин Г. Ф. 559, 585, 589, 591
Рыбкин И. 554
Рыбников К. А. 2, 559, 572
Рынин Н. А. 408, 561
Ряго Г. А. 528, 566, 588

Сабинин Е. Ф. 82, 119, 244, 312, 313,
489, 591
Савинов А. 168
Савич А. Н. 111, 114, 118, 123, 140, 253,
280, 592
Савич С. Е. 405, 410, 415, 416
Садовский Л. Е. 561
Саккери 155
Салмон Дж. 309
Салтыков Н. Н. 471, 487, 568
Сарманов О. В. 588
Саррюс 181
Сартон Г. 560
Саткевич А. А. 410
Свешников А. Г. 591
Свободской Ф. М. 109, 113, 127, 133
Себржинский В. С. 17
Севастьянов Я. А. 27, 111, 119, 120,
592
Селиванов Д. Ф. 395, 399, 400, 405—408
Селиханович В. Г. 592
Сербов Н. И. 567
Сергиевский Д. Д. 410
Сердобинский В. Е. 323
Серпинский В. 428, 443, 503, 523, 547,
548
Серре Ж. 19, 192, 294, 324, 418
Сеченов И. М. 242, 314, 340
Сеченов Р. М. 340
Силаков В. Д. 561
Сильвестр Дж. 98, 192, 244, 290
Симашко Ф. И. 150, 326
Симонов И. М. 39, 151—153

- Симонов Р. А. 571, 576, 589
 Синцов Д. М. 255, 461, 464, 467—470, 472, 497, 508, 509, 514—515, 517, 551, 566, 568, 569, 571, 572, 574, 585, 591, 593
 Сичкар О. А. 5, 614
 Скотт И. Ф. 560
 Скрынский Н. Г. 581
 Слешинский И. В. 315, 489—496
 Слонимский З. Я. 82, 111
 Слугинов С. П. 577, 585, 588, 595
 Слудский Ф. А. 250, 295, 378, 429, 582, 593
 Смирнов А. 566
 Смирнов В. И. 2, 5, 363, 404, 416, 417, 559, 570, 581, 586, 587, 593, 594, 615
 Смирнов П. 26
 Снядецкий Я. 46—48, 593
 Собко П. И. 120, 121
 Соболев С. Л. 404, 416, 587
 Соколов И. Д. 117—119, 134, 149, 150, 250, 305, 306, 312
 Соколов Ю. Д. 2
 Сологуб В. С. 2, 5, 6, 575, 587, 594, 614, 615
 Сомов А. И. 593
 Сомов О. И. 109—112, 114, 116, 120, 121, 123, 133, 163, 243, 245—252, 258, 267, 290, 325—327, 418, 591, 593, 597
 Сомов П. О. 243, 408—410
 Сонин Н. Я. 209, 322, 323, 328, 378—387, 406, 407, 481, 530, 544, 545, 547, 551, 579, 593—594
 Соснин Ф. И. 323
 Сохоцкий Ю. В. 243, 256, 257, 267, 294, 395, 396, 402, 406, 407, 535, 580, 594
 Спасский М. Ф. 132, 184
 Срезневский И. И. 321
 Сретенский Л. Н. 356, 456
 Стажинский Л. 566
 Станевич В. И. 405, 408, 410
 Стеклов В. А. 58, 328, 333, 335, 336, 339, 340, 342, 355, 362, 416, 421, 461, 464, 465, 470, 471, 473, 483, 535, 539, 543, 545, 548, 572, 575, 576, 578, 580, 581, 587, 588, 594, 598
 Степанов В. В. 349, 425, 437, 439, 444, 561, 587
 Стилтьес Т. И. 207, 209, 210, 336, 337, 351, 381, 544
 Стирлинг Дж. 68, 96, 303, 384, 409, 465
 Стокс Дж. Г. 168, 197
 Столетов А. Г. 242, 378, 429, 481, 579
 Столяров М. А. 486
 Стороженко М. Б. 5
 Страннолюбский А. Н. 282, 283, 410, 423, 595
 Страшницкий Л. Ш. фон. см. Шульд (Леопольд фон Страшницкий)
 Стройк Д. Я. 559, 560
 Струве В. 42—44, 102, 107, 111, 114, 140
 Струве О. 102, 111, 596
 Стяжкин Н. И. 561, 592
 Субботин М. Ф. 527, 528
 Суворов П. И. 29
 Суворов Ф. М. 303—305, 508, 509, 511, 517, 578, 595
 Сулема 121
 Сулима П. А. 16
 Суслин М. Я. 437, 443
 Суслов А. Г. 566
 Суслов Г. К. 243, 251, 479—481, 569, 592, 595
 Сухомлинов М. И. 558, 568
 Сушкевич А. К. 561, 566
 Талызин М. И. 250
 Таннери П. 558
 Тарханов П. В. 113, 127
 Татаринов П. 111
 Тейлор 16, 17, 20, 24, 44, 66, 196, 218, 235, 385, 387, 466
 Тесленко И. Ф. 575
 Тиме Г. А. 278, 279, 281, 410, 417
 Тиме И. А. 242
 Тимирязев К. А. 242
 Тимченко И. Ю. 489, 490, 492, 495, 595
 Тихомандрицкий А. Н. 119, 136, 137, 149, 150
 Тихомандрицкий М. А. 258, 294, 325, 405, 463—464, 473, 566, 572, 595
 Тихомиров П. В. 26, 113
 Тодгөнтөр 491
 Толстой Л. Н. 340
 Томе 316, 396
 Томсон 343, 354, 355, 368, 377
 Трипольский П. 55, 58, 59, 574
 Тростин Д. П. 30
 Тумлирц О. 507
 Турбаба Д. П. 524
 Турковский Т. 558
 Турчанинов А. С. 496
 Тыртов Н. П. 283
 Тэт 343, 354, 355
 Тюлина И. А. 559, 566
 Уатт 217, 218, 235
 Умов Н. А. 313—315, 429, 595
 Усов Н. А. 125
 Успенский Я. В. 588, 595
 Фабиан О. 502
 Фаворов П. А. 581
 Фаддеев Д. К. 415, 535
 Файдель Ф. П. 585

Фарей 544, 545
 Фату П. П. 439
 Федоренко Б. В. 585
 Федоров Е. С. 406, 412—415, 540, 596
 Фешль А. 498
 Ферлюдин П. И. 568
 Ферма П. 17, 23, 87, 93, 270, 532, 538
 Ферсман А. Е. 413
 Филиппов В. М. 552
 Филиппов М. М. 406
 Фиников С. П. 302, 425, 434
 Финкель Л. 566
 Фихтенгольц Г. М. 416, 496
 Фицум фон Экстедт Н. А. 281, 410
 Фоваро А. 571
 Фогель 149
 Фогт К. К. 566
 Фотт К. И. 489
 Фохт Н. Н. 551
 Фрадлин Б. Н. 5, 6, 559, 561, 577, 590, 614—616
 Франк М. Л. 409
 Франкер 30, 31, 34, 35
 Франкль Ф. И. 561
 Фредгольм 366
 Френе 139
 Френель 314
 Фреше 439
 Фридман А. А. 377
 Фробениус Г. 485, 588
 Фукс Л. 283, 288, 404, 476, 529, 530, 579
 Фурси Лефебюр де 114
 Фурье Ж.-Б. 52, 54—59, 65, 67, 114, 129, 135, 137, 145, 163, 166, 169, 231, 246, 260, 261, 364, 370, 381, 388—390, 438, 441, 442, 487, 498, 529, 532, 589
 Фусс Н. И. 12, 18, 19, 21—23, 39, 46, 50, 51, 148, 153
 Фусс Н. Н. 22
 Фусс П. Н. 12, 21, 22, 101, 111, 112, 193, 580, 596

Хаан Биеренс де 169
 Хальфен 404
 Хандриков М. Ф. 296, 378, 480
 Ханкель 381
 Харди Г. 193, 546
 Харин В. П. 280
 Харнак 438
 Хаяси 390
 Хилл 361
 Хилькевич Э. К. 585, 586, 591
 Хинчин А. Я. 437, 442, 561
 Христианович С. А. 577
 Христоффель 304
 Хроменков Н. А. 597
 Худынец А. Ф. 280
 Цветков 326

Цессенгауз 415
 Цефус 323
 Циммерман В. А. 489, 491, 492
 Цингер В. Я. 294—297, 378, 425, 428, 429, 435, 444, 461, 518, 595
 Цумпфт К. М. 529
 Цыганкова Э. Г. 5, 6, 616
 Чайковский Н. А. 5, 6, 505, 506, 581, 613, 614, 616
 Чаплыгин С. А. 425, 427, 447, 448, 452—457, 577, 581, 596
 Чеботарев Н. Г. 144, 163, 271, 276, 482, 484—486, 575, 586
 Чебышев Н. Л. 125
 Чебышев П. Л. 22, 77, 86, 95, 101, 107, 109—112, 114—117, 133, 149, 150, 182, 184—238, 242—244, 245, 246, 253, 256—259, 266, 267, 272, 274, 275, 279, 283, 293, 295, 296, 305, 310, 311, 325—329, 331—340, 342, 351, 359, 371, 377—379, 381—383, 388, 396, 397, 399, 401—403, 407, 411, 413, 429, 451, 461, 462, 471, 483, 490, 495, 510, 530, 579, 586, 593, 596—598
 Ченцов Н. Г. 447
 Черепанов А. Е. 107
 Черепанов М. Е. 107
 Черменский Е. Д. 558
 Чернов Д. К. 242
 Чернышев В. И. 557
 Чернышевский Н. Г. 80, 104, 128, 328
 Черняев М. П. 572, 578, 588
 Четаев Н. Г. 349, 587
 Чехов Н. В. 568
 Чижов Д. С. 25—27, 115, 119, 120, 148
 Чижов Ф. В. 113, 114
 Чириков Г. С. 589
 Чирков П. А. 323
 Чистяков В. Д. 586
 Чиханов Б. 553
 Чогошвили Г. С. 2
 Чудаков Н. Г. 544, 546, 549
 Чумаков Ф. И. 29, 127

Шабат Б. В. 450
 Шаль М. 252, 256, 297, 324, 463
 Шамоу Г. Ф. 586
 Шаньявский 395, 434
 Шапошников Н. А. 327, 427, 553, 582
 Шарлье К. 244
 Шателен М. А. 581
 Шатуновский С. О. 489, 493—496, 508, 555
 Шафаревич И. Р. 538
 Шафрановский И. И. 596

- Шафрановский К. И. 570, 585
 Шварц Г. 99, 263, 364, 416, 429, 531
 Швейкарт Ф. 35
 Шебуев Г. Н. 303
 Шевелев Ф. Я. 569
 Шевченко Т. Г. 104, 460, 500, 505, 506, 568, 581
 Шевырев С. 30, 566
 Шелейковский К. А. 26, 121
 Шеллинг 35
 Шенберг С. П. 486
 Шенфлисс 413
 Шереметьевский В. П. 559, 567
 Шестаков П. Д. 252
 Шидловский А. П. 134
 Шиллер Н. Н. 480
 Шиллинг П. Л. 107
 Шиманский Ю. А. 581
 Шимков А. П. 305
 Широков П. А. 514, 586
 Шифф В. И. 405, 406, 555
 Шифф П. А. 405, 407, 598
 Шишков 11
 Шлемилх 316
 Шмид Е. 568
 Шмидт 382
 Шмидт Г. 323
 Шмидт О. Ю. 480, 483, 484, 486, 598
 Шмулевич П. К. 555
 Шнейберг Я. А. 557
 Шостак Р. Я. 582
 Шпачинский Е. К. 480, 492
 Шредер 515
 Шретер 435, 462
 Штаерман И. 575
 Штауде Э. О. 320
 Штаудт К. 305, 463, 533
 Штейнгауз Г. 504
 Штейнер 140, 297
 Штермер К. 390, 391, 481
 Штерн 144
 Штокало И. З. 2, 5, 6, 53, 349, 575, 591, 613, 615, 616
 Штрайх С. Я. 579, 581
 Штули Э. 509, 511
 Штурм Ж. 79, 98, 112, 129, 246, 370, 371, 421
 Шуберт Ф. Т. 12, 18—21
 Шуберт Ф. Ф. 281
 Шубин С. 554
 Шульгин В. Я. 566
 Шультен Н. Г. 112
 Шульд (Леопольд фон Страшницкий) 145, 146
 Шульд Ю. К. 278
 Шумахер Г. Ф. 41, 144, 176
 Шумилов В. И. 527
 Шур Ф. 320, 321, 485, 509, 517
 Шухардин С. В. 557
 Щеглов Н. Т. 113, 149, 326
 Щепкин П. С. 30, 31, 126, 129
 Щербина К. М. 481
 Щиголев К. Г. 474
 Эванс 235
 Эйзенштейн 411, 484
 Эйлер Л. 10—13, 15—22, 24—26, 29, 33, 38, 42, 44, 46, 62—64, 66, 69, 72, 86—88, 90, 93, 101, 107, 112, 142, 144, 146, 151, 154, 167, 168, 183, 184, 188, 189, 191, 193, 195, 199, 200, 228, 250, 263, 264, 290, 291, 303, 313, 317, 324, 329, 361, 370, 383, 391, 401—403, 420, 448, 491, 492, 500, 531, 534, 543, 544, 547, 548
 Энгельс Ф. 557
 Энке 114, 191
 Энриквес Ф. 571
 Эратосфен 93, 189
 Эрдман 491
 Эренфейхт Э. В. 527, 528
 Эрмит 69, 77, 78, 94, 112, 182, 184—187, 194—196, 199, 204, 207, 208, 216, 231, 244, 266, 267, 269, 274, 285, 329, 330, 371, 397, 400, 402, 429, 509, 541, 579
 Эсклангон 522
 Эшерих Г. 507
 Эшлиман А. К. 323
 Юденич Н. Н. 323
 Юнг 526
 Юрьев Б. Н. 577
 Юферов Н. О. 40
 Юшкевич А. П. 2, 566, 568, 575, 582, 590
 Яворский Ф. 567
 Якоби Б. С. (Б. Я.) 66, 101, 107
 Якоби К. Г. 22, 63, 64, 67, 70, 71, 72, 74, 92, 112, 114, 118, 137, 140, 143, 182, 224, 246, 250, 253, 261, 264, 272, 274—276, 290, 313, 350—353, 371, 372, 392, 396—399, 401, 402, 421, 457, 463, 466, 470, 479, 483, 521, 558
 Яковкин И. Ф. 37
 Яковлев Д. В. 410
 Яковлев Н. 182
 Якунин П. Ф. 586
 Янишевский З. 504
 Янишевский Э. П. 183, 303, 566, 586
 Яновская С. А. 566, 586
 Яновский Л. 567
 Янушевский И. С. 54, 120, 278
 Ярошенко С. П. 313, 489—491, 493, 495
 Ястржембский Н. Ф. 120

О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
ПРЕДИСЛОВИЕ (<i>И. З. Штокало, А. Н. Боголюбов</i>)	5
Г Л А В А I. МАТЕМАТИКА В РОССИИ ПЕРВЫХ ТРЕХ ДЕСЯТИЛЕТИЙ XIX в.	
1. Социально-экономическое положение России. Реформа системы просве- щения и организация физико-математического образования (<i>С. Н. Киро</i>)	7
2. Математическая деятельность ученых Петербургской академии наук (<i>С. Н. Киро</i>)	12
3. Математика в петербургских высших и специальных учебных заведениях (<i>В. А. Добровольский, С. Н. Киро</i>)	25
4. Математика в Московском университете (<i>С. Н. Киро</i>)	29
5. Математика в Харьковском университете (<i>С. Н. Киро</i>)	32
6. Математика в Казанском университете (<i>С. Н. Киро</i>)	37
7. Математика в Дерптском университете (<i>И. Я. Денман</i>)	40
8. Математика в Виленском университете (<i>С. Н. Киро, Н. Д. Беспмятных</i>)	44
9. Математика во Львовском университете (<i>Н. А. Чайковский</i>)	49
10. Преподавание математики в средней школе и учебная литература (<i>С. Н. Киро</i>)	50
Г Л А В А II. НАУЧНАЯ И ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ М. В. ОСТРОГРАДСКОГО И В. Я. БУНЯКОВСКОГО (<i>С. Н. Киро</i>)	
М. В. Остроградский	52
1. Жизненный путь	52
2. Исследования по математической физике	54
3. Работы в области математического анализа	59
4. Труды по аналитической механике	70
5. Математические работы 50-х годов	75
6. Учебные пособия	78
В. Я. Буняковский	83
7. Жизнь и деятельность	83
8. Исследования по теории чисел	86
9. Работы по теории вероятностей и математическому анализу	95
10. Работы по геометрии и прикладным вопросам	101
Г Л А В А III. МАТЕМАТИКА В УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЯХ РОССИИ В 30—50-е ГОДЫ XIX в.	
1. Социально-экономическое и культурное развитие России (<i>И. З. Штока- ло, С. Н. Киро, З. Р. Вельянинова</i>)	104
2. Учебные заведения и развитие математики в России (<i>С. Н. Киро</i>)	107
3. Математика в Петербургском университете (<i>С. Н. Киро</i>)	112

4. Математика в Главном педагогическом институте (С. Н. Киро)	117
5. Преподавание математики в специальных технических и военных учебных заведениях (В. А. Добровольский, С. Н. Киро)	119
6. Математика в Московском университете (С. Н. Киро)	126
7. Математика в Харьковском университете (С. Н. Киро)	133
8. Математика в Киевском университете (С. Н. Киро, В. А. Добровольский)	136
9. Математика в Дерптском университете (И. Я. Денман, Ю. Г. Лумисте)	138
10. Преподавание математики во Львовском университете и Львовской технической академии (Н. А. Чайковский)	145
11. Преподавание математики в средней школе и учебная литература (С. Н. Киро)	147

ГЛАВА IV. Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ И МАТЕМАТИКА В КАЗАНСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ (С. Н. Киро)

1. Очерк жизни Н. И. Лобачевского	151
2. Открытие неевклидовой геометрии	155
3. «Алгебра или вычисление конечных»	162
4. Работы по математическому анализу	163
5. Дальнейшие исследования Н. И. Лобачевского по неевклидовой геометрии	169
6. Ученики Н. И. Лобачевского. Преподавание математики в Казанском университете	179

ГЛАВА V. ТВОРЧЕСТВО П. Л. ЧЕБЫШЕВА (С. Н. Киро)

1. Очерк жизни и педагогическая деятельность. Создание петербургской математической школы	184
2. Труды по теории чисел	188
3. Исследования по интегрированию функций	196
4. Работы по теории вероятностей	212
5. Исследования по теории наилучшего приближения функций	217
6. Работы по теории интерполирования и связанным с ним вопросам	226
7. Работы по прикладным вопросам.	235

ГЛАВА VI. МАТЕМАТИКА В ПЕТЕРБУРГЕ В 60—80-х ГОДАХ XIX в. С. В. КОВАЛЕВСКАЯ

1. Социально-экономическое и культурное развитие России. Математическая деятельность Петербургской академии наук (А. Н. Боголюбов, С. Н. Киро)	239
2. О. И. Сомов (Т. В. Путята, Б. Н. Фрадлин)	245
3. В. Г. Имшенецкий (Б. Л. Лаптев, Г. Н. Романенко)	252
4. Математика в Петербургском университете (С. В. Великая)	255
5. А. Н. Коркин (А. И. Кропотков)	259
6. Е. И. Золотарев (В. А. Зморевич)	266
7. Математика в петербургских специальных технических и военных учебных заведениях (В. А. Добровольский)	277
8. Жизнь и научная деятельность С. В. Ковалевской (В. С. Сологуб)	281

ГЛАВА VII. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В НАУЧНЫХ ЦЕНТРАХ СТРАНЫ В 60—80-х ГОДАХ XIX в.

1. Математика в Московском университете. Московское математическое общество (Н. И. Кованцов, О. А. Сичкар)	294
2. Математика в Казанском университете (Б. Л. Лаптев)	302
3. Математика в Харьковском университете (Э. Я. Бахмутская)	305

4. Математика в Киевском университете (В. А. Добровольский, Г. Н. Романенко)	307
5. Математика в Новороссийском университете (С. Н. Киро)	312
6. Математика в Дерптском университете (Ю. Г. Лумисте)	317
7. Математика в других высших учебных заведениях. А. В. Летников (В. А. Добровольский, Б. В. Пясковский)	321
8. Математическая учебная литература для средней школы (С. Н. Киро)	325

ГЛАВА VII. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В АКАДЕМИИ НАУК В 1890—1917 гг.

1. А. А. Марков (И. Б. Погребыский)	328
2. А. М. Ляпунов. Очерк деятельности (В. И. Смирнов, В. С. Сологуб)	340
3. Исследования А. М. Ляпунова по теории устойчивости движения (В. И. Смирнов, В. С. Сологуб)	342
4. Работы А. М. Ляпунова по теории фигур равновесия вращающейся жидкости (В. И. Смирнов, В. С. Сологуб)	350
5. Работы А. М. Ляпунова по теории потенциала, теории вероятностей и другие (В. И. Смирнов, В. С. Сологуб)	355
6. В. А. Стеклов. Жизненный путь, педагогическая и общественная деятельность (В. С. Сологуб)	362
7. Труды В. А. Стеклова по математической физике и теории замкнутости (В. С. Сологуб)	364
8. Работы В. А. Стеклова по теории упругости, гидродинамике и другие (В. С. Сологуб)	372
9. Н. Я. Сонин (А. И. Кропотков)	378
10. Математические работы А. Н. Крылова (Т. В. Путята, Б. Н. Фрадлин)	387

ГЛАВА IX. МАТЕМАТИКА В ПЕТЕРБУРГСКИХ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЯХ В 1890—1917 гг.

1. Социально-экономическое и культурное развитие России (И. З. Штокало, А. Н. Боголюбов, З. Р. Вельянинова)	393
2. Развитие математики в Петербургском университете. Петербургское математическое общество (А. И. Кропотков)	395
3. Математика в высших технических и специальных военных учебных заведениях (В. А. Добровольский)	408
4. Исследования по приближенным методам и прикладным вопросам (В. А. Добровольский, А. И. Кропотков)	419

ГЛАВА X. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ В МОСКВЕ В 1890—1917 гг.

1. Преподавание математики в Московском университете и высших технических учебных заведениях. Деятельность Московского математического общества (Л. Е. Майстров, В. А. Добровольский)	424
2. Московская школа дифференциальной геометрии (Н. И. Кованцов)	429
3. Московская школа теории функций. Н. Н. Лузин (В. С. Сологуб)	437
4. Математические исследования Н. Е. Жуковского (Т. В. Путята, Б. Н. Фрадлин)	444
5. О математических работах С. А. Чаплыгина (Т. В. Путята, Б. Н. Фрадлин)	452

ГЛАВА XI. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ НА УКРАИНЕ В 1890—1917 гг.

1. Социально-экономическое и культурное развитие Украины в конце XIX — начале XX в. (И. З. Штокало, А. Н. Боголюбов, З. Р. Вельянинова)	458
2. Математика в Харьковском университете. Харьковское математическое общество (Э. Я. Бажмутская)	460

3. Математика в Харьковском технологическом институте (Э. Я. Бахмутская)	472
4. Математика в Киевском университете. Киевское физико-математическое общество (В. А. Добровольский)	474
5. Научно-педагогическая деятельность Д. А. Граве. Киевская алгебраическая школа (В. А. Добровольский)	481
6. Математика в Киевском политехническом институте (В. А. Добровольский)	486
7. Математика в Новороссийском университете (С. Н. Киро)	489
8. Математика в Екатеринославском горном институте (Т. В. Путята, Б. Н. Фрадлин, В. А. Добровольский)	497
9. Математика на западноукраинских землях. Львовский и Черновицкий университеты. Математическая деятельность Научного общества им. Т. Г. Шевченко (1870—1918 гг.) (Н. А. Чайковский, Е. А. Кушнир)	500

ГЛАВА XII. МАТЕМАТИКА В ДРУГИХ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЯХ СТРАНЫ В КОНЦЕ XIX — НАЧАЛЕ XX в. ТВОРЧЕСТВО Г. Ф. ВОРОНОГО. ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

1. Математика в Казанском университете. Казанское физико-математическое общество (Б. Л. Лаптев)	508
2. Математика в Дерптском (Юрьевском) университете (Ю. Г. Лумисте, Н. Н. Кругликовский)	517
3. Математика в Томском технологическом институте (Н. Н. Кругликовский)	524
4. Математика в Ростовском университете, Варшавском, Донском и Рижском политехнических институтах (В. А. Добровольский, Б. В. Пясковский)	527
5. Творчество Г. Ф. Вороного (И. З. Штокало, И. Б. Погребынский)	533
6. Преподавание математики в средней школе и учебная литература (Н. Д. Беспамятных, С. Н. Киро)	550

БИБЛИОГРАФИЯ (Э. Г. ЦЫГАНКОВА)	557
ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ	599

Печатается по постановлению ученого совета Института истории Академии наук УССР и редакционной коллегии

Редакторы Е. Л. Орлик, Т. С. Мельник. Художественный редактор И. П. Антонюк. Оформление художника Б. В. Валуенко. Технический редактор Н. А. Турбанова. Корректор Р. С. Боприсова

БФ 05304. Зак. № 2123. Изд. № 313. Тираж 20.000. Формат бумаги 70×100¹/₁₆. Печ. физ. листов 38,5. Условн. печ. листов 49,665. Учетно-изд. листов 45,77. Подписано к печати 25.V 1967 г. Бумага № 1. Цена 3 руб. 13 коп.

Издательство «Наукова думка», Киев, Репина, 3.

Отпечатано с матриц фабрики набора в Киевской книжной типографии № 5 Комитета по печати при Совете Министров УССР, Киев, Репина, 4. Зак. 386.

